数理解析研究所講究録
177巻 1973年 92-111

Automorphism groups and equivalence in von Neumann algebras and ergodic type theorems

東北大 理 斎藤知之

§0 Introduction "非可換力学系" (M, G) (M は von Neumann algebra とし, G は M の *-automorphisms のつくる a group) に於ける "G-invariant measure" (G-invariant finite normal traces, G-invariant normal semi-finite traces, G-invariant normal states) の存在問題及びそれと関連した M と G との Cross product $M \times G$ の type の決定問題を最近 Størmer [8] によって導入された "equivalence" (定義は後で述べる) を使用して調べることにする。話の内容は次の3つの論文による。

1. E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, to appear in Pacific J. Math..
2. G.K. Pedersen and E. Størmer, ____________, II. preprint.
3. K. Saitô, automorphism groups of von Neumann algebras

and ergodic type theorems, preprint.

§1 Preliminaries. 話を簡単にするために M と G との covariant 表現を考えることにより([10]), M を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上に act する von Neumann algebra とし, G を M の unitarily に implement された $*$-automorphism group とする。すなわち $g \to u_g$ (G の unitary 表現) があって $u_g M u_g^* = M$ ($\forall g \in G$) とする。 Theorems を述べる前に cross product の理論を解説しておこう ([1] 参照)。

各 $g \in G$ に対して $\mathfrak{H}_g$ を $\mathfrak{H}$ と同じ dimension の Hilbert space とし $\hat{\mathfrak{H}} = \sum_{g \in G} \oplus \mathfrak{H}_g$ とする。J_g を $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_g$ の linear isometric mapping とする。$\tilde{\mathfrak{H}}$ 上の bounded linear operators 全体 $\mathcal{B}(\tilde{\mathfrak{H}})$ の元 R を $R_{s,t} = J_s^* R J_t \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ なる matrix 表現する。今 $t \in M$ に対して, $\pi(t) = (R_{st})$ $R_{st} = \delta_{s,t}\, t$ とすれば, π は M onto $\tilde{M} \subset \mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}})$ の $*$-isomorphism である。又各 $g \in G$ に対して $\tilde{u}_g \in \mathcal{B}(\hat{\mathfrak{H}})$ を $\tilde{u}_g = \langle R_{st} \rangle$ $R_{st} = \delta_{st^{-1}, g}\, u_g$ とすると, $g \to \tilde{u}_g$ は G の $\tilde{\mathfrak{H}}$ 上の unitary 表現で, $\pi(u_g^* x u_g) = \tilde{u}_g^* \pi(x) \tilde{u}_g$ ($\forall g \in G,\ x \in M$) が成立する。 $M \times G$ を $\tilde{M}$ と $\{\tilde{u}_g ; g \in G\}$ とから生成される von Neumann algelbra とするとよく知られたように $r \in M \times G$ は $r = \langle R_{st} \rangle$ $R_{st} = a_{st^{-1}} u_{st^{-1}}$ $\forall s, t \in G$ ($a_g \in M$ for $g \in G$) となるように書ける。 さらに $s \in M \times G$ $s = \langle t_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$ と

するならば，

$$(1) \cdots \begin{cases} (SS^*)_{ee} = \sum_{g\in G} t_g t_g^* \\ (S^*S)_{ee} = \sum_{g\in G} u_g^* t_g^* t_g u_g \end{cases} \quad (\text{但し } e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

が成立し，$\Phi(S) = S_{ee}$ と置くと，Φ は $M \times G$ onto M の faithful normal G-expectation である。

従来 von Neumann algebra では次の2種類の equivalence が考えられた。

1. Murray-von Neumann による projections の lattice に於ける equivalence. [6]

2. non-negative part に於ける Kadison-Pedersen の equivalence [4]。 N を von Neumann algebra として，

Definition 1. $a, b \in N^+$ (non-negative part) に対して
$a \approx b \rightleftarrows \exists \{a_i\} \subset N : \ a = \sum a_i^* a_i,\ b = \sum a_i a_i^*$ 。

特に e, f が N の projections の時は次のことが成立する [4]。

Proposition 1 (Fundamental equivalence theorem).

(a) $e \approx f \ \rightleftarrows \ e \sim f$。

(b) e が finite $\rightleftarrows$ e が $\approx$ finite ($e \geqq a$ $a \in N^+$ $e \approx a$ ならば，$e = a$)。

証明は最後の appendix に述べてある。

以上のことに注意して今 $e, f \in M_p$ に対して e と f との "equivalence" を $\pi(e)$, $\pi(f)$ ($\in M \times G$) の $M \times G$ に於ける equivalence

"$\sim$" で入れてみる。i.e. $\pi(e) \sim \pi(f)$ ならば $\exists v \in M \times G$: $\pi(e) = v^*v$, $\pi(f) = vv^*$ が成立する。従って $v \sim \langle a_{gh^{-1}} u_{gh^{-1}} \rangle$ とすると (1) 式から Φ を apply して

$$\left.\begin{aligned} e &= \Phi(v^*v) = \sum_{g \in G} u_g^* a_g^* a_g u_g \\ f &= \Phi(vv^*) = \sum_{g \in G} a_g a_g^* \end{aligned}\right\} \text{ が成立する。}$$

従ってこれを Definition として採用しようというのが Størmer [8] である。

Definition 2 ([8]). e, f を M の projections としこれが $e \overset{G}{\sim} f$ (G-equivalent) であるというのは、各 $g \in G$ に対して M の元 a_g があって $e = \sum_{g \in G} a_g a_g^*$, $f = \sum_{g \in G} u_g (a_g^* a_g) u_g^*$ を満すことである。

Remark 1. 実際もし $e \overset{G}{\sim} f$ ならば $\pi(e) \sim \pi(f)$ in $M \times G$ が成立する ([8])。$e \overset{G}{\sim} f$ ならば各 $g \in G$ に対して $a_g \in M$ があって上の条件を満す。従って、

$$\pi(e) = \sum_{g \in G} \pi(a_g)\pi(a_g)^* = \sum_{g \in G} (\pi(a_g)\widetilde{u_g})(\pi(a_g)\widetilde{u_g})^*$$
$$\pi(f) = \sum_{g \in G} \widetilde{u_g}^* \pi(a_g)^* \pi(a_g) \widetilde{u_g} = \sum_{g \in G} (\pi(a_g)\widetilde{u_g})^* (\pi(a_g)\widetilde{u_g})$$

従って $\pi(e) \approx \pi(f)$ in $M \times G$ となる。故に Proposition 1 により $\pi(e) \sim \pi(f)$ が成立する。

Remark 2. "$\overset{G}{\sim}$" は Remark 1 から equivalence relation で、しかも completely additive になっていることに注意する。

Definition 3 ([8]). $e, f \in M$ projections に対して $e \overset{G}{\prec} f$ というのは、$\exists e_1 \leqq e$ $e_1 \in M$, projection : $e_1 \overset{G}{\sim} e$ となるときである。

Remark 3. 注意すべきことは，$\pi(e) < \pi(f)$ in $M\times G$ がそのまま M で $e \overset{G}{\sim} f$ を意味しないということである。i.e. $\pi(e) \sim h \leqq \pi(f)$ $h \in M\times G$: projection としても $\Phi(h)$ が M の projection とはかならずしもならない。

§2. Main theorems. まず equivalence $\overset{G}{\sim}$ に関する finiteness と従来の Kovács - Szücs の G - finiteness との関連を示す定理として次のことを述べる。[5]

Theorem 1 ([9]). a) $\widehat{G}$ を G と M の inner automorphisms 全体のつくる group とから生成された group とするならば，

M が G~finite ($1 \overset{G}{\sim} e \Rightarrow e = 1$) ⇄ M が $\widehat{G}$- finite ($\widehat{G}$-invariant states i.e. G-invariant normal traces が充分沢山ある) ⇄ $M\times G$ が finite。

(b) M が G~finite ⇄ M_* (M の predual i.e. M 上の (bounded) normal functionals 全体のつくる Banach space) のかってな weakly relatively compact subset K に対して，K の $\widehat{G}$ による orbit が又 M_* で weakly relatively compact になることである。但し K の $\widehat{G}$ による orbit とは $\{\phi\circ g \mid \phi \in K, g \in \widehat{G},\ a^g = u_g a u_g^* \ \forall g \in G\ a \in M\}$ のことである。

Theorem 2 ([7]). $e \in M$: projection に対して次は同値である。

(i) e が G~finite,

(ii) $\pi(e)$ が $M \times G$ で finite.

このことから M が G~semi-finite であるための必要充分条件は，M^+ に G-invariant faithful normal semi-finite trace が存在することであることがわかる。そしてもちろん M が G~semi-finite ならば，$M \times G$ は semi-finite である。

但しここに M が G~semi-finite というのは，M の non-zero projection が non-zero G~finite subprojection を含むことである。

さらに Theorem 1 の他に Kovács - Szücs の G-finiteness との関連は次のようである。G~finite von Neumann algebra はかならず finite だから G-finite, semi-finite von Neumann algebra が G~finite になることは期待できないが次のことは成立する。

Theorem 3 ([8]). M を semi-finite von Neumann algebra とし Z をその center とする。

1. G が Z の元を elementwise に fix する場合，

   M が G-finite $\rightleftarrows$ M が G~semi-finite 且つ M^G (M の G による fixed subalgebra) に M の finite projections が充分沢山ある。

2. M の center Z と G が ergodic に act するならば，

   M が G-finite $\rightarrow$ M が G~semi-finite 且つ M^G に M の finite projections が充分沢山ある。

←はかならずしも成立しない。

§3 Proofs of Theorems. Theorem 1の証明については日作年8月の数理解析研究所での研究会でお話ししたし又講究録1661に述べたのでそちらを参照していただくことにし，ここではその中で重要な役割をした$\overset{G}{\precsim}$に関するcomparability theoremを述べそれを証明することにする。

Proposition 2. Mのprojectionsのpair e, fに対して Mの$\tilde{G}$による fixed subalgebra $M^{\tilde{G}}$ (MのGによるfixed subalgebra M^Gと center Zとのintersection) のprojection zが，

$$ez \overset{G}{\precsim} fz\ , \qquad e(1-z) \overset{G}{\succsim} f(1-z)$$

を満して存在する。

M×Gのcomparability theoremからMの$\overset{G}{\precsim}$に関するcomparability theoremを導びくことはRemark 3でも述べたようにそれほど単純ではないがいずれにしてもM×GのcenterとZとの関係，特にMのprojection eに対して$\pi(e)$のM×Gでのcentral carrierの解析が必要である。

Proposition 2の証明。今$z^G(e)$をMのprojection eをmajorizeする$M^{\tilde{G}}$ $(=M^G\cap Z)$のprojectionsのうち最小のもの(存在!)とする。まず$z^G(e)$のstructureを調べよう。結論は$z^G(e)=\sum_\alpha f_\alpha$ (f_α: orthogonal projection in M, 4 各αに対し,

$e_\alpha \leqq e$ と $g_\alpha \in \widetilde{G}$ が $u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = f_\alpha$ を満して存在する）の形に書ける。実際 $\{f_\alpha\}$ を e を含む各 α に対して上の条件を満す an orthogonal family とする。Zorn の Lemma によれば maximal なものが存在するのでこれを改めて $\{f_\alpha\}$ とする。そのとき $f \equiv \sum_\alpha f_\alpha$ とすると $f = z^G(e)$ となることを証明する。まず

(a) $u_g f u_g^* = f \ \forall g \in \widetilde{G}$ の証明。もしそうでなければ，$\exists g \in \widetilde{G}$: $u_g f u_g^*(1-f) \neq 0$ である。又

$$1-f \geqq f \vee u_g f u_g^* - f \sim u_g f u_g^* - u_g f u_g^* - u_g f u_g^* \wedge f \neq 0$$

が成立するから $\exists g_0 \in \widetilde{G}\ \exists \underbrace{\tilde{f} \neq 0}_{\text{projection}} : \tilde{f} \leqq 1-f$，$u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \leqq f$ である。又 $f = \sum_\alpha f_\alpha$ であるから $\exists \alpha: u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* f_\alpha \neq 0$ となり故に

$$u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \geqq u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* \wedge (1-f_\alpha) \sim (1-f_\alpha) \vee u_{g_0} \tilde{f} u_{g_0}^* - (1-f_\alpha) \neq 0$$

に注意して上と同様に $\exists \tilde{\tilde{f}}(\neq 0) \leqq \tilde{f}$ (projection) $\leqq 1-f$, $\exists g' \in \widetilde{G}$: $u_{g'} \tilde{\tilde{f}} u_{g'}^* \leqq f_\alpha$ である。又仮定によれば，f_α に対して $\exists g_\alpha \in \widetilde{G}$ $\exists e_\alpha \in M$ projection $e_\alpha \leqq e$: $u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = f_\alpha$，$e_\alpha = u_{g_\alpha} f_\alpha u_{g_\alpha}^*$ 従って $g_\alpha g' = \tilde{g} \in \widetilde{G}$ とすると $u_{\tilde{g}} \tilde{\tilde{f}} u_{\tilde{g}}^* \leqq e_\alpha \leqq e$ 従って $\{\tilde{\tilde{f}}, f_\alpha\} \supsetneqq \{f_\alpha\}$ から $\{f_\alpha\}$ の maximality に矛盾する。従って $u_g f u_g^* = f \ \forall g \in \widetilde{G}$ より $f \in Z^G$ となる。

(b) $f \leqq z^G(e)$ の証明。

$$\begin{aligned} z^G(e) f &= \sum_\alpha z^G(e) f_\alpha = \sum_\alpha z^G(e) u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} \\ &= \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* z^G(e) e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha u_{g_\alpha}^* e_\alpha u_{g_\alpha} = \sum_\alpha f_\alpha \\ &= f。\end{aligned}$$

故に $f \leq Z^G(e)$ i.e. $f = Z^G(e)$ である。 e, f を M の projections のかってな pair とすると $Z^G(e)Z^G(f) \neq 0$ ならば、$\exists e_1 \leq e$, projection (, Mの), $\exists f_1 \leq f$, projection (, Mの) : $e_1 \overset{G}{\sim} f_1$ となる。故に Murray-von Neumann の equivalence の場合と同様にして comparability theorem を証明できる。たとえば Dixmier [1] を参照されたい。

以上.

Remark 4. 実は $\pi(Z^G(e)) = Z(\pi(e))$ in $M \times G$ が成立する [8].

この comparability theorem を使用して Theorem 2 の証明をしよう。

(i) → (ii) の証明。 $\pi(e)$ が $M \times G$ で finite でなく e が M で G-finite とする。 $\exists p \in M \times G$: projection : $0 \neq p \leq \pi(e)$, $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ となる。 $p \neq 0$ から $\Phi(p) \gneq 0$ で (i) から $\Phi(p)$ は not projection である ($\Phi(p)$ projection ならば $\Phi(p) \overset{G}{\sim} e$ が成立し $\Phi(p) \leq e$)。故に $\exists\, 0 < \alpha < 1$ (real) : $f \equiv \chi_{(0,\alpha)}(\Phi(p)) \neq 0$ ($f \leq e$ projection in M) である。 又

$$\frac{1}{1-\alpha}(e - \Phi(p)) \geq f$$

から $e - \Phi(p)$ を何倍かすると

$$n\,(e - \Phi(p)) \geq f > 0 \qquad \cdots (2)$$

が成立する。又 $p \sim \pi(e)$ から $\pi(\Phi(p)) \approx \pi(e)$ in $(M \times G)^+$ が成立する。実際 $p \sim \pi(e)$ in $M \times G$ より $\exists v \in M \times G$: $p = v^*v$ $vv^* = \pi(e)$ である。 $v \sim \langle v_{gh^{-1}}\, u_{gh^{-1}} \rangle$ とすると

$$\left.\begin{aligned} \pi(e) &= \sum_k \pi(v_k)\pi(v_k)^* \\ \pi(\Phi(e)) &= \sum_k \tilde{u}_k^* \pi(v_k)^* \pi(v_k) \tilde{u}_k \end{aligned}\right\} \text{となる。}$$

故に $\pi(\Phi(p)) \approx \pi(e)$ in $(M\times G)^+$ である。従って $n\pi(\Phi(p)) \approx n\pi(e)$ となる。よって (2) によれば、$\pi(f) \leqq n\pi(e) - n\pi(\Phi(p))$ に注意して

$$n\pi(e) + \pi(f) \precsim n\pi(e) \quad \text{-----} \quad (3)$$

が成立する。故に

$$\begin{aligned} n\pi(e) + n\pi(f) &= n\pi(e) + \pi(f) + (n-1)\pi(f) \\ &\precsim n\pi(e) + (n-1)\pi(f) \qquad (\,(3)\text{による}\,) \\ &\precsim n\pi(e) + (n-2)\pi(f) \\ &\ \ \vdots \\ &\precsim n\pi(e) + \pi(f) \precsim n\pi(e) \end{aligned}$$

となる。従って $\pi(e)+\pi(f) \precsim \pi(e)$ で $\succsim$ は常に成立するから $\precsim$ に関する Bernstein type の Theorem ([4] Proposition 2.7) により $\pi(e)+\pi(f) \approx \pi(e)$ in $(M\times G)^+$ が成立する。

今 $z^G(f)e = e_0$ とすると $\pi(z^G(f)) \in M\times G$ の center だから、$\pi(e_0) + \pi(f) \approx \pi(e_0)$ が成立する。

次に $\pi(e_0)$ が $M\times G$ で properly infinite になることを示そう。$q_0 \equiv q\pi(e_0)$ が ($q \in M\times G$ の central projection の集合) $M\times G$ で finite としよう。$(M\times G)\otimes M_2$ (M_2 は 2×2 matrix algebra) の中の議論に直して $p_0 \overset{\text{def}}{=} q\pi(f)$ とすると $p_0 \leqq q_0$ に注意し、

$$\begin{pmatrix} p_0 + q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p_0+q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \precsim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$$

が成立する。又 $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ はともに projections だから $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ in $(M\times G)\otimes M_2$ が proposition 1 によって成立する。

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}((M\times G)\otimes M_2)\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$ が finite algebra であるから

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix} \leqq \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix}$ 且つ $\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ によって,

$\begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & p_0 \end{pmatrix}$ i.e. $p_0 = 0$ が成立する。

$p_0 = q\pi(f) = 0$ から $\Phi(q)f = 0$ i.e. $\Phi(q) \in Z^G$ から $\Phi(q)Z^G(f) = 0$。又 $q_0 = q\pi(Z^G(f)e)$ から $\Phi(q_0) = \Phi(q)Z^G(f)e = 0$ で, Φ の faithfulness から $q_0 = 0$ が成立 i.e. $\pi(e_0)$ は properly infinite となる。従って $\exists q_1, q_2 \in (M\times G)$; projections:

$$\pi(e_0) \sim q_1 \sim q_2 \quad 且つ \quad \pi(e_0) = q_1 + q_2 \quad \cdots\cdots (4)$$

が成立する。従って $\pi(e_0) \approx 2\pi(e_0)$ である。

次に $e_0Me_0 = Z^Ge_0$ (e_0 は G-abelian) を証明しよう。今 $g \leqq e_0$, $g \in M$: projection としたとき, g と $e_0 - g$ とに proposition 2 の comparability theorem を使用して $\exists z \in Z^G$: projection:

$$zg \overset{G}{\precsim} z(e_0-g), \qquad (1-z)g \overset{G}{\succsim} (1-z)(e_0-g)$$

が成立する。π を apply して $\overset{G}{\precsim}$ を $\precsim$ (in $M\times G$) に置きかえることができる。従って,

$$2\pi(ze_0)\approx\pi(ze_0)=\pi(zg)+\pi(z(e_0-g))$$
$$\precsim 2\pi(z(e_0-g))\leqq 2\pi(ze_0)$$

だから，$ze_0\overset{G}{\sim}z(e_0-g)$ が成立する。(i) によれば，ze_0 は，G-finite だから $ze_0=z(e_0-g)$ i.e. $zg=0$ である。又

$$2\pi((1-z)e_0)\approx\pi((1-z)e_0)=\pi((1-z)g)+\pi((1-z)(e_0-g))$$
$$\precsim 2\pi((1-z)g)\leqq 2\pi((1-z)e_0)$$

より $(1-z)e_0\overset{G}{\sim}(1-z)g$，よって前と同様(i)により $g=(1-z)g=(1-z)e_0$ が成立するので主張が証明された。(4) により

$\exists v\in M\times G$: $v^*v=q_1$, $vv^*=\pi(e_0)$ $\quad(v\in\pi(e_0)(M\times G)\pi(e_0))$

である。$v\sim\langle s_{gh^{-1}}u_{gh^{-1}}\rangle$ に注意して，(1) によれば，

$$\Phi(v^*v)=\sum_k u_k^*s_k^*s_ku_k\ (=\Phi(q_1)\leqq e_0)$$
$$\Phi(vv^*)=\sum_k s_ks_k^*\quad(=e_0)$$

で，$u_k^*s_k^*s_ku_k\leqq e_0$, $s_ks_k^*\leqq e_0$ $(\forall k\in G)$ が成立する。よって上の議論によれば，$s_ks_k^*=a_1e_0$ $(a_1\in Z^G,\ a_1\geqq 0)$，$u_k^*s_k^*s_ku_k=b_1e_0$ $(b_1\in Z^G\ b_1\geqq 0)$ と書ける。$s_k=v_k|s_k|$ を s_k の polar decomposition とすると，$a_1e_0=s_ks_k^*=v_k s_k^*s_k v_k^*=v_k b_1 u_ke_0u_k^*v_k^*=b_1v_ku_ke_0u_k^*v_k^*\leqq b_1v_kv_k^*\leqq b_1e_0$ となる。対称な議論から $a_1e_0\geqq b_1e_0$ i.e. $a_1e_0=b_1e_0$，$u_k^*s_k^*s_ku_k=s_ks_k^*$ $(\forall k\in G)$ となる。i.e. $\Phi(q_1)=e_0$ である。$q_1\leqq\pi(e_0)$ 且つ Φ の faithfulness により $\pi(e_0)=q_1$ が成立し (4) によれば $q_2=0$ となる。よって $\pi(e_0)\sim q_2$ から $\pi(e_0)=\pi(eZ^G(f))=0$ となる。i.e. $eZ^G(f)=0$

x $e \geq f$ から $f=0$ となり $f \neq 0$ という仮定に反する。従って $\pi(e)$ は $M \times G$ で finite である。

(ii) → (i) は明らかである。

さらに「M が G~semi-finite ⟷ M^+ が G-invariant normal faithful semi-finite trace をもつ」の証明は，$M \times G$ の finite projection で特に $\tilde{M} (= \pi(M))$ の中にあるものをもとにして，$(M \times G)^+$ 上に trace をつくりそれを M に制限することを考えればよい。これは演習問題である。　以上。

Theorem 3 の証明の 1), 2) case の "→" の部分に関しては，G-finite ならば，それぞれの場合に G-invariant faithful normal semi-finite trace が M^+ 上に存在することがわかっている（[11], [12]）し，M^G に M の finite projections が充分沢山あることもわかっている。次に case 1 の逆を証明しよう。i.e. M が G~semi-finite 且つ $\{e_\alpha\}$ なる M^G の中の M で finite な projections の orthogonal family で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ となるものがあるとする。$e_\alpha M e_\alpha$ は finite algebra で G が $e_\alpha M e_\alpha$ の automorphism group に reduce できることに注意する。$e_\alpha M e_\alpha$ には $Z e_\alpha$-valued trace Φ で $\Phi(x^g) = \Phi(x)^g$ $\forall x \in e_\alpha M e_\alpha$ $\forall g \in G$ を満すものが存在する。ところが $Z e_\alpha$ の元を G は elementwise に fix するから $\Phi_\alpha(x^g) = \Phi_\alpha(x)$ $\forall x \in e_\alpha M e_\alpha$

となる。今 Ze_α 上の normal states 全体を $\mathfrak{S}_\alpha$ とすると、$\bigcup_\alpha \{\phi\circ\Phi_\alpha\circ\Phi_\alpha,\ \phi\in\mathfrak{S}_\alpha\}$ は M 上の G-invariant normal states の a separating family を与える。但し Φ_α は $M\to e_\alpha M e_\alpha$ の $\Phi_\alpha(x)=e_\alpha x e_\alpha$ なる mapping とする。従って M は G-finite となる。

Case 2. の逆が成立しないことは次の簡単な例により明らかである。$\mathbb{Z}$ を integers の the set とし $l^\infty(\mathbb{Z})$ を $\mathbb{Z}$ 上の bounded complex-valued functions 全体のつくる von Neumann algebra (acting on $l^2(\mathbb{Z})$) とする。$f\in l^\infty(\mathbb{Z})$ に対して

$$(\sigma f)_i = f_{i+1} \qquad \forall i\in\mathbb{Z}$$

によって $l^\infty(\mathbb{Z})$ の $*$-automorphism σ を定義し、$G=\{\sigma^m \mid m\in\mathbb{Z}\}$ とすると、G は $l^\infty(\mathbb{Z})$ の ergodic automorphism group である。$l^\infty(\mathbb{Z})$ は G-semi-finite であり $l^\infty(\mathbb{Z})$ が finite より $1\,(\in l^\infty(\mathbb{Z})^G)$ が finite projection となる。従って $(l^\infty(\mathbb{Z}), G)$ は、Case 2 の逆の条件を満す。しかし $l^\infty(\mathbb{Z})$ は G-finite ではない。実際 $\varphi\in l^\infty(\mathbb{Z})_*\ (=l^1(\mathbb{Z}))$ が G-invariant ならば、$\varphi=\{\eta_i\}\in l^1(\mathbb{Z})\ (\sum_{i\in\mathbb{Z}}|\eta_i|<\infty)$ で、

$$\langle \sigma^m f,\ \varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall m,\ \forall f\in l^\infty(\mathbb{Z})$$

から $\sum_{i\in\mathbb{Z}} f_{i+m}\eta_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} f_i\eta_i\ \ \forall f\in l^\infty(\mathbb{Z})$ となり、$\eta_m=\eta_0\ \ \forall m\in\mathbb{Z}$ で $\{\eta_i\}\in l^1(\mathbb{Z})$ から $\eta_m=0\ \ \forall m$ i.e. $\varphi=0$ が成立する。

以上。

Remark 5. Theorem 2 の証明の本質的な部分は [7] によった。それでは, M^+ の中に新しい "$\overset{G}{\precsim}$" equivalence なる概念を導入し $\overset{G}{\precsim}$ に関する comparability theorem を証明し, それを使って Theorem 2 の証明をしている。 Theorem 2 の証明に関する限りは Proposition 2 があるので $\overset{G}{\precsim}$ なる概念を使用しなくてよい。

しかし原論文 [7] にはその他に σ-finite $G\sim$finite projection の characterization や, abelian case で, 確率論に於ける Markoff の Theorem との関連が議論されておりそれには $\overset{G}{\precsim}$ なる概念が有効である。ここでは割愛させていただいた。

参考のために "$\overset{G}{\precsim}$" の definition をここで述べて置く。

Definition 4([7]). M^+ の元 a, b が $a \overset{G}{\precsim} b$ であるというのは, $\{r_{ig}\ i\in I\ g\in G\}\subset M$ があって, $a=\sum_{ig} r_{ig}{}^* r_{ig}$, $b=\sum_{ig} u_g(r_{ig}r_{ig}{}^*)u_g{}^*$ を満すことである。

§4 appendix. Fundamental equivalence theorem の証明。

(a)の証明で "$\leftarrow$" は明らかであるから "$\rightarrow$" を示そう。 $e, f \in N$ projection が $e \approx f$ とすると, $\exists \{a_i\}\subset N:\ e=\sum a_i{}^*a_i$, $f=\sum a_i a_i{}^*$ である。

(*) N の center の projection p に対して, Np 上で上の状況は不変だから各 direct summand で主張を検討すればよい。

1° N の center は σ-finite としてよい。

2° $e \approx f$ から $z(e)=z(f)$ となるから $z(e)=z(f)=1$ としてよい。

3° e が finite の場合と properly infinite の場合に分けてよい。

α) e が finite の場合. $z(e)=z(f)=1$ から φ を N^+ 上の faithful normal semi-finite trace とし, $\mathfrak{M}_\varphi$ をその definition ideal とする。もし $z \in N^\natural{}_p$ ($N^\natural$ は N の center) に対して, $ze \in \mathfrak{M}_\varphi$ ならば, $(za_i)^*(za_i) \leq ze$ に注意して $(za_i)^*(za_i) \in \mathfrak{M}_\varphi$ for each i である。φ の normality 及び $\varphi((za_i)^*(za_i)) = \varphi((za_i)(za_i)^*)$ に注意して $\varphi(ze) = \varphi(zf)$ が成立する。今 $\forall p_0 \in N^\natural{}_p$ ($p_0 \leq z$) に対して $p_0 e$, $p_0 f$ は同じ条件を満すから $\varphi(p_0 e) = \varphi(p_0 f)$ となる。Comparability theorem により $p_0 ze \precsim p_0 zf$, $(1-p_0)ze \succsim (1-p_0)zf$ for some $p_0 \in N^\natural{}_p$ であるから φ が faithful trace ということにより $p_0 ze \sim p_0 zf$ 及び $(1-p_0)ze \sim (1-p_0)zf$ i.e. $ze \sim zf$ である。従って $z \in N^\natural{}_p$ が $ze \in \mathfrak{M}_\varphi$ ならば, $ze \sim zf$ である。e が finite だから $\exists \{p_j\} \subset N^\natural{}_p$: orthogonal : $p_j e \in \mathfrak{M}_\varphi$ $\forall j$ 且つ $\sum p_j = 1$ なる。各 j に対して上の議論から $p_j e \sim p_j f$ 従って $e \sim f$ が成立する。

β) e が properly infinite の場合. α) と同様の議論から f も又 properly infinite になる。

β_1) もし e, f ともに σ-finite ならば $e \sim f$ が成立することは $z(e)=z(f)=1$ からわかる。例えば [1] を参照されたい。

β_2) 一般の場合。もし $e \sim f$ が成立しないとしよう。

comparability theorem 及び最初に述べた注意(*)から我々は $eg \precsim fg$ $\forall g \in N^{\natural}{}_p$ $g \neq 0$ と仮定して矛盾を導びけばよい。さらに注意(*)から multiplicity theorem (例えば [2] [3]) によって e, f はそれぞれ次の case に帰着できる。ある infinite cardinal numbers α, β があって

a) eNe が purely infinite 且つ、 $e = \sum_{j \in J} e_j$ $\{e_j\}_{j \in J}$ equivalent orthogonal cyclic projections with $\bar{\bar{J}} = \alpha$,

又は

b) eNe が semi-finite 且つ $e = \sum_{j \in J} e_j$ $\{e_j\}_{j \in J}$ equivalent orthogonal finite (1° により σ-finite) projections with $\bar{\bar{J}} = \alpha$

とでき f についても

a′) fNf が purely infinite 且つ $f = \sum_{i \in I} f_i$ $\{f_i\}_{i \in I}$: equivalent orthogonal cyclic projections with $\bar{\bar{I}} = \beta$,

又は

b′) fNf が semi-finite 且つ $f = \sum_{i \in I} f_i$ $\{f_i\}_{i \in I}$: equivalent orthogonal finite (1° により σ-finite) projections with $\bar{\bar{I}} = \beta$

とできる。仮定から $e \prec f$ であったから a) b′) b) a′) が同時に起ることはあり得ない。よって a) a′), 又は b) b′) である。

いずれの場合も $\alpha < \beta$ が成立する。 実際

a) a′) の場合。 $e = \sum_{j \in J} e_j$, $e_j \sim e_i$ から $z(e) = z(e_j)$ であり同様に $z(f) = z(f_i)$ となり $z(e_j) = z(e) = z(f) = z(f_i)$ から β_1) から

$e_j \sim f_i$ となり $e \prec f$ から $\alpha < \beta$ である。

b) b')の場合。$\alpha \geqq \beta$ として矛盾を出し $\alpha < \beta$ をいおう。Comparability Theorem によれば、$\exists\, g \in N^{\natural}_p$: $e_{j_0} g \precsim f_{i_0} g$, $e_{j_0}(1-g) \succsim f_{i_0}(1-g)$ である。$(1-g)e_j \succsim (1-g)f_i \;\; \forall i, j$ と $\alpha \geqq \beta$ とから $(1-g)e \succsim f(1-g)$ となり β_2)の仮定に矛盾する。i.e. $e_{j_0} \precsim f_{i_0}$ である。$e \prec f$ から e_{j_0} と equivalent な f の subprojections の maximal orthogonal family を $\{e_\kappa\}_{\kappa \in K}$ とすると $\bar{\bar{K}} \geqq \bar{\bar{J}}$ ($\bar{\bar{S}}$ は set S の power) である。$f - \sum_{\kappa \in K} e_\kappa = e_0$ とし e_0 と e_κ に対して comparability theorem から $e_0 h \precsim e_\kappa h$ $e_0(1-h) \succsim e_\kappa(1-h)$ $(h \in N^{\natural}_p)$ とすることができる。$e_\kappa h = 0$ とすると maximality に矛盾する。よって

$$0 \neq hf = e_0 h + \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \precsim \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \leqq hf$$

から $hf \sim \sum_{\kappa} h e_\kappa$ となり従って multiplicity の一意性により $\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{I}}$ が成立する。従って $\alpha \geqq \beta$ ならば $\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{I}} \geqq \bar{\bar{J}}$ から $\alpha = \beta$ で、$he = \sum_{j \in J} e_j h \sim \sum_{\kappa \in K} h e_\kappa \sim hf$ となり $he \not\precsim hf$ という β_2)の仮定に矛盾する。従っていずれの場合も $\alpha < \beta$ である。

$e = \bigvee_\delta e_\delta$ として e_δ を σ-finite と仮定する。$e_\delta N e_\delta$ 上には faithful normal state ω_δ が存在する。今 $e = \sum_{i \in \mathfrak{I}} a_i^* a_i$ とすると $a_i e_\delta = 0 \;\forall \delta$ なら $a_i e = 0$ であり $a_i^* a_i \leqq e$ から $a_i = 0$ となることに注意して $\mathfrak{I}_\delta \overset{\mathrm{def}}{=} \{i \,;\, a_i e_\delta \neq 0\}$ とすると $\mathfrak{I} = \bigcup_\delta \mathfrak{I}_\delta$ である。$\omega_\delta(e_\delta) = \sum_i \omega_\delta(e_\delta a_i^* a_i e_\delta) < \infty$ から $a_i e_\delta \neq 0$ なる i は at most countable だから $\overline{\overline{\mathfrak{I}_\delta}} \leqq \aleph_0$。よって $\bar{\bar{\mathfrak{I}}} \leqq \overline{\overline{\{\delta\}}}\, \aleph_0$ である。

$e = \sum_{j\in I} e_j$ と書け e_j は σ-finite であった。 $e = \sum_{i\in \mathfrak{K}} a_i^* a_i$　$f = \sum_{i\in\mathfrak{K}} a_i a_i^*$ として上の論法を使用すると $\bar{\bar{\mathfrak{K}}} \le \alpha \aleph_0 = \alpha$ となる。

又 e_i を a_i の right projection f_i を a_i の left projection とすると

$e = \bigvee_{i\in\mathfrak{K}} e_i$　$f = \bigvee_{i\in\mathfrak{K}} f_i$ 且つ $e_i \sim f_i$ ($\forall i \in \mathfrak{K}$) が成立する。

次に各 e_i は高々 $\bar{\bar{J}}$-個の σ-finite projections の union となる。

実際

1° cyclic case. ($e_j = e^{N'}_{\xi_j}$ for some vector ξ_j) とするならば、

$$e_i = \bigvee_{j\in J} e^{N'}_{e_i\xi_j} 。$$

2° finite case.　$e_i = \bigvee_{j\in J}(e_i - e_i\wedge(1-e_j))$。

$e_i\sim f_i$ から $f = \bigvee_{i\in\mathfrak{K}} f_i$ 且つ $f_i = \bigvee_{j\in J} f_{ij}$　f_{ij} は σ-finite と書ける。

従って $f = \sum_{\gamma\in I} g_\gamma$　g_γ は σ-finite with $\bar{\bar{I}} = \beta$ から上の論法によると、$\beta \le \bar{\bar{\mathfrak{K}}}\bar{\bar{J}} \le \alpha^2 = \alpha$ (α は infinite cardinal) となりこれは矛盾である。よって $e\sim f$ が成立する。(b) は trace を用いて容易に証明できる。　以上。

文献

[1] J. Dixmier, Algèbres de von Neumann, Gauthier Villars, Paris 1957.

[2] E. L. Griffin, Some contributions to the theory of Rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 75 (1953), 471-504.

[3] ———, ——— II, Trans. Amer. Math. Soc., 79 (1955), 389-400.

[4]. R. V. Kadison and G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, Math. Scand., 27 (1970), 205-222.

[5]. I. Kovacs and J. Szücs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966), 233-246.

[6] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math., 37 (1937) 116-229.

[7] G. K. Pedersen and E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras II, Preprint.

[8] E. Størmer, Automorphisms and equivalence in von Neumann algebras, To appear in Pacific J. Math.

[9] K. Saitô, Automorphism groups of von Neumann algebras and ergodic type theorems, Preprint.

[10] M. Takesaki, Covariant representations of C*-algebras and their locally compact automorphism groups, Acta Math., 119 (1969), 273-303.

[11] E. Størmer, States and Invariant maps of operator algebras, J. Functional Analysis, 5 (1970), 44-65.

[12] ____________, Automorphisms and Invariant states of operator algebras, Acta Math., 127 (1971), 1-9.