

Connexion ...

奈良正尊 北川 誠之助

§ 1 序

ここでは、A. Connes の  $T(M)$  に関する結果の一部を紹介し、

記号 :  $M, N$  : Neumann algebra

$\varphi, \psi$  :  $M$  上の normal semi-finite faithful

weight (又は state) 以下では weight (又は state) は全て normal semi-finite faithful であるとする

$$\mathcal{N}_\varphi = \{ x \in M : \varphi(x^*x) < \infty \}$$

$$\mathcal{M}_\varphi = \{ x^*y : x, y \in \mathcal{N}_\varphi \}$$

$\pi_\varphi$  :  $\varphi$  による modular automorphism

$$\mathcal{M}_\pi = \{ x = \pi_\varphi(x) = x \}$$

§ 2

定理 1  $\varphi, \psi$  :  $M$  上の weight

$u_t \longrightarrow u_t \in \mathcal{M}_\psi$  strongly conti. mapping

$$\pi_\psi^*(x) = u_t \pi_\varphi(x) u_t^* \quad \forall x \in M$$

証明  $\mathbb{F}_2 = \{2 \times 2\text{-matrix } \& \text{ とある}$

$$\theta(\sum x_{ij} \otimes e_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x_{11}) + \varphi(x_{22}) \quad \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \in (M \otimes \mathbb{F}_2)$$

$$\forall \theta \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \iff x_{i1} \in \mathbb{M}_\varphi, x_{i2} \in \mathbb{M}_\varphi \quad (i=1,2) \text{ かつ}$$

$\theta$  は  $M \otimes \mathbb{F}_2$  の weight 1 にある事は容易にわかる。

$f_j = 1 \otimes e_{jj} \quad (j=1,2)$  は  $(M \otimes \mathbb{F}_2)_\theta$  に含まれることを示す。

右向き  $\sigma_t^\theta(f_j) = f_j \quad (j=1,2)$  を示す。

[1] 1- $\&$  次の事を示せば十分である。

$$f_j \mathbb{M}_\theta \subset \mathbb{M}_\theta \quad \mathbb{M}_\theta \cdot f_j \in \mathbb{M}_\theta \quad (j=1,2)$$

$$\theta(f_j \cdot a) = \theta(a \cdot f_j) \quad \forall a \in \mathbb{M}_\theta \quad (j=1,2)$$

しかし、容易に計算できるので、計算は省略する。

$$\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sum x_{ij} \otimes e_{ij} \text{ とすると}$$

$$(1 \otimes e_{11}) \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) (1 \otimes e_{11})$$

$$0 = (1 \otimes e_{22}) \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) (1 \otimes e_{22})$$

$$\& \exists \sigma_t(x) \in M \quad \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t(x) \otimes e_{11} \text{ とある}$$

$x \rightarrow \sigma_t(x) = \text{strongly conti. one-parameter group of automorphisms in } M.$

$x \rightarrow \sigma_t(x)$  に関して、 $\varphi$  の K.M.S. 条件を満足することを示す。

$$\varphi(\sigma_t(x^*x)) = \theta(\sigma_t^\theta(x^*x) \otimes e_{11}) = \theta(x^*x \otimes e_{11}) = \varphi(x^*x) \otimes e_{11}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{M}_\varphi$$

$$\varphi(\sigma_t(a)b) = \theta(\sigma_t^\theta(a \otimes e_{11}) \cdot b \otimes e_{11})$$

$$\varphi(b \Gamma_T(a)) = \theta(b \otimes e_{11} \cdot \Gamma_T^\theta(a \otimes e_{11}))$$

$\Gamma_T^\theta$  が  $\theta$  に関して K.M.S 条件を満たすことより

$$\exists F(z) = \text{holomorphic} \quad 0 < \text{Im } z < 1, \text{ center } 0 \leq \text{Im } z \leq 1$$

$$F(x) = \theta(\Gamma_T^\theta(a \otimes e_{11}) b \otimes e_{11}) = \varphi(\Gamma_T(a) b)$$

$$\overline{F(t+i)} = \theta(b \otimes e_{11} \cdot \Gamma_T(a \otimes e_{11})) = \varphi(b \Gamma_T(a))$$

したがって K.M.S 条件の一意性により

$$\Gamma_T(x) = \Gamma_T^\varphi(x) \quad \forall x \in M.$$

$$\therefore \Gamma_T^\theta(x \otimes e_{11}) = \Gamma_T(x) \otimes e_{11} = \Gamma_T^\varphi(x) \otimes e_{11}$$

同様に  $\Gamma_T^\theta(x \otimes e_{22}) = \Gamma_T^\varphi(x) \otimes e_{22} \quad \forall x \in M.$

$$(1 \otimes e_{22}) \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21})(1 \otimes e_{11})$$

$$0 = (1 \otimes e_{11}) \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) 1 \otimes e_{22}$$

よって  $\Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) = u_T \otimes e_{21} \quad u_T \in M. \quad \text{とあり}$

$$u_T^* u_T \otimes e_{11} = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{11}) = 1 \otimes e_{11}$$

$$u_T u_T^* \otimes e_{22} = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{22}) = 1 \otimes e_{22} \quad \text{よって } u_T \text{ は unitary operator.}$$

$$(u_T \otimes e_{21})(\Gamma_T^\varphi(x) \otimes e_{11})(u_T^* \otimes e_{12}) = \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{21}) \Gamma_T^\theta(x \otimes e_{11}) \Gamma_T^\theta(1 \otimes e_{12})$$

$$= \Gamma_T^\theta(x \otimes e_{22}) = \Gamma_T^\varphi(x) \otimes e_{22}$$

$$\therefore u_T \Gamma_T^\varphi(x) u_T^* = \Gamma_T^\varphi(x) \quad \forall x \in M. \quad \text{g.e.}$$

定理 1 で求めた  $u_T$  を  $(D\varphi; D\varphi)_t$  と書く。

$(D\varphi; D\varphi)_t$  は次の様な性質を持つ。

Lemma 1)  ~~$\varphi$~~   $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi = \text{weight}$

$$i) (D\varphi_1; D\varphi_2)_t (D\varphi_2; D\varphi_3)_t = (D\varphi_1; D\varphi_3)_t.$$

ii)  $\varphi = \sqrt{t}^\varphi$ -invariant weight

[1] により  $\exists k \neq 0 \quad R \neq 0$

$\varphi(x) = \varphi(hx)$  と表わされる。

$(D\varphi = D\varphi)_t = R \cdot t$  とある。

iii)  $u \in M_u \quad \varphi_u \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u \times u^*)$

$\sqrt{t}^\varphi(u) = u(D\varphi_u = D\varphi)_t$

(\*) iv)  $(D\varphi = D\varphi)_{t_1+t_2} = (D\varphi = D\varphi)_{t_1} \sqrt{t_1}^\varphi((D\varphi = D\varphi)_{t_2})$

証明は、おれも簡単に計算出来るので、略する。

今度は、逆に  $(D\varphi = D\varphi)_t$  は (\*) により characterization される事を示す。

定理 2  $t \longrightarrow U_t \in M_u =$  strongly conti mapping.

これを満たす あり方  $U_{t_1+t_2} = U_{t_1} \sqrt{t_1}^\varphi(U_{t_2})$  なる  $U_t$  は、

$\exists \varphi =$  weight  $st (D\varphi = D\varphi)_t = U_t$

証明 [ ~~first~~ step ]  $\overline{F_\infty} \stackrel{\text{def}}{=} B(L^2(\mathbb{R}'))$  [1] により、次の事  $U_t$  の解  $U_t$  である。

$\exists \omega =$  weight on  $\overline{F_\infty}$   $st \sqrt{t}^\omega(x) = U_t x U_t^* = (U_t f)(s) = f(s-x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$\overline{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \otimes \omega =$  weight on  $\overline{F_\infty} \otimes M \otimes M \otimes \overline{F_\infty}$

$\exists V \in (M \otimes \overline{F_\infty})_u$   $st U_t \otimes 1 = \sqrt{t}^{\overline{\omega}}(V^*)$  なる事を示す。

$I : \mathfrak{H}_\varphi \otimes L^2(\mathbb{R}') \rightarrow \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{J} \longrightarrow \mathfrak{J}(t) \otimes \mathfrak{S} \in L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi)$

により、 $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi \otimes L^2(\mathbb{R}'))$  と  $L^2(\mathbb{R}, \mathfrak{H}_\varphi)$  を同一視する。

$$W = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\varphi) \ni \xi_t \longrightarrow \pi_\varphi(U_t)\xi_t \in L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_\varphi)$$

$W =$  unitary operator  $\tau$   $IWI \in \pi(M \otimes F_\infty)$  なる事は容易に解かる。

$$\exists V: \text{unitary} \in M \otimes F_\infty \text{ s.t. } (\pi_\varphi \otimes 1)(V) = I^{-1}WI$$

$V$  が求まる事なのであることは、容易に計算出来る。

[Step II] i)  $\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\omega}(V^*xV) = \text{weight on } M \otimes F_\infty$

$$\sigma_t^\Phi(x \otimes y) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \otimes \sigma_t^\omega(y) \quad \forall x \in M, \forall y \in F_\infty$$

ii)  $a \in F_\infty, a > 0, \omega(a) < \infty$  とする。

$$\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a) \quad x \in M_+ \quad \text{とすると}$$

$\psi =$  weight on  $M$

証明 i) Lemma 1.1)

$$\begin{aligned} \sigma_t^\Phi(x \otimes y) &= V \sigma_t^\omega(V^*) \sigma_t^\omega(x \otimes y) \sigma_t^\omega(V) V^* = (u_t \otimes 1) \sigma_t^\omega(x \otimes y) (u_t^* \otimes 1) \\ &= (u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*) \otimes \sigma_t^\omega(y) \end{aligned}$$

ii)  $\forall x \in M_+, \psi(x) < \infty$

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(t) u_t dt \quad \text{とすると } \psi(b \otimes b^*) < \infty \text{ なる事を示す}$$

$$\text{但し } f \in L^1, \uparrow \in \mathcal{C}_0$$

$$\psi(b \otimes b^*) = \bar{\omega}(V^*(b \otimes b^* \otimes a)V) = \bar{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1)V)$$

[1] 1.1)

$$\bar{\omega}(V^*(b \otimes 1)(x \otimes a)(b^* \otimes 1)V) < \infty \text{ を示すには}$$

$V^*(b \otimes 1)$  が  $\sigma_t^\omega$ -analytic を示せば十分

$$V^* \int_0^1 f(t) (u_t \otimes 1) dt = V^* \int_0^1 f(t) V \sigma_t^\omega(V^*) dt = \int_0^1 f(t) \sigma_t^\omega(V^*) dt$$

$\therefore \hat{f} \in \mathcal{C}_0$  かつ  $V^*(b \otimes 1)$  は  $\mathcal{T}_+^{\bar{w}}$ -analytic

$\mathcal{H}_4 \subset \mathcal{H}_4$  であり  $\mathcal{T} \in L$  かつ  $\hat{f} \in \mathcal{C}_0$  であるから

$\mathcal{H}_4 =$  weakly dense

$\therefore \mathcal{H}_4$  - semi-finite.

\* normal, faithful  $\mathcal{H}_4 = \mathcal{E}$  は明らかだから

$\mathcal{H}_4$  は  $M \otimes \mathbb{C}$  の weight.

Step III).  $M, N$ : Neumann algebras

$\Phi =$  weight on  $M \otimes N$  と (7).

$$\mathcal{T}_+^{\Phi}(M \otimes 1) = M \otimes 1$$

$a \in N_+$   $\mathcal{H}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x \otimes a)$  は weight on  $M$  かつ  $\exists \epsilon$

$$\mathcal{T}_+^{\mathcal{H}}(x \otimes 1) = \mathcal{T}_+^{\Phi}(x \otimes 1) \quad \forall x \in M$$

証明.

Lemma 2  $\mathcal{C} \ni z \longrightarrow x(z) \in M =$  analytic

$\varphi =$  weight on  $M$ .

$\exists x \in M =$  ~~analytic~~  $\mathcal{T}_+$ -analytic

$$\mathcal{T}_z(x) = x(z)$$

$\iff$  i)  $\forall \tau_1 > 0, \exists \tau_2 > 0$  s.t.

$$|\operatorname{Im} z| < \tau_1, a \in M_{\varphi}^+ \Rightarrow \varphi(x(z) a x(z)^*) \leq \tau_2 \varphi(a)$$

$$\varphi(x^*(z) a x(z)) \leq \tau_2 \varphi(a)$$

ii)  $\forall a \in M_{\varphi}^+ \quad \begin{cases} z \rightarrow \varphi(x(z) a) \\ z \rightarrow \varphi(a x(z)) \end{cases}$  holomorphic

$$\varphi(x(z+i)a) = \varphi(a x(z))$$

Lemma の 証明 用 け 用 け ち 3

$\tau_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_t^{\bar{x}}(x \otimes 1) \quad \forall x \in M$   $\tau_t(x)$  は strongly conti one-parameter group of automorphisms

$\int \tau(t) \tau_t^{\bar{x}}(x \otimes 1) dt = 0 \quad x \in M, t \in L, \int \in (0, \infty) : \text{weakly dense in } M \otimes 1$

1)  $\tau_t$ -analytic element  $\{ \}$  は weakly dense in  $M$

$\tau_t$ -analytic element  $\{ \} \Rightarrow \forall x$

$x \rightarrow \tau_z(x)$  は Lemma 2) を 満 ち 3 3 3

$\tau_t(x) = \tau_t^{\bar{x}}(x) \quad \exists \{ \tau_t$ -analytic element  $\{ \}$  weakly dense

2)  $\tau_t(x) = \tau_t^{\bar{x}}(x) \quad \forall x \in M$

Step IV) 以上 の 事 を 未 と め る 4

$$\exists \bar{x} \quad \tau_t^{\bar{x}}(x) = u_t \tau_t^{\bar{x}}(x) u_t^*$$

$$(D\varphi : D\varphi)_t = V_t \quad a_t = u_t V_t^* \in \text{center of } M \otimes 1$$

$$a_{t_1+t_2} = a_{t_1} \cdot a_{t_2} \quad \text{1)}$$

$$\exists h \in M \text{ center of } M \quad a_t = h^{it} \quad t \geq 0$$

Lemma 1 1)  $(D\varphi(h, \cdot), D\varphi) = h^{it} = a_t$

$$\begin{aligned} \therefore (D\varphi(h, \cdot) : D\varphi) &= (D\varphi(h, \cdot) : D\varphi)(D\varphi : D\varphi) = h^{it} \cdot V_t \\ &= a_t V_t = u_t \end{aligned} \quad \text{p.e.d.}$$

β3. Def  $T(M) = \{T_0 \in R : \exists \varphi \quad \sigma_{T_0}^\varphi \equiv 1\}$

定理 3 i)  $T_0 \in T(M)$

ii)  $\forall \varphi \quad \sigma_{T_0}^\varphi = \text{inner}$

iii)  $\forall \varphi \Rightarrow \exists u = \text{unitary} \in \text{center of } M_\varphi \text{ s.t. } \sigma_{T_0}^\varphi(x) = u x u^*$

iv)  $\forall \varphi \quad \exists h \quad \text{s.t. } \varphi(x) = \varphi(h \cdot x)$

例 1.  $h \in \eta$  center of  $M_\varphi$ ,  $h \geq 0$

$$\sigma_{T_0}^\varphi = 1$$

v)  $\exists \varphi \quad \sigma_{T_0}^\varphi = \text{inner}$

i) ~ v) は同値

証明) 定理 1) より次の事は明らかである。

iv)  $\Rightarrow$  i)  $\Rightarrow$  ii)  $\Rightarrow$  v)  $\Rightarrow$  iii)

ii)  $\Rightarrow$  iii)  $\forall \varphi$  1- に対し  $\sigma_{T_0}^\varphi = \text{inner}$ ,  $\exists u \in M$  s.t.  $\sigma_{T_0}^\varphi(x) = u x u^*$

$\varphi$  は  $\sigma_{T_0}^\varphi$ -invariant であるから  $\varphi(u x u^*) = \varphi(x) \quad \forall x \in M_+$

$$\therefore \eta_\varphi u \subset \eta_\varphi \quad \eta_\varphi u^* \subset \eta_\varphi$$

$$\therefore u M_\varphi \subset M_\varphi \quad M_\varphi u \subset M_\varphi,$$

$$\forall x \in M_\varphi \quad \varphi(u x) = \varphi(x u)$$

$$[1] \text{ 1- 1) } u \in M_\varphi \quad \text{s.t. } \sigma_{T_0}^\varphi(x) = u x u^* = x \quad \forall x \in M_\varphi$$

1- 1),  $u \in \text{center of } M_\varphi$

iii)  $\Rightarrow$  iv)  $u = \text{implement } \sigma_{T_0}^\varphi$

$h \in \eta$  center of  $M_\varphi$ ,  $h \geq 0$

$$u = h^{-1} T_0$$



$$4 \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(h.)$$

Lemma 1 より  $\sigma_T^4(x) = h^* \sigma_T^4(x) h^{-1}$

$$\therefore \sigma_{T_0}^4(x) = x$$

今まで知られている Kallman [3], Takesaki [2] 等の結果を使つて次の様な事がわかる。

定理 4 i)  $M$ : semi-finite  $\Rightarrow T(M) = \mathbb{R}$

ii) 特に  $M^*$ : separable ならば

$$M \text{ semi-finite} \iff T(M) = \mathbb{R}$$

§ 4

以下では 具体的な  $M$  に関して  $T(M)$  を計算する。

I)  $M = \bigotimes_{v=1}^{\infty} (M_v, \varphi_v)$   $M_v$ : factor  $\varphi_v$ : state

= 定理 5  $T_0 \in T(M) \iff$  i)  $\bigcap T(M_v) \ni T_0$

$$\text{ii) } \sigma_{T_0}^{\varphi_v}(x) = u_v x u_v^*$$

$$\Rightarrow \sum_{v=1}^{\infty} |\varphi_v(u_v)| < \infty$$

証明 ( $\Rightarrow$ ) まず Kallman [3] の結果を述べておく。

$$d_1 = d_1, d_2 = M_1 \otimes M_2 \text{ automorphism: inner} \iff d_1 = \text{inner} \quad 1, 2$$

NS construction により  $\varphi_v(x) = (x \Omega_v, \Omega_v)$  として

以下では  $M = \bigotimes_{v=1}^{\infty} (M_v, \Omega_v)$  について論じる,  $\varphi = \bigotimes_{v=1}^{\infty} \varphi_v$  とすると

$$\sigma_T^{\varphi}(x) = \bigotimes_{v=1}^{\infty} \sigma_T^{\varphi_v}$$

なる事と Kallmann の結果を使つて

$$T_0 \in T(M) \implies T_0 \in \bigcap_{v=1}^{\infty} T(M_v) \quad \text{は明らかである。}$$

ii)  $u = \text{implement } \tau_{T_0}^{\psi}$

$\{ \prod_{v \in J} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v \otimes_{\mathbb{R}} \prod_{v \in J} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v : J \text{ finite set, } \lambda_v \in M_{\mathbb{R}} \} = \text{dense in } \prod_{v \in J} (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R})$

$\exists J_0 = \text{finite set } C = | (u_{v \in J_0} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \prod_{v \in J_0} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v \otimes (\prod_{v \in J_0} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) ) | \neq 0 \dots (1)$

$J_0 \subset J = \text{finite } \tau_{T_0}^{\psi} = \prod_{v \in J} \otimes_{\mathbb{R}} \tau_{T_0}^{\psi_v} \otimes_{\mathbb{R}} \prod_{v \in J} \otimes_{\mathbb{R}} \tau_{T_0}^{\psi_v}$

K all mean の結果に依り、 $\exists u_v = \text{implement } \tau_{T_0}^{\psi_v} \quad v \in J$

$V_J = \text{implement } \otimes_{v \in J} \tau_{T_0}^{\psi_v}$ ,  $\exists M \neq \text{factor to } \mathbb{R}$

よ)  $\exists \lambda_J \in \mathbb{C}, u = \tau_{\lambda_J} (\prod_{v \in J} \otimes_{\mathbb{R}} u_v) \otimes V_J$

ii) よ)  $0 < C = \prod_{v \in J_0} | (u_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \lambda_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) | | (V_J \otimes_{\mathbb{R}} \otimes_{v \in J} \Omega_v, \otimes_{v \in J} \Omega_v) | \prod_{v \in J/T_0} | (u_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \lambda_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) |$

$| (V_J \otimes_{\mathbb{R}} \otimes_{v \in J} \Omega_v, \otimes_{v \in J} \Omega_v) | \leq 1, \prod_{v \in J/T_0} | (u_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \lambda_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) | \leq 1$  よ)

$\prod_{v \in J/T_0} | (u_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \lambda_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) |$  Converge as  $J/T_0 \uparrow \infty$

$\therefore \sum | 1 - | (u_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v, \lambda_v \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_v) | = \sum | 1 - | \varphi_v(u_v) | | < \infty$

( $\Leftarrow$ ) 同様  $\leq 0$ . e.e.d

特に  $M$  の I.T.P.F.I. によるこの結果を使うと

$M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (M_n \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_n) \quad \text{Sp}(M_n \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_n) = \{ \lambda_n, \bar{\lambda}_n \}$

$$h_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_n(x) = (x \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_n, \Omega_n) = \tau_V(h_n x)$  よ)  $\tau_T^{\psi}(x) = h^{-1} x h^{-1}$

$T_0 \in T(M) \iff \sum | 1 - | \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n^{1 + \psi(T_0)} | < \infty$

5)  $\text{Sp}(M_n \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_n) = \{ p, \bar{p} \}$  to s.t.

$$T(M_n) = \{ n \tau_n \mid n \in \mathbb{Z} \} \quad \exp(-2\tau/T_0) = 1$$

$G_2 = 2$ -generator  $\exists$  free group  $\in \mathbb{Z}$ .  $U(G_2) \in \mathbb{Z}$ /regular

rep. よ)  $\exists$   $\mathbb{Z}$ -factor  $\in \mathbb{Z}$ .

$$T(U(G_2) \otimes M_*) = T(H) \quad (*)$$

non-type-finite III-type-factor が非可算無限個の存在の証明となる

II)  $\mu = \sigma$ -finite measure on  $\Omega$ .

$\mathcal{G}$ : bijection, bimeasurable transformation of  $\Omega$ .

$\mathcal{G}$  は  $\Omega$  に  $\mu$  に関して free に act してゐるとする

$$L^\infty(\Omega, \mu) \ni \forall f, \quad s \circ f \stackrel{\text{def}}{=} f \circ s^{-1} \quad s \in \mathcal{G}$$

$W^*(\mathcal{G}, \Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}$  と  $L^\infty(\Omega, \mu)$  の cross product.

定理 6  $T_0 \in T(W^*(\mathcal{G}, \Omega)) \stackrel{\text{def}}{=} \exists \nu = \text{pos. meas. on } \Omega$

$$\text{st } \nu \sim \mu, \quad (d\nu/d\mu)(\omega) \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}, \quad \rho = \exp(-2\pi i / T_0)$$

$$\forall s \in \mathcal{G}, \quad \omega \in \Omega$$

Proposition 1

$N$ : semi-finite subalgebra of  $M$ .

$E: M \rightarrow N$ : normal faithful conditional expectation

$$\mathcal{K}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{u = E(xu^*) = u(E(x))u^*, \forall x \in M\} \subset M_+$$

$$C = N' \cap M \subset N,$$

$\mathcal{G}$ :  $\mathcal{K}(E)$  の sub group  $\tau$   $M = \langle N, \mathcal{G} \rangle''$  とする

$T$ : trace on  $N$

$$\forall v \in \mathcal{G} \quad \exists \rho_v \in \mathcal{K}(E) \text{ st } T(vxv^*) = T(\rho_v \tau(x)) \quad \forall x \in N_+$$

以下の i) ~ iii) は同値

$$i) \quad T \in T(H)$$

$$\text{ii) } \tau = \text{trace}, \exists V \in \mathcal{U} \text{ st } \forall u \in \mathcal{G} \quad u^* V u V^* = P_{u, \tau}^{\tau}$$

$$\text{iii) } \tau = \text{trace}, \text{ st } P_{u, \tau}^{\tau} = 1 \quad \forall u \in \mathcal{G}.$$

証明済

Proposition 2. [Zeller Meier [7]]

 $\mathcal{A}$  = Neumann algebra $\mathcal{G}$  = discrete group of automorphisms on  $\mathcal{A}$  $M = W^*(\mathcal{G}, \mathcal{A})$  ( $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{A}$  の cross product)

$$\text{i) } I: \mathcal{A} \longrightarrow (I(a))_{t, u} = \delta_t^u \tau^{-1} a \in M$$

 $I: \mathcal{A} \longrightarrow I(\mathcal{A}) = N \subset M$  = isomorphism

$$\text{ii) } E: \mathcal{A} \in M \longrightarrow (I(a)_{t, u}) = \text{normal fact. conditional expectation on } N$$

$$\text{iii) } \forall s \in \mathcal{G} \xrightarrow{U_s} U_s \in M. (U_s)_{t, u} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_t^{s^{-1}u} = \text{isomorphism}$$

$$\pi(E) \supset \{ U_s = s \in \mathcal{G} \} = \mathcal{G}. \quad \mathcal{G} \cong M = \{ N, \mathcal{G} \}'$$

$$\text{iv) } s \in \mathcal{G} \quad x \in \mathcal{A}. \quad U_s I(x) U_s^* = I(s \cdot x)$$

証明済

定理の証明

$$\forall \tau = \text{trace on } N = L^\infty(\Omega, \mu) \text{ 1-} \tau \text{ (7)}$$

$$\exists \nu = \text{measure on } \Omega \text{ st } \nu \sim \mu$$

$$\tau \circ (I(\cdot)) = \int f(\omega) d\nu(\omega) \quad \forall f \in L^\infty(\Omega, \mu)_+$$

$$\forall x \in N_+, \forall s \in \mathcal{G} \text{ 1-} \tau \text{ (7). } \tau \circ (U_s^* x U_s) = \tau \circ (s \cdot x) = \int (s \cdot x)(\omega) d\nu(\omega)$$

したがって, Proposition 2) iii) により.

$$\exists \tau = \text{trace on } N. \quad \text{s.t.} \quad \int_{S, \nu}^{\tau_0} (\omega) = 1$$

$$\tau(U_s X U_s^*) = \int X(\omega) d(\tau^{\nu} \nu)(\omega) = \int f_{S, \nu}(\omega) X(\omega) d\nu(\omega) \quad \forall X \in L^{\infty}(\Omega, \mu)_+$$

$$f_{S, \nu}(\omega) = \left[ \frac{d\tau^{\nu}}{d\nu} \right](\omega) \quad \text{p.e. d.}$$

### Reference

- [1] Takesaki - Pedersen: The Radon-Nikodym-theorem for Von Neumann algebras (to appear)
- [2] Takesaki: Tomita's theory and its application.
- [3] Kallman: Groups of inner automorphism of Von Neumann algebras. Jour. of fun. Analysis '71'
- [4] Kallman: A generalisation of free action.  
Duke. Math. J. 35, 1989
- [5] A. Connes: Doctor thesis
- [6] A. Connes: Groupe modulaire d'une algebras de von Neumann. C.R. Acad Sci '72
- [7] G. Zeller Meier: Produit croisé d'une  $C^*$ -algebra par un groupe d'automorphismes. J Math pure et appl '68