数理解析研究所講究録
178巻 1973年 47-52

Moore graphs について

東大 理 伊藤達郎
東大 理 坂内英一

有限Moore graphsの分類がこの講演の目標であり、これについて以下のような解決を得たので報告します。

1° グラフ $\mathcal{G}$ が Moore graph of type (d, k) であるとは、次の条件 1)〜4) が成り立つことと定義する。

1) $\mathcal{G}$ は undirected graph (i.e., グラフの lines は方向を持たない.)

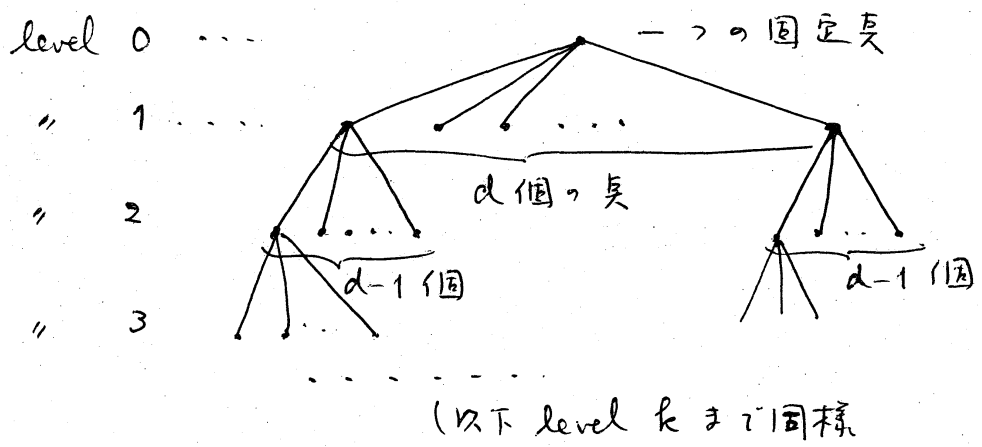
2) $\mathcal{G}$ は regular で valence (= degree) が d (i.e., 各点から出る lines の個数は一定 $= d$).

3) $\mathcal{G}$ の diameter は k (i.e., $\mathcal{G}$ の任意の2点は高々 k 本の lines を通じて結ぶことが出来. 更に $\mathcal{G}$ の2点で $(k-1)$ 本以下の lines では結べないようなものが存在する.)

4) $\mathcal{G}$ は $1 + d\sum_{r=1}^{k}(d-1)^{r-1}$ $(= n(d, k) = n$ とおく$)$ 個の点を持つ。

注： $n(d, k)$ は 1), 2), 3) の条件をみたす点の個数としての可能な最大値である。

注： $\mathfrak{G}$ が Moore graph であれば、$\mathfrak{G}$ の点を任意に一つ固定した時、次のように表わされる。



注： valence $d = 2$ の Moore graph は多角形であり、そのようなものは任意の diameter k に対して存在する。以下そのようなものを trivial な Moore graph と呼び、以下では non-trivial な Moore graph のみを考える。

2° 一般にどのような Moore graph が存在するかは未解決であったと思われる。

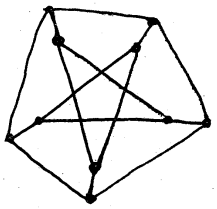
diameter k が 2 と 3 の場合については、A. J. Hoffman and R. R. Singleton : On Moore graphs with diameters 2 and 3, I.B.M. J. Res. Develop. 4 (1960), 497–504. により次の形でほぼ解決されている。

I　$k=2$ の場合.

1) $d>2$, $d\neq 3, 7, 57$ $\Longrightarrow$ $(d, 2)$ 型 Moore graph は存在しない.

2) $(3, 2)$ 型 Moore graph は一意的に存在する。

i.e.,



$(3, 2)$ 型 Moore graph
(Peterson graph)

3) $(7, 2)$ 型 Moore graph は一意的に存在する.

4) $(57, 2)$ 型 Moore graph に関しては. 存在. 一意性共に未定.

II. $k=3$ の時.

$d>2$ $\Longrightarrow$ $(d, 3)$ 型 Moore graph は存在しない.

3° 我々の得た結果は次の通りである.

<u>定理</u>　$k\geqq 4$ の non-trivial (i.e, $d>2$) Moore graph は存在しない.

<u>系</u>　rank $k+1$, subdegree $1, d, d(d-1), \cdots d(d-1)^{k-1}$ なる ~~[illegible]~~ primitive permutation group (G, Ω) は. $k\geqq 4$ ならば. $|\Omega|=2k+1$ 文字上に働く. 位

数 $2(2k+1)$ の2面体群に限る．ここで $2k+1$ は素数．

<u>定理の証明の概略</u>　基本的な idea は次の2論文（及び先に引用した Hoffman-Singleton の論文）による．

- W. Feit and G. Higman : The non-existence of certain generalized polygons, J. of Algebra 1 (1964), 114-131.
- D. G. Higman : Intersection matrices for finite permutation groups, J. of Algebra 6 (1967), 22-42.

更に次の事実が我々の証明の基礎になっている．

- グラフの incidence matrix A の固有値の間の共役性（$\mathbb{Q}$ 上の Galois 群の作用による）が固有値の（A における）multiplicity を保つことから．A の minimal polynomial の因数分解（$\mathbb{Z}[x]$ における）の様子がわかり、このことが Moore graph の存在と矛盾するようになる．

<u>もう少し詳しく証明を steps を追って述べる</u>（以下 (d, k) 型 Moore graph の存在を仮定し、A をその incidence matrix とする．）

1) A の minimal polynomial は $(x-k)F_k(x)$ である．ここで $F_k(x)$ は $F_0(x)=1$, $F_1(x)=x+1$, $F_{i+1}(x)=xF_i(x)-(d-1)F_{i-1}(x)$ で inductive に定義される k 次多項式である．

2) $d-1=s^2$, $s>0$, $x=2s\cos\varphi$ とおくと．

$$F_k(x) = \frac{s^k}{\sin\varphi}\left\{\sin(k+1)\varphi + \frac{1}{s}\sin k\varphi\right\}$$

3) $\theta_0 = d, \theta_1, \cdots, \theta_k$ (これらは全て実の単根) を A の固有値とすると. θ_i の multiplicity $m(\theta_i)$ は

$$\frac{m(\theta_i)}{n} = \frac{-2\sin\varphi_i \sin k\varphi_i}{\left(1-\frac{2s}{1+s^2}\cos\varphi_i\right)\left\{(k+1)\cos(k+1)\varphi_i + \frac{k}{s}\cos k\varphi_i\right\}}$$

であらわされる. ただし $\theta_i = 2s\cos\varphi_i$, $n = n(d, k)$ とおく. (ここで Feit-Higman, Higman の idea を利用する.)

4) d, k 共に十分大の時

i) $m(\theta_1) < m(\theta_i)$ for $\forall i = 2, \cdots, k-1$

ii) $m(\theta_k) < m(\theta_i)$ for $\forall i = 2, \cdots, k-1$

iii) $-1 < \theta_1 + \theta_k < 0$

(このあたりの計算は極く初等的であるが, かなり複雑である.)

が得られる. 従って $F_k(x)$ は $(x-\theta_1)(x-\theta_k)$ を $\mathbb{Z}[x]$ において因数として持たなければならないが, これは矛盾である.

5) d, k のいずれかが小さい時は, 4) の方法を少し modify して矛盾が容易に導いき出される。

注: ここでの証明は, 他の広いクラスの regular graphs (特に群が自己同型群として働らいている場合に有効) の

非存在の証明に使えます。今までは、このような証明の際には、固有値のmultiplicityが整数になるという事実しか利用していなかったことに比べると、ここでの方法は強力です。

注：なお(57, 2)型のMoore graphの存在だけは、依然未解決のままです。

Remark. 1) この原稿は1972年春の数学会年会（応用数学分科会abstract）の原稿と全く同じです。

2) なお、全く同じ結果が、R. Damerell (University of London) によっても得られていることがわかりました。（両方の仕事は全く独立である。）両方の証明は、incidence matrixの固有値とそのmultiplicityに注目する点では同じであるが、いくつかの点では異なる。時間があれば、Damerellの証明法にもふれる予定である。彼の論文はProc. Cambridge Phil. Soc.に、我々の論文はJ. Fac. of Sci. Univ. Tokyoに、いずれも近刊予定である。

3) なお、時間があれば、T. Itoによる(strongly regular graphs with) maximal diameterの ~~場合の~~ incidence matrixの固有値のmultiplicityの簡単な計算法、および Noda-Bannaiによる Fisherの不等式（2r-designに対する）のintersection matrixのidealを用いた証明についても述べる。