Bolanced 2^m Fractional Factorial Design & Yn (", 7

国山理大 白倉 暉弘 広大 理 来田 正秀 広大 理 山本 純恭

81. 序

Balanced any の概念す Chaknawanti[1]によってpartially balanced anayとして導入され、最近 2m fractional factorial (f.f.) design の重要な subclass として注目されるようになった。それは orthogonal anayを用いる design のように、母数の推定値が互に独立という性質はもにないまでも、推定値の分散行列が比較的简単な構造をもっという実と、制約条件が弱いという実で、存在の可能性が広いという利美をもっからである。

Fractional factorial design には、その"よさ"を測る一、の尺度として分解能(resolution)がある。いわゆる主効果、2因子交互作用、3因子交互作用等が、どの程度分

解して推定することが可能かということである。たとえば、 necolution ∇ の decign とは、2因子交互作用までが互に 交絡しない decign のことである。

Balanced 2^m f. f. design Ehぐる最近の研究は, Sninaetana, Chopna [4][5]等がある。この研究をいぐる重要な句題を要約すると,

- ②, Bolanced design の Information 行列M, とくに その逆行列M-1(母数の推定値の分散行列)の**固有値**が一般的 に次まるか?
- ③, Balanced design の存在条件と構成方法は? 等がある。

問題②については, resolution ▼(drength 4)の場合に

ついて Shimaetana, Chapia [5] が解決した。白倉は、同様の方法により revolution II (atrength 6) の場合について求めた。最近、われわれば、これらの方法を改良し、リレーションシップ代数の構造分析を通じて、かなり直接的かつ一般性のある求め方を見出した。詳細は別途発表の予定である。

52. Balanced away の定義

である。

 $2 < 1 = M_0 = M_1 = \cdots = M_t = \lambda \quad n \times \stackrel{*}{\underset{\sim}{\stackrel{\sim}{\sim}}}, \quad T \text{ is size } n, \quad \text{st-}$ rength t, constraints m, index λ n orthogonal array $2 \cdot 1 \cdot 3$.

[B-anayの存在]

 $\Omega(m, k)$ を weight k の (0, 1) べつトルを (製)値すべて並べてできる $m \times (\mathbb{R})$ 行列とする。 $\Omega(m, k)$ をそれぞれ S_k 個 $(k=0,\dots,m)$ 横に並べてできる $m \times \{\frac{m}{k=0}S_k(\mathbb{R})\}$ 行列を下とする。そのとき、 下は thength to constraints m, index $M_i = \sum_{k=0}^m S_k(\frac{m-t}{k-i})$ $\{i=0,1,\dots,t\}$ の B- arrayとする。

53. etrength t, constraints $m \le t + 3$ の B-anayの存在 t > 5 の t >

記号として、 $\lambda(T)$ を下の列べりトルでその要素がすべて1であるべりトルの個数。 $T_{Q}(l=1,2,3)$ を (t+l)Xのの(0,1) - 行列とする。 $\nu^{(l)}(i_1,i_2,\dots,i_k)$ を T_{Q} の列べりトルで i_1 , i_2 , i_2 , i_3 を i_4 を i_4 の他はすべて1であるべりトルの個数とする。

「定理 1] $d^{(i)}=\lambda(T_i)$ とする、そのとき下が strength t, index set (M_i, \dots, M_t) の B-array であるための必要† 分条件は、

i) d⁽¹⁾ 20 なる整数

$$(i)$$
 $\forall i \leq d^{(i)} \leq \forall i \geq 1$

$$\gamma_{11} = \max_{1 \le 2r \le t+1} \left(\sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q+1} M_{t-(2r-1)+q} \right)$$

$$\psi_{12} = \min_{1 \le 2r+1 \le t+1} \left(\sum_{q=0}^{2r} (-1)^q \mathcal{U}_{t-2r+q} \right)$$

構成方法として、

$$\mathcal{V}^{(1)}(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{k=0}^{k-1} (-1)^k \mathcal{M}_{t-(k-1)+q} + (-1)^k \mathcal{M}^{(1)}$$

とすればよい。

「定理2」 $d^{(2)}=\lambda(T_2)$, $d^{(2)}_*=\lambda(T_2)$ とする,ただし T_2 : は T_2 のi行を除いてできる $\{t+1\}$ Xn 行列。そのとき T_2 が etnength t, index set $\{M_0,\cdots,M_t\}$ の B-among であるための 父妻+分条件は,

- (i) d(a), d(i) ≥ 0 なる整数 i=1..., t+2
- (ii) $\psi_{ii} \leq d_{i}^{(i)} \leq \psi_{i2}$
- (iii) $\gamma_1 \leq d^{(2)} \leq \gamma_{22}$

となることである。ただし、

$$\frac{1}{1} = \max_{1 \leq 2r \leq t+2} \left\{ \sum_{k=0}^{2r-1} (-1)^{k} \mathcal{H}_{t-(2r-1)+k} + \max_{(i_1, \dots, i_{2r}) \in \Omega_2} \left(\sum_{k=1}^{2r} d_{i_k}^{u'} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{1} = \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+2} \left\{ \sum_{k=0}^{2r} (-1)^{k} \mathcal{H}_{t-2r+k} + \min_{(i_1, \dots, i_{2r+1}) \in \Omega_2} \left(\sum_{k=1}^{2r+1} d_{i_k}^{u} \right) \right\}$$

$$\left(\vec{l} = \vec{l} \quad \Omega_2 = \left\{ 1, 2, \dots, t+2 \right\} \right) .$$

構成方法として

$$\mathcal{V}^{(2)}(i_1,\dots,i_k) = \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{q+1} \mathcal{V}_{t-1}(k-1) + \mathcal{V}_{q-1}(-1)^{k} \sum_{q=1}^{k} d_{i_q}^{(1)} + (-1)^{k} d^{(2)}$$

$$\geq \mathcal{T}_{t+1}(i_1,\dots,i_k) = \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{q+1} \mathcal{V}_{t-1}(k-1) + \mathcal{V}_{$$

[定理3] $d^{(3)}=\lambda(T_3)$, $d^{(2)}=\lambda(T_3i)$, $d_{i,j}=\lambda(T_3i)$)とする, 下だし, Tsilt Tsのi行を除いてできる (t+2)× 州行列, Tsij はTsのi, j行を除いてできる (t+1)× 九行列。そのときTsが etrength t, index set (M_0, \dots, M_t) の B-amay である E めの父要十分条件は,

- (i) du, du, di,j ≥ o なる整数, i,j=1,...,t+3;i<j
- (ii) $\psi_1 \leq dij \leq \psi_{12}$
- $(||||) \quad \psi_{21}^{(i)} \leq d_{i}^{(2)} \leq \psi_{22}^{(i)}$
- (iv) $\psi_{31} \leq d^{(3)} \leq \psi_{32}$

となることである。ただし、

$$\psi_{21}^{(i)} = \max_{1 \leq 2r \leq t+2} \left\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q} \right\} M_{t-(2r-i)+q} + \max_{(j_{1}, \dots, j_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\substack{n=1 \ i \neq j_{n}}}^{2r} d_{i}, j_{n} \right) \right\}$$

$$\psi_{21}^{(i)} = \min_{1 \leq 2r+1 \leq t+2} \left\{ \sum_{q=0}^{2r} (-1)^{q+1} \right\} M_{t-2r+q} + \min_{(j_{1}, \dots, j_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i}, j_{\alpha} \right) \right\}$$

$$\psi_{31}^{(i)} = \max_{1 \leq 2r+1 \leq t+3} \left\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q+1} {q \choose 2} M_{t-(2r-1)+q} + \max_{(i_{1}, \dots, i_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r} d_{i} - \sum_{\alpha=1}^{2r-1} d_{i} \right) \right\}$$

$$\psi_{32}^{(i)} = \max_{1 \leq 2r+1 \leq t+3} \left\{ \sum_{q=0}^{2r} (-1)^{q} {q \choose 2} M_{t-2r+q} + \min_{(i_{1}, \dots, i_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} - \sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} \right) \right\}$$

$$\left\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q} {q \choose 2} M_{t-2r+q} + \min_{(i_{1}, \dots, i_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} - \sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} \right) \right\}$$

$$\left\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q} {q \choose 2} M_{t-2r+q} + \min_{(i_{1}, \dots, i_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} - \sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} \right) \right\}$$

$$\left\{ \sum_{q=0}^{2r-1} (-1)^{q} {q \choose 2} M_{t-2r+q} + \min_{(i_{1}, \dots, i_{2r+1}) \in \mathcal{Q}_{3}} \left(\sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} - \sum_{\alpha=1}^{2r+1} d_{i} \right) \right\}$$

構成方法として、

 $\mathcal{V}^{(3)}(i_1,\ldots,i_R) = \sum_{g=0}^{k-1} (-1)^g \left(\frac{g}{2}\right) \mathcal{U}_{t-(k-1)+g} + (-1)^k \sum_{\alpha \neq g}^{k} d_{i\alpha},i_g - (-1)^k \sum_{\alpha = 1}^{k} d_{i\alpha}^{(2)} + (-1)^k d_{i\beta}^{(3)}$ $? † \mathcal{H} : J'' J : 1$

[証明] T3がB-anayであるとすると、T3i, T3ij もそれぞれ m=t+2, m=t+1, のB-anayであり、(定理1,2)よりdi,j,dii)を満さんずならわ。よ、てながB-anayである

ということす。(ii)、(iii)を満す非負整数 di,j,di? に対してつぎの条件を満す非負整数 y⁽³⁾(i,,...,i_k)が存在することと同値である。

$$v^{(3)}(i_1) + d^{(3)} = d^{(2)}_{i_1}$$

$$v^{(3)}(i_1, i_2) + v^{(3)}(i_1) + v^{(3)}(i_2) + d^{(3)} = d_{i_1}, i_2$$

$$v^{(3)}(i_1, i_2, i_3) + v^{(3)}(i_1, i_2) + v^{(3)}(i_1, i_3) + v^{(3)}(i_2, i_3) + v^{(3)}(i_1) + v^{(3)}(i_2) + v^{(3)}(i_3)$$

$$+ d^{(3)} = M +$$

4 S R S t + 3 に対して,

$$\begin{split} &\mathcal{V}^{(3)}(i_1,i_2,i_3,i_4,\ldots,i_R) + \mathcal{V}^{(3)}(i_1,i_2,i_4,\ldots,i_R) + \mathcal{V}^{(3)}(i_1,i_3,i_4,\ldots,i_R) \\ &+ \mathcal{V}^{(3)}(i_2,i_3,i_4,\ldots,i_R) + \mathcal{V}^{(3)}(i_1,i_4,\ldots,i_R) + \mathcal{V}^{(3)}(i_2,i_4,\ldots,i_R) \\ &+ \mathcal{V}^{(3)}(i_3,i_4,\ldots,i_R) + \mathcal{V}^{(3)}(i_4,\ldots,i_R) = \mathcal{M}_{t-(R-3)} \end{split}$$

上の式をとくと,

 $\mathcal{V}^{(3)}(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{q=0}^{k-1} (-1)^{\delta} {\binom{9}{2}} \mathcal{U}_{t-1} + (-1)^{k} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{F} \\ \alpha < \beta}}^{k} d_{i\alpha,i_{\beta}} - (-1)^{k} \sum_{\alpha=1}^{k} d_{i\alpha}^{(2)} + (-1)^{k} d_{i\alpha}^{(3)},$ $(1 \le k \le t+3).$

ν⁽³⁾(i,...,i_k) ≥ 0 は (iV) と同値である。

[例]

= 0 $\sqrt{1}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$, m=5, index set (2,3,2) 0 B-anay

である。この行列の列として、列ベクトル(0,...の)、(1,...、,1)をつけかえれば、index $\lambda=3$ の orthogonal array y なる。

References

- [1] Chakravarti, I. M. (1956). Fractional replication in asymmetrical factorial designs and partially balanced arrays. Sankhya 17 143~164
- [2] Srivastava, J.N. (1970). Optimal balanced 2^m fractional factorial designs. S.N. Roy Memorial Volume. Univ. of North Carolina. and Indian Statistical Institute 689-706
- [3] Srivastana, J. N. (1972). Some general existence condition for balanced array of strength t and 2 symbols. Jour. Comb. Th., 13
- [4] Srivastava, J. N. and Chopra, D. V. (1971).

 Optimal balanced 2^m fractional factorial designs $m \le b$. Technometrics, Vol 13 No 2 257~269
- [5] Simuetawa, J. N. and Chopera, D. V. (1971).

 On the characteristics routs of the information

- matrix of 2^m balanced factorial designs of resolution V, with applications. Ann. Math. Statist. 42 722~734
- [6] 来田, 白倉, 山本. 2^m balanced fractional to tarial design 1= 117. 「実験計画法」に関するシンボジューム予稿集、1973, 1/11~12. 広島大学において