数理解析研究所講究録
179巻 1973年 116-126

1次元－2状態－スコープ3テセレイションオートマトンの完全性について

東北大学　丸岡 章　木村 正行

1. はしがき

本論文は，Yamada，Amoroso[1]により提起された1次元－2状態－スコープ3テセレイションオートマトンの完全性の問題を肯定的に解決するものである.

〔定義〕[1] 1次元－q状態－スコープnテセレイションオートマトン（以下TAと書く）は次の4-tupleで定義される.

$$(A,\ E^1,\ X,\ T)$$

ここで，$A=\{0,1,\cdots,q-1\}$：個々のセルの状態の集合.

E_1：すべての整数からなる集合. E^1の元はセルの位置を表わす.

$X=((-1),(0),\cdots,(n-2))$：neighborhood index.

T：任意の有限configurationを有限configurationに対応させるような全域関数からなる集合.

configurationとは写像$c: E^1 \to A$である. 全域関数τ

$\tau: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は局所関数 $\sigma: A^n \to A$ より一意的に定まる(1). ここに $\mathcal{C}$ はすべての configuration よりなる集合である. $c(i) \neq 0$ となる i が有限個しか存在しないとき, configuration c は有限であるという. 任意の $c \in \bar{\mathcal{C}}$ に対して, $c\tau \in \bar{\mathcal{C}}$ であるための必要十分条件は τ を定義する局所関数を σ とするとき, $\sigma(0, \cdots, 0) = 0$ となることである. ここで, $\bar{\mathcal{C}}$ はすべての有限 configuration よりなる集合である. $\bar{T}$ を $\sigma(0, \cdots, 0) = 0$ となる局所関数より定義されるすべての全域関数からなる集合とする.

c_1 と c_2 が shift-等価であるとは, すべての $i \in E^1$ に対して $c_1(i+k) = c_2(i)$ となるような $k \in E^1$ が存在することである. $\bar{\mathcal{C}}$ 上の shift-等価な類を有限パタン(または単にパタン)という. configuration c を含むパタンを $[c]$ で表わす.

$c(0) = a$ ($a \neq 0$) かつすべての $i \neq 0$ に対して $c(i) = 0$ となる configuration を原始 configuration といい, c_p と書く. 1次元-q 状態-スコープ n TA を $\mathcal{A}^{(q,n)}$ で表わす. $\mathcal{A}^{(q,n)}$ において, $c \in \bar{\mathcal{C}}$ に対して $\bar{T}$ に属する全域関数を有限回適用して c' が得られるとき, $\mathcal{A}^{(q,n)}$ は c から c' を生成するという.

$$\mathcal{A}^{(q,n)}(c_p) = \{[c] \mid \mathcal{A}^{(q,n)} が c_p から c を生成する\}$$

とおく．1次元－q状態TAのすべての有限パタンの集合を $\mathcal{P}^{(q)}$ と表わす．$\mathcal{A}^{(q,n)}$ に関する完全性の問題とは $\mathcal{A}^{(q,n)}(c_p) = \mathcal{P}^{(q)}$ が成立するかどうかという問題である．任意の $c \in \overline{C}$ に対して，$c\xi = c_p$ となる全域関数の系列 $\xi \in \overline{T}^*$ が存在することは容易に確められるから，完全性の問題は任意の $c_1, c_2 \in \overline{C}$ に対して $c_1\eta = c_2$ となる $\eta \in \overline{T}^*$ が存在するかどうかという問題になる[2]．

Yamada, Amoroso は次の定理1，2を証明し，$\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ が成立するかどうかは未解決の問題として残した[1]．

［定理1］ $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) \subsetneq \mathcal{P}^{(2)}$

［定理2］ $\mathcal{A}^{(2,4)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$

また，久保，木村は次の定理3を証明した[3]．

［定理3］ $\mathcal{A}^{(3,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(3)}$

本論文は，$\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ が成立することを証明するものである[4]．

2. Decomposition Lemma

$\mathcal{A}^{(2,3)}(c_p) = \mathcal{P}^{(2)}$ の証明の大部分は文献(1)のdecomposition lemmaの拡張と考えられる補題12の証明についやされる．この章は，1次元－2状態－スコープ3 TAに関するものである．したがって，$X = ((-1), (0), (1))$，$A = \{0, 1\}$ である．

	σ_{180}	σ_{166}
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	0	0
100	1	0
101	1	1
110	0	0
111	1	1

左に示される局所関数σ_{180}, σ_{166}で定義される全域関数τ_{180}, τ_{166}は, $\overline{C}$から$\overline{C}$への写像とみたとき全単射となることを確めることができる. $c_1\tau_{166} = c_2$, $c_3\tau_{180} = c_4$ の関係にあるc_1, c_3をそれぞれc_2, c_4より決定するのに次に述べるframingの概念を導入すると便利である.

$A_1 = \{101^j00^i \mid j \geq 1, i \geq 0\}$, $A_2 = \{1000^i \mid i \geq 0\}$, $A_3 = \{110^i \mid i \geq 0\}$ とおく. $c \in \overline{C}$ のA_1, A_2, A_3による左からのframingとは次の条件を満たす整数を要素とする2-tupleの系列$((t_1, e_1), \cdots, (t_k, e_k))$ $(k \geq 1)$である.

(i) $c \in \overline{C}$の最左端の1 (1_Lと略記する), 最右端の1 (1_Rと略記する)の座標をそれぞれl, rとするとき, $t_1 = l$, $e_k = r+2$ が成立する.

(ii) $t_l \leq e_l$, $l = 1, \cdots, k$.

(iii) $e_l + 1 = t_{l+1}$, $l = 1, \cdots, k-1$.

(iv) $1 \leq l \leq k$ なる任意のlに対して, $c(e_l) \cdots c(t_l) \in A$ となる $A \in \{A_1, A_2, A_3\}$が存在する.

同様に右からのframingを次のように定義する.

$B_1 = \{0^i01^j01 \mid j \geq 1, i \geq 0\}$, $B_2 = \{0^i001 \mid i \geq 0\}$, $B_3 = \{0^i11 \mid i \geq 0\}$ とおく. $c \in \overline{C}$ のB_1, B_2, B_3による右

からの framing とは次の条件を満たす整数を要素とする2-tuple の系列 $((e_k, t_k), \cdots, (e_1, t_1))$ である($k \geq 1$).

(i) $c \in \bar{C}$ の 1_L, 1_R の座標をそれぞれ l, r とするとき, $t_1 = r$, $e_k = l-2$ が成立する.

(ii) $e_\ell \leq t_\ell$, $\ell = 1, \cdots, k$.

(iii) $t_\ell + 1 = e_{\ell-1}$, $\ell = 2, \cdots, k$

(iv) $1 \leq \ell \leq k$ なる任意の ℓ に対して, $c(e_\ell)c(e_\ell+1)\cdots c(t_\ell) \in B$ となる $B \in \{B_1, B_2, B_3\}$ が存在する.

これらの framing が一意的に定まることは容易に確められる. また, $c'\tau_{166} = c$ が成立し, c の A_1, A_2, A_3 による左からの framing を $((t_1, e_1), \cdots, (t_k, e_k))$ とするとき,

$c(t_\ell) \cdots c(e_\ell) = 101^j00^i$ なら, $c'(t_\ell) \cdots c'(e_\ell) = 01^{j+2}0^i$,

$c(t_\ell) \cdots c(e_\ell) = 1000^i$ なら, $c'(t_\ell) \cdots c'(e_\ell) = 1000^i$,

$c(t_\ell) \cdots c(e_\ell) = 110^i$ なら, $c'(t_\ell) \cdots c'(e_\ell) = 010^i$

となることを確めることができる. ここに, $1 \leq \ell \leq k$, $j \geq 1$, $i \geq 0$ である.

$c''\tau_{180} = c$ が成立するときは, c の B_1, B_2, B_3 による右からの framing を考えると c と c'' の間に同様の関係が成立する. これらの事実より次の補題4, 5を証明することができる.

$c \in \bar{C}$ に対して, $c(i-1) = c(j+1) = 0$, $c(i) = c(i+1) = \cdots = c(j) = 1$ のとき, $c(i) \cdots c(j)$ なる系列を c の block という. また $c \in \bar{C}$

の l_L, l_R の座標をそれぞれ l, r とするとき，Cの長さ $lg(c)$ を次のように定義する． $lg(c)=r-l+1$．

〔補題4〕 $c_2\tau_{166}=c_1$ とする．このとき次の命題が成立する．

(i) $lg(c_1)=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2 の最右端の block（B_Rと略記する）の長さがともに偶数であるか，ともに奇数であることである．

(ii) $lg(c_1)+1=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2 の B_Rの長さがそれぞれ奇数，偶数となることである．

(iii) $lg(c_1)-1=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2のB_R の長さがそれぞれ偶数，奇数となることである．

〔補題5〕 $c_2\tau_{180}=c_1$ とする．このとき次の命題が成立する．

(i) $lg(c_1)=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2 の最左端の block（B_Lと略記する）の長さがともに偶数であるか，ともに奇数であることである．

(ii) $lg(c_1)+1=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2 の B_Lの長さがそれぞれ奇数，偶数となることである．

(iii) $lg(c_1)-1=lg(c_2)$ が成立するための必要十分条件は，c_1, c_2 の B_Lの長さがそれぞれ偶数，奇数となることである．

これらの補題より次の補題6，7が証明される．

〔補題6〕 $c_0\in\overline{C}$ とする．$c_i=c_0\tau_{166}^{-i}$, $i=1,2,\cdots$ とおくとき，

$[c_0]=[c_j]$ となる c_j が存在する．

〔補題7〕 $c_0 \in \overline{C}$ とする．$c_i = c_0 \tau_{180}^{-i}$, $i=1,2,\cdots$ とおくとき，$[c_0]=[c_j]$ となる c_j が存在する．

〔定義〕 $A=\{1100^j \mid j \geq 0\}$ とおく．$((t_1,e_1),\cdots,(t_k,e_k))$ を $c\in\overline{C}$ の左からの A による framing のうち長さが最大のものとする†．ただし，framing $((t_1,e_1),\cdots,(t_k,e_k))$ の長さを k と定義する．このとき，c の remainder $R(c)$ は次のように定義される configuration である．

$$R(c)(i)=\begin{cases} c(i) & i<t_1 \text{ または } e_k<i \text{ ならば,} \\ 0 & t_1\leq i\leq e_k \text{ ならば.} \end{cases}$$

$c\in\overline{C}$ とする．ある整数 k および正整数 j が存在して，$1\leq i\leq j$ なる i に対して $c(k+i)=\alpha_i$，かつ $i<j$ または $i>j$ なる i に対して $c(k+i)=0$ が成立するとき，$[c]$ を $\bar{0}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_j\bar{0}$ と表わす．また α_i より左側だけが問題になる場合には $\bar{0}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i$—— のようにも表わす．

〔補題8〕 $c\in\overline{C}$ とする．$R(c)$ の B_L の長さが3以上，または $[R(c)]$ が $\bar{0}101$—— の形であるとき，

$$lg(R(c'))\leq lg(R(c))-1 \quad \text{かつ} \quad c'=c\xi^{-1}$$

---

† この場合の framing とは前述の A_1, A_2, A_3 による左からの framing の定義において，(i) の $e_k=r+2$ の条件のみかけていて，$\{A_1,A_2,A_3\}$ の代りに $\{A\}$ とした framing とする．

となるような $\xi \in \{\tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する.

[補題9] $c \in \bar{C}$ の 1_L の座標を i とする. $[c] = \bar{0}100$—— と表わされるための必要十分条件は, $c\tau_{166}\tau_{180}$ の 1_L の座標が $i+1$ となることである.

[補題10] $c, c' \in \bar{C}$ に対して, $c\tau_{166}\tau_{180} = c'$ が成立するとする. c, c' の 1_R の座標をそれぞれ r, r', 1_L の座標をそれぞれ l, l' とするとき, $r-1 \le r' \le r+1$, $l-1 \le l' \le l+1$ が成立する.

[補題11] $c_0 \in \bar{C}$ とし, $c_i = c_0(\tau_{166}\tau_{180})^i$ とおくとき, 任意の $i \ge 0$ に対して, $[c_i]$ は $\bar{0}100$—— の形であるとする. このとき, 任意の $i \ge 0$ に対して, $[c_i]$ は $\bar{0}100^{m_1}100^{m_2}\cdots\cdots100^{m_s}1\bar{0}$, $m_1 \ge 1, \cdots, m_s \ge 1$, $s \ge 0$ と表わされる. ここに $m_1, \cdots, m_s$ は i に依存しない定数である.

[補題12] 任意の $c_0 \in \bar{C}$ に対して,

$$c\xi = c_0, \quad [c] = \bar{0}110^{n_1}110^{n_2}\cdots110^{n_r}1^m\bar{0}$$

$$n_1 \ge 1, \cdots, n_r \ge 1, \ r \ge 0, \quad m = 0 \text{ または } 1$$

となるような $c \in \bar{C}$ および $\xi \in \{\tau_{76}, \tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する†.

ただし, τ_{76} は以下で定義される全域関数である.

(証明) 任意の $c_0 \in \bar{C}$ に対して, 補題の条件を満足する c, ξ が存在することは, 後述の手順が有限回で終ることおよび

---

† $m=0$ のときは, $[c] = \bar{0}110^{n_1}\cdots110^{n_{r-1}}11\bar{0}$ とする.

補題6，7より明らかである．手順の説明にはいるまえに〜で表わされる変換を定義する．この変換は

$$[c] = \bar{0}110^{n_1}110^{n_2}\cdots110^{n_r}100^{m_1}100^{m_2}\cdots100^{m_{s-1}}1\bar{0} \qquad (1)$$
$$n_1 \geq 1, \cdots, n_r \geq 1, r \geq 0, m_1 \geq 1, \cdots, m_{s-1} \geq 1, S \geq 1$$

と表わされるような c に対して定義されるもので，c と $\tilde{c}$ との 1_L の座標は一致し，$[\tilde{c}]$ は

S が偶数のとき，$[\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\cdots110^{n_r}111^{m_1}100^{m_2}111^{m_3}10$

S が偶数のとき，$[\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\cdots110^{n_r}111^{m_1}100^{m_2}111^{m_3}100^{m_4}1\cdots111^{m_{s-1}}1\bar{0}$

S が奇数のとき，$[\tilde{c}] = \bar{0}110^{n_1}\cdots110^{n_r}111^{m_1}100^{m_2}111^{m_3}100^{m_4}1\cdots100^{m_{s-1}}1\bar{0}$

と表わされる．

	σ_{76}
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

σ_{76} を左のような局所関数とし，τ_{76} を σ_{76} より定義される全域関数とする．明らかに(1)の形の任意の c に対して　$\tilde{c}\,\tau_{76} = c$　が成立する．

(i) $[R(c_0)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ か $\bar{0}100$── の形である場合は $c_1 = c_0$ とおく．そうでない場合は，補題8より

$$c_1 \xi' = c_0 \,, \quad lg(R(c_1)) < lg(R(c_0))$$

が成立し，しかも $[R(c_1)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ か $\bar{0}100$── の形であるような $c_1 \in \mathcal{C}$ および $\xi' \in \{\tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する．

(ii) もし $[R(c_1)]$ が $\bar{0}$ か $\bar{0}1\bar{0}$ の形のときは(V)へいく．

もし $[R(c_1)]$ が

$$[R(c_1)] = \bar{0}100^{m_1'}100^{m_2'}\cdots 100^{m_{u-1}'}1\bar{0} \qquad (2)$$
$$m_1' \geq 1, \cdots, m_{u-1}' \geq 1, \quad u \geq 2$$

なる形のときは (iii) へいく.

もし $[R(c_1)]$ が上のいずれの形でもないとき(すなわち, $\bar{0}100$—— の形ではあるが, $u=1$ も含めて (2) の形にはかけないとき)は, (iv) へいく.

(iii) $c_0 = \tilde{c}_1$ とおいて, (i) へいく. 明らかに $lg(R(c_0)) = lg(R(c_1))$.

(iv) 補題9, 10, 11 より, $[R(c_1(\tau_{166}\tau_{180})^i)]$ が $\bar{0}100$—— 以外の形になりかつ $lg(R(c_1(\tau_{166}\tau_{180})^i)) \leq lg(R(c_1))$ が成立するような $(\tau_{166}\tau_{180})^i \in \{\tau_{166}, \tau_{180}\}^*$ が存在する. $c_0 = c_1(\tau_{166}\tau_{180})^i$ とおき, (i) へいく.

(v) 手順を終える.

3. $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_P) = \mathcal{P}^{(2)}$ の証明

次の二つの補題は文献(1)で証明されている.

[補題13] 任意の n_i, $1 \leq i \leq k$ および m_j, $1 \leq j \leq k-1$ に対して

$$\bar{0}(11)^{n_1}0^{m_1}(11)^{n_2}0^{m_2}\cdots 0^{m_{k-1}}(11)^{n_k}\bar{0} \in \mathcal{A}^{(2,3)}(c_P).$$

[補題14] 任意の n_i, $1 \leq i \leq k$ に対して,

$$\bar{0}1^{n_1}01^{n_2}0\cdots 01^{n_k}\bar{0} \in \mathcal{A}^{(2,3)}(c_P).$$

[定理15] $\mathcal{A}^{(2,3)}(c_P) = \mathcal{P}^{(2)}$

(証明) $[c] = \bar{0}110^{n_1}110^{n_2}\cdots 110^{n_{r-1}}110^{n_r}1\bar{0}$

			σ_{42}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

なる形の任意のcに対して，c'を

$$[c']=\bar{0}011^{n_1}011^{n_2}0\cdots011^{n_{r-1}}011^{n_r}01\bar{0}$$

なる形で，かつcの1_iの座標をiとするとき，c'の1_iの座標は$i+1$であるような configuration とする．このとき，$c'\tau_{42}=c$ が成立する．ここに，τ_{42}は左の表で示される局所関数σ_{42}より定義される全域関数である．したがって，補題12，13，14より定理は証明された．（証明終）

［定理16］任意の$i\geq 1$，$j\geq 1$に対して，$\mathcal{A}^{(2^i3^j,\,3)}=\mathcal{P}^{(2^i3^j)}$．

4．むすび

Yamada，Amoroso により提起された1次元－2状態－スコープ3テセレイションオートマトンの完全性の問題を肯定的に解決した．

謝辞　日頃御指導いただく本多波雄教授，ならびに御討論いただいた木村，本多両研究室の諸氏に深謝する．

文献

(1) Yamada, Amoroso. "A completeness problem for TA" J.C.S.S. 4 (1970)

(2) 山田，"テッセレーション・オートマトンによる実数の分類と写像"，信学会オートマトンと言語研資（1973－01）

(3) 久保，木村，"テセレイションオートマトンの完全性について"，信学会オートマトンと言語研資（1972－10）

(4) 丸岡，木村，"1次元－2状態－スコープ3テセレイションオートマトンの完全性について" 信学会オートマトンと言語研資（1972－12）．