数理解析研究所講究録
179巻 1973年 74-89

樹状言語の階層構造

名古屋大 工　伊藤英則
稲垣康善
福村晃夫

§0. 序

従来考えられている一次元言語の自然な拡張である樹状言語[(1),(2)]（*dendrolanguage*, *DL*）は記号が樹状構造の上に配置された言語であり，最近いろいろの方面からその種々の性質が明らかにされている．[(1)〜(6)] たとえば，文献(2)は有限状態機械の拡張の立場から，文献(4)は文脈自由形文法の導出木の特性化，さらに，文献(5),(6)は文脈規定形文法の導出木の特性化の立場からDLの性質を明らかにしている．

そこで，本論文ではこれらを包括する種々の形のDL生成システム（*dendrolanguage generating system*, *DS*）を定義し，これらが生成するDLの階層構造の存在を明らかにする．すなわち，*CSDS*（*context-sensitive DS*），*CFDS*（*context-free DS*），*LDS*（*linear DS*）および*RLDS*（*right linear DS*）を定義し，これらが生成するDLの族をそれぞれ，$\mathcal{T}_{CS}$, $\mathcal{T}_{CF}$, $\mathcal{T}_{L}$ および $\mathcal{T}_{RL}$ と記せば，これ

らの間に，$\mathfrak{T}_{CS} \supsetneqq \mathfrak{T}_{CF} \supsetneqq \mathfrak{T}_{L} \supsetneqq \mathfrak{T}_{RL}$ なる包含関係がなりたつことを明らかにする．さらに，DLの受理機械として，種々の形の樹状オートマトン（*dendroautomaton*, *DA*）を定義し，それらのDL受理能力について述べる．

また，制御集合上のCFDSを定義し，DLを導出する際に，規則を適用する非終端節記号の範囲にある種の制限をつけることによって，$\mathfrak{T}_{CS}$ の無限個の真の族が存在することを明らかにする．

§1．基本的概念，諸定義および記法

この節では，まず木の定義を行う．

〔定義 1.1〕 正整数の集合 N によって生成される自由モノイドを N^*，N^* の単位元を 0，演算子を・(連接）とする．N^* の元 n，m に対して，$n\cdot l = m$ なる l が N^* に存在するとき，かつそのときにかぎり，n は m より上位にあるといって $n \preceq m$ と記す．

〔定義 1.2〕 N^* の有限部分集合 D の任意の元 n, m に対して，

(1) $m \in D$ かつ $l \preceq m$ ならば，$l \in D$ であり，

(2) $n = l\cdot j$ かつ $i < j$，$i, j \in N$ ならば $l\cdot i \in D$ であるとき，

かつそのときにかぎり，D を木定義域（*tree domain*）という．

〔定義 1.3〕 木定義域 D の元 n の深さ（*depth*）$d(n)$ を，つぎの(1)，(2)によって再帰的に定義する．

(1) $d(0)=0$, (2) $i \in N,\ n=m \cdot i \in D$ に対して, $d(n)=d(m)+1$.

木定義域 D の深さ $d(D)$ を $\max\{d(n) \mid n \in D\}$ とする.

〔定義 1.4〕 木定義域 D の部分集合 $\bar{D}$ をつぎのように定義し, $\bar{D}$ を D の葉集合とよぶ. $\bar{D}=\{n \mid n \in D,\ n \cdot 1 \notin D\}$

〔定義 1.5〕 葉集合 $\bar{D}$ 上で隣接関係 $\sim$ をつぎのように定義する. (1) $\bar{D}$ のすべての元 m に対して, $m \sim m$ とし,

(2) $\bar{D}$ のある元 n, m に対して, ($n \neq m$), つぎの (i) 〜 (iv) の条件がなりたつとき, $m \sim n$ と記し, m は n のすぐ左に隣接していることを意味する.

(i) $m = x \cdot i_1 \cdot i_2 \cdots i_\ell$ $(1 \leq \ell)$, $n = x \cdot j_1 \cdot j_2 \cdots j_k$ $(1 \leq k)$ であるような x が D に存在する.

(ii) $j_1 = i_1 + 1$

(iii) $j_2 = j_3 = \cdots = j_k = 1$ または $j_2 = j_3 = \cdots = j_k = 0$

(iv) $2 \leq g \leq \ell$ なるすべての g に対して,

$$i_g = \max\{i \mid x \cdot i_1 \cdot i_2 \cdots i_{g-1} \cdot i \in D,\ i \in N\}$$

〔定義 1.6〕 階層付き記号の有限集合 (ranked alphabet, ra) を (Ω, σ) とする. ここに, Ω は記号の有限集合, $\sigma : \Omega \to N \cup \{0\}$ は Ω の元の階層を定める写像である. Ω_j $(=\{x \mid \sigma(x)=j,\ x \in \Omega\})$ は階層 j をもつ記号の集合である. 以後 ra, (Ω, σ) を単に, Ω と記す.

〔定義 1.7〕 木定義域 D に対して, ra, Ω 上の木は $t : D \to \Omega$

なる関数である．ここに，Dのどの元nに対しても，

$$\#\{m \mid d(m)=d(n)+1,\ n \preceq m \in D\} = \alpha(t(n))$$

である．ただし，$\#A$は集合Aの元の総数を表わす．

木tの木定義域DをD_t，Ω上の有限の深さの木のすべての集合を$\mathcal{T}_\Omega$と記す．

〔定義 1.8〕 木定義域Dの元nを節(node)とよび，$n \in D$, $X \in \Omega$に対して，$t(n)=X$ならば，節nを(n, X)とも記す．(n, X)で表現されたDのすべての節の集合をt_Dとすれば，$t_D=\{(n, X) \mid n \in D,\ t(n)=X\}$であり，これは木定義域$D$をもつ木$t: D \to \Omega$を表わす．以下では単に，そのような木を$t_D$と記すこともある．

〔記法 1.9〕 すべてのi $(1 \leq i \leq n)$に対して，t_{D_i}が木であり，$t_{D_0}=\{(0, X)\} \cup \bigcup_{i=1}^{m} \{(i \cdot m, Y) \mid (n, Y) \in t_{D_i}\}$であるとき，$t_{D_0}$をプレフィックス記法(prefix notation)によって一次元記号系列に表現したものを$\mu(t_{D_0})$とすれば，

$$\mu(t_{D_0}) = X\,\mu(t_{D_1}) \cdots \mu(t_{D_m})$$

である．また，$\mu(\{(0, X)\}) = X$である．

§2. RLDS, LDS, CFDS および CSDS の定義

この節では，RLDS, LDS, CFDS および CSDS の定義を行い，これらのDSが生成するDLを定義する．(この節の定義の詳略は文献(1)を参照されたい．)

〔定義2.1〕 CSDS を $S=(\Omega, V, \Sigma, P, \lambda_0)$ とする．ただし，

(1) Ω : ra

(2) $V \subseteq \Omega$: 終端節記号の有限集合（ここに，$\Lambda = \Omega - V$; 非終端節記号（nns）の集合，$^\forall \lambda \in \Lambda$, $\sigma(\lambda)=0$ と約束する。）

(3) $\Sigma \subseteq V$: 葉記号の集合（$^\forall a \in \Sigma$, $\sigma(a)=0$）

(4) $P \subseteq \bigcup_{l=1}^{m} \underbrace{\mathcal{T}_\Lambda \times \cdots \times \mathcal{T}_\Lambda}_{l回} \times \underbrace{\mathcal{T}_\Omega \times \cdots \times \mathcal{T}_\Omega}_{l回}$; mは有限正整数

有限集合Pの元（$s_1, \cdots, s_l, t_1, \cdots, t_l$）を規則とよび通常は（$s_1, \cdots, s_l$）$\longrightarrow$（$t_1, \cdots, t_l$）と記す．さらに，$s_i \in \mathcal{T}_\Lambda$ だから，$s_i = \{(0, \lambda_i) \mid \lambda_i \in \Lambda\}$ であることより，単に（$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$）$\longrightarrow$（$t_1, \cdots, t_l$）と記す．

(5) $\lambda_0 \in \Lambda$: 初期非終端節記号

〔定義2.2〕 CSDS を $S=(\Omega, V, \Sigma, P, \lambda_0)$ とする．Sの規則Pの形により，もし，

(1) $P \subseteq \mathcal{T}_\Lambda \times \mathcal{T}_\Omega$ ならば，Sを CFDS とよび，

(2) $P \subseteq \{\xi \longrightarrow t \mid \mu(t) \in (V^*\Lambda V^* \cup V^+)\}$ ならば，LDSとよび，

(3) $P \subseteq \{\xi \longrightarrow t \mid \mu(t) \in (V^*\Lambda \cup V^+)\}$ ならば，RLDSとよぶ．

また，これらを総称するときは単に DS とよぶ．

〔定義2.3〕 DSを $S=(\Omega, V, \Sigma, P, \lambda_0)$ とする．$\mathcal{T}_\Omega$ の任意の元 α, β に対して，つぎの条件(1)，(2)および(3)がなりたつときかつそのときにかぎり $\alpha \Longrightarrow \beta$ と記す．

(1) $\mu(\alpha)=x_0\xi_1x_1\cdots x_{l-1}\xi_l x_l$, $\mu(\beta)=x_0\mu(t_1)x_1\cdots x_{l-1}\mu(t_l)x_l$, $x_i\in\Omega^*$

(2) $(\xi_1,\cdots,\xi_l)\longrightarrow(t_1,\cdots,t_l)\in P$

(3)$^+$ $\phi_\alpha(\xi_1)\sim\phi_\alpha(\xi_2)\sim\cdots\sim\phi_\alpha(\xi_l)$

さらに，関係 $\Longrightarrow$ の反射的かつ推移的閉包を $\stackrel{*}{\Longrightarrow}$ と記す．

[定義 2.4] DS, $S=(\Omega, V, \Sigma, P, \lambda_0)$ が生成する DL, $T(S)$ をつぎのように定義する．

$$T(S)=\{t \mid i \stackrel{*}{\Longrightarrow} t\in \mathfrak{T}_V\}$$

RLDS, LDS, CFDS および CSDS が生成する DL の族をそれぞれ $\mathfrak{T}_{RL}$, $\mathfrak{T}_L$, $\mathfrak{T}_{CF}$ および $\mathfrak{T}_{CS}$ と記す．

つぎに，DL の 2,3 の例を示す．

[例 2.1] Fig.1. に CFDL を示し，Fig.2 に CSDL，さらに，Fig.3 に CSDS では生成できない DL を示す．

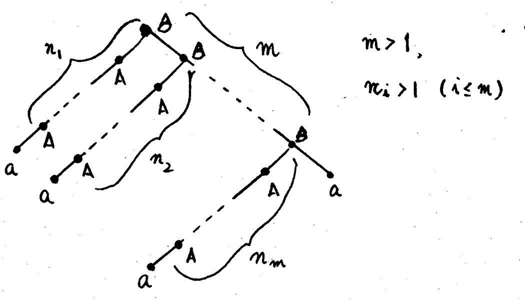


Fig. 1 $T_1(S)$,

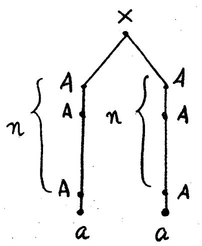


Fig. 2 $T_2(S)$

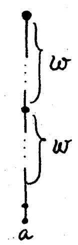


Fig.3 $T_3(S)$

$\mu(T_1(S))=\{BA^{n_1}aBA^{n_2}a\cdots BA^{n_m}aa\}$ $\mu(T_2(S))=\{XA^naA^na \mid n\ge 1\}$

$\mu(T_3(S))=\{ww \mid w\in\{A,B\}^*\}$

§3. DL の族の包含関係

S0

この節では，$\mathcal{T}_{RL}$, $\mathcal{T}_{L}$, $\mathcal{T}_{CF}$, $\mathcal{T}_{CS}$ の間の包含関係を明らかにする．以下で述べる定理の証明は文献(1)を参照されたい．また，正規言語，線形言語，文脈自由形言語，文脈規定形言語の族を $\mathcal{L}_R$, $\mathcal{L}_L$, $\mathcal{L}_{CF}$, $\mathcal{L}_{CS}$ とそれぞれ記す．

〔定理 3.1〕 $\mu(\mathcal{T}_{RL}) \subsetneq \mathcal{L}_R$, $\mu(\mathcal{T}_L) \subsetneq \mathcal{L}_L$, $\mu(\mathcal{T}_{CF}) \subsetneq \mathcal{L}_{CF}$, $\mu(\mathcal{T}_{CS}) \subsetneq \mathcal{L}_{CS}$

この定理は例2.1からも容易に推察されよう．文献(4)では $\mu(\mathcal{T}_{CF}) \subseteq \mathcal{L}_{CF}$ が明らかにされている．

〔定理 3.2〕 $\mathcal{T}_{RL} \subsetneq \mathcal{T}_L \subsetneq \mathcal{T}_{CF} \subsetneq \mathcal{T}_{CS}$

〔定義 3.1〕 DL, T の任意の元を t とするとき，$path(t)$ をつぎのように定義する．

$$path(t) = \{ x \mid x = X_0 X_1 \cdots X_m,\ \sigma(X_m) = 0,\ t(0) = X_0,\ t(i_1 \cdot i_2 \cdots i_j) = X_j \}$$

さらに，$path(T) = \{ path(t) \mid t \in T \}$ とする．

〔定理 3.3〕 任意の CFDL を T とすれば $path(T)$ は正規言語である．

〔定義 3.2〕 DS, $S = (\Omega, V, \Sigma, P, \lambda_0)$ の位数 $\pi(S)$ を
$\pi(S) = \max \{ d(t_{D_i}) \mid (\xi_1, \cdots, \xi_\ell, t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_\ell) \in P \}$ と定義する．さらに，位数 g の DS が生成する DL の族を $\mathcal{T}^{(g)}$ と記す．

〔定理 3.4〕 $\mathcal{T}_{CS}^{(g-1)} = \mathcal{T}_{CS}^{(g)}$, $\mathcal{T}_{CF}^{(g-1)} = \mathcal{T}_{CF}^{(g)}$, $(g > 1)$

〔定理 3.5〕 $\mathcal{T}_{L}^{(g-1)} \subsetneq \mathcal{T}_{L}^{(g)}$, $\mathcal{T}_{RL}^{(g-1)} \subsetneq \mathcal{T}_{RL}^{(g)}$, $(g > 1)$

〔定理 3.6〕 $\mathcal{T}_{RL}^{(g)} \subsetneq \mathcal{T}_{L}^{(g)}$, $(1 \leq g)$

§4　DA の定義およびその性質

この節では，DAの定義を与え，DAが受理するDLの族について明らかにする．

〔定義 4.1〕 CSDA を $A=(K, V, \Sigma, \delta, F)$ とする．ただし，

(1) K：状態の有限集合（$\forall p \in K$, $\sigma(p)=0$）

(2) V：ra．

(3) $\Sigma = V \cap K$：葉記号の有限集合（$\forall a \in \Sigma$, $\sigma(a)=0$）

(4) $\delta : \underbrace{\mathcal{T}_{K\cup V} \times \cdots \times \mathcal{T}_{K\cup V}}_{l\text{回}} \longrightarrow 2^{\overbrace{\mathcal{T}_{(K-\Sigma)} \times \cdots \times \mathcal{T}_{(K-\Sigma)}}^{}}$ ，状態推移関数．（右辺の $\mathcal{T}_{(K-\Sigma)} \times \cdots \times \mathcal{T}_{(K-\Sigma)}$ も l 回）

(5) $F \subseteq (K-\Sigma)$；最終状態の有限集合．

〔定義 4.2〕 CSDA を $A=(K, V, \Sigma, \delta, F)$ とする．Aの関数 δ の形により，もし，

(1) $\delta : \mathcal{T}_{K\cup V} \rightarrow 2^{\mathcal{T}_{K-\Sigma}}$ ならば，A を CFDA とよぶ．[+]

(2) $\delta : \{\pi \mid \mu(\pi) \in (\Sigma\cup V)^{*}\cdot(K-\Sigma)\cdot(\Sigma\cup V)^{*} \cup (\Sigma\cup V)^{+}\} \rightarrow 2^{\mathcal{T}_{K-\Sigma}}$ ならば，

A を LDA とよぶ．

(3) $\delta : \{\pi \mid \mu(\pi) \in (K-\Sigma)(\Sigma\cup V)^{*} \cup (\Sigma\cup V)^{+}\} \rightarrow 2^{\mathcal{T}_{K-\Sigma}}$ ならば，

A を RLDA とよぶ．

これらを総称するときは単にDAとよぶ．

〔定義 4.3〕 任意のDAを $A=(K, V, \Sigma, \delta, F)$ とする．$\mathcal{T}_{K\cup V}$ の元 α, β に対して，つぎの(i)～(iii)がなりたつときかつそのときにかぎり，$\alpha \vdash \beta$ と記す．

(i) $\mu(\alpha) = x_0\,\mu(\pi_1)\,x_1 \cdots x_{l-1}\,\mu(\pi_l)\,x_l$, $\mu(\beta) = x_0\,p_1\,x_1 \cdots x_{l-1}\,p_l\,x_l$, $x_i \in (K\cup V)^{*}$

[+] 文献(2)で定義されている tree Automaton に対応する．

(ii) $\delta(t_1, \cdots, t_l) \ni (\dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_l)$

(iii) $\phi_\beta(p_1) \sim \phi_\beta(p_2) \sim \cdots \sim \phi_\beta(p_l)$

さらに，関係$\vdash$の反射的かつ推移的閉包を$\vdash^*$と記す．

〔定義 4.4〕 任意のDAを$A=(K, V, \Sigma, \delta, F)$とするとき，DA, Aが受理するDLをM(A)とすれば，

$$M(A) = \{ t \in \mathcal{T}_V \mid t \vdash^* \dot{f} \in \mathcal{T}_F \}$$

RLDA，LDA，CFDAおよびCSDAが受理するDLの族をそれぞれ，$\mathcal{M}_{RL}$, $\mathcal{M}_L$, $\mathcal{M}_{CF}$および$\mathcal{M}_{CS}$とすればつぎの定理を得る．

〔定理 4.1〕 $\mathcal{M}_{RL} = \mathcal{T}_{RL}$, $\mathcal{M}_L = \mathcal{T}_L$, $\mathcal{M}_{CF} = \mathcal{T}_{CF}$, $\mathcal{M}_{CS} = \mathcal{T}_{CS}$

〔系 4.2〕 $\mathcal{M}_{RL} \subsetneq \mathcal{M}_L \subsetneq \mathcal{M}_{CF} \subsetneq \mathcal{M}_{CS}$

つぎに若干の決定問題およびそれに関連する結果を示す．

〔定理 4.3〕 AをCSDAとする．$\mathcal{T}_V$の任意の元tについて，tがM(A)の元であるか否か決定可能である．

〔定理 4.4〕 $\mathcal{T}_V$の帰納的部分集合で，CSDAで受理できない集合が存在する．

〔定理 4.5〕 $\mathcal{M}_{CS}$は帰納的部分集合の族に真に含まれる．

〔定理 4.6〕（Thatcher, Wright (2)） AをCFDAとする．M(A)が空集合か，有限集合か，あるいは無限集合であるか決定可能である．

〔定理 4.7〕 RLDA (LDA) をAとするとき，M(A)が空集合か有限集合か，あるいは無限集合であるか決定可能である．

つぎに，決定性DAと非決定性DAの受理能力の比較については文献(10)に述べられている．（ここでは非決定性DAについてのみ述べた．）さらに，DL上で定義される種々の写像，演算のもとでの閉包性については文献(1)を参照されたい．

§5. 制御集合上のDS

この節では，状態集合上のDSおよびその拡張である系列集合上のDSを定義する．

〔定義 5.1〕 系列文脈自由形DS（gcf DS）を $E=(\Omega, V, \Sigma, \Gamma, P, z_0, \lambda_0)$ とする．ただし，

(1) Ω, V, Σ, λ_0 は定義2.1で与えたものと同じである．

(2) Γ；補助記号の有限集合

(3) $P \subseteq \Gamma \times \mathcal{T}_\Lambda \times \Gamma^* \times \mathcal{T}_\Omega$ ；規則の有限集合

(4) $z_0 \in \Gamma$；初期補助記号

ここに，もし $P \subseteq \Gamma \times \mathcal{T}_\Lambda \times \Gamma \times \mathcal{T}_\Omega$ であるならば，Eを状態文脈自由形DS（scf DS）とよぶ．

〔定義 5.2〕 gcf DSを $E=(\Omega, V, \Sigma, \Gamma, P, z_0, \lambda_0)$ とする．Eの規則の集合Pの形によって，系列線形DS（gl DS），系列右線形（grl DS）を定義する．

(1) $P \subseteq \{(z, \lambda, \alpha, \tau) \mid \mu(\tau) \in V^* \Lambda V^* \cup V^+,\ \alpha \in \Gamma^*\}$ ならば，Eを gl DS とよぶ．

84

(2) $P \subseteq \{(z, \lambda, \alpha, \tau) \mid \mu(\tau) \in V^{*}1 \cup V^{+},\ \alpha \in \Gamma^{*}\}$ならば，Eを grℓ DS とよぶ．

ここで，もし，gℓ DSの α が Γ の元であるならば，とくに状態線形DS（sℓ DS）とよび，また，grℓ DSの α が Γ の元であるならば，とくに，状態右線形DS（srℓ DS）とよぶ．

以下では，gcf DS，gℓ DS および grℓ DS を総称して gDS とよび，scf DS，sℓ DS および srℓ DS を総称して sDS とよぶ．

〔定義5.3〕 gDS を $E=(\Omega, V, \Sigma, \Gamma, P, z_0, \lambda_0)$ とする．$\Gamma^{*} \times \mathcal{T}_\Omega$ の任意の元 (β_1, τ_1)，(β_2, τ_2) に対して，つぎの条件(1)，(2)がなりたつときかつそのときにかぎり，$(\beta_1, \tau_1) \Longrightarrow (\beta_2, \tau_2)$ と記す．

(1) $\beta_1 = z\beta_1' \in \Gamma^{*}$，$\beta_2 = \alpha\beta_1' \in \Gamma^{*}$，$\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_\Omega$，$\mu(\tau_1) = x\lambda y$，$\mu(\tau_2) = x\mu(\delta)y$

(2) $(z, \lambda, \alpha, \delta) \in P$

さらに，関係 $\Longrightarrow$ の反射的かつ推移的閉包を $\overset{*}{\Longrightarrow}$ と記す．

gDS，E が生成するDLを T(E) とすれば，

$$T(E) = \{\tau \in \mathcal{T}_V \mid (z_0, \lambda_0) \overset{*}{\Longrightarrow} (\varepsilon, \tau)\}$$

gcf DS，gℓ DS および grℓ DS が生成するDLを gcf DL，gℓ DL および grℓ DL とよび，それらの族をそれぞれ $\mathcal{T}^{gcf}$，$\mathcal{T}^{gl}$ および $\mathcal{T}^{grl}$ と記す．

つぎに，gcf DS，E の導出について，n 限定導出を定義する．上で定義した関係 $(\beta_1, \tau_1) \Longrightarrow (\beta_2, \tau_2)$ について，もし $\mu(\tau_1)$ 中

に生起している nns の個数が j 個であるならば $\Longrightarrow$ の代わりに $\overset{j}{\Longrightarrow}$ と記す．ここで，n を正整数とするとき，つぎの導出

(*) $(z_0, \lambda_0) = (\beta_1, t_1) \overset{j(1)}{\Longrightarrow} (\beta_2, t_2) \overset{j(2)}{\Longrightarrow} \cdots \overset{j(r-1)}{\Longrightarrow} (\beta_r, t_r) = (\varepsilon, t),\ t \in \mathcal{J}_V$

が n 限定導出であるとは，すべての i $(1 \leq i \leq r-1)$ に対して，$j(i) \leq n$ であり，かつ，n は $j(i) \leq n$ をみたす最小の正整数であるときをいう．このとき単に，(*) を $(z_0, \lambda_0) \overset{n*}{\Longrightarrow} (\varepsilon, t)$ と記す．n 限定導出によって生成される gDL を $T(E; n)$ と記せば，

$$T(E; n) = \{t \in \mathcal{J}_V \mid (z_0, \lambda_0) \overset{n*}{\Longrightarrow} (\varepsilon, t)\}$$

このとき，明らかに $T(E; n) \subseteq T(E; n+1)$ である．

gDL，$T(E)$ に対して，$T(E; n) = T(E)$ となる最小の n を gDS，E の位数とよび，いかなる正整数 n に対しても，$T(E; n) \neq T(E)$ ならば，E は無限位数 ω をもつという．

位数 n の gcfDL の族を $\mathcal{J}_n^{gcf}$，位数 ω の gcfDL の族を $\mathcal{J}_\omega^{gcf}$ とする．ここに，定義より明らかに，つぎのことがなりたつ．

$$\mathcal{J}^{grl} \subseteq \mathcal{J}^{gl} \subseteq \mathcal{J}_1^{gcf} \subseteq \mathcal{J}_2^{gcf} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{J}_\infty^{gcf} \subseteq \mathcal{J}_\omega^{gcf}$$

〔定義 5.4〕 sDS を $F = (\Omega, V, \Sigma, \Gamma, P, z_0, \lambda_0)$ とする．$\Gamma \times \mathcal{J}_\Omega$ の任意の元 (p_1, t_1)，(p_2, t_2) に対して，つぎの (1)，(2) がなりたつときにかぎり $(p_1, t_1) \Longrightarrow (p_2, t_2)$ と記す．

(1) $\mu(t_1) = x\lambda y$，$\mu(t_2) = x\mu(\delta)y$，$x \in \{\Omega - \{\lambda\}\}^*$，$y \in \Omega^*$

(2) $(p_1, \lambda, p_2, \delta) \in P$

さらに，関係 $\Longrightarrow$ の反射的かつ推移的閉包を $\overset{*}{\Longrightarrow}$ と記す．

sDS, F が生成するDLを T(F) とすれば,

$$T(F)=\{\alpha\in\mathcal{T}_V \mid (z_0,\dot{\lambda}_0)\overset{*}{\Longrightarrow}(p,\alpha),\ {}^{\exists}p\in\Gamma\}$$

scfDS, slDS および srlDS が生成するDLを scfDL, slDL, および srlDL とよび, それらの族を $\mathcal{T}^{scf}$, $\mathcal{T}^{sl}$, $\mathcal{T}^{srl}$ と記す.

つぎに, scf DS, F の導出について, n 限定導出を定義する. 上で定義した関係 $(p_1,\alpha_1)\Longrightarrow(p_2,\alpha_2)$ について, もし $\mu(\alpha_1)=x\lambda y$ の λ が左端から数えて第 j 番目の nns であるならば, $\Longrightarrow$ の代わりに $\overset{j}{\Longrightarrow}$ と記す. ここで, n を正整数とするとき, つぎの導出

$$(**)\quad (z_0,\dot{\lambda}_0)=(p_1,\alpha_1)\overset{j(1)}{\Longrightarrow}(p_2,\alpha_2)\overset{j(2)}{\Longrightarrow}\cdots\overset{j(r-1)}{\Longrightarrow}(p_r,\alpha_r)=(p,\alpha),\ \alpha\in\mathcal{T}_V$$

が n 限定導出であるとは, すべての i $(1\leq i\leq r-1)$ に対して, $j(i)\leq n$ でありかつ n は $j(i)\leq n$ をみたす最小の正整数であるときをいう. このとき単に, (**) を $(z_0,\dot{\lambda}_0)\overset{n*}{\Longrightarrow}(p,\alpha)$ と記す. n 限定導出によって生成される scf DL を $T(F;n)$ と記せば, $T(F;n)=\{\alpha\in\mathcal{T}_V \mid (z_0,\dot{\lambda}_0)\overset{n*}{\Longrightarrow}(p,\alpha),\ {}^{\exists}p\in\Gamma\}$

scf DL, $T(F)$ に対して, $T(F;n)=T(F)$ となる最小の n を scf DS, F の位数とよび, いかなる正整数 n に対しても, $T(F;n)\neq T(F)$ ならば, F は無限位数 ω をもつという.

位数 n の scf DL の族を $\mathcal{T}^{scf}_n$, 位数 ω の scf DL の族を $\mathcal{T}^{scf}_\omega$ とする. ここに定義より明らかに, つぎのことがなりたつ.

$$\mathcal{T}^{srl}\subseteq\mathcal{T}^{sl}\subseteq\mathcal{T}^{scf}_1\subseteq\mathcal{T}^{scf}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathcal{T}^{scf}_\infty\subseteq\mathcal{T}^{scf}_\omega$$

§6. $_gDL$, $_sDL$ および DL の包含関係

この節では，$_gDL$, $_sDL$ および DL の族の間の包含関係を述べる.[+]

〔定理 6.1〕 $\mathcal{T}^{srl} = \mathcal{T}_{RL}$, $\mathcal{T}^{sl} = \mathcal{T}_L$

〔定理 6.2〕 $\mathcal{T}_1^{scf} = \mathcal{T}_{CF}$, $\mathcal{T}_\omega^{scf} = \mathcal{T}_{CS}$

〔定理 6.3〕 $\mathcal{T}_1^{scf} \subsetneq \mathcal{T}_2^{scf} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{T}_\infty^{scf} \subsetneq \mathcal{T}_\omega^{scf}$

〔定理 6.4〕 $\mathcal{T}_{RL} \subsetneq \mathcal{T}^{grl}$, $\mathcal{T}_L \subsetneq \mathcal{T}^{gl}$

〔定理 6.5〕 $\mathcal{L}_R \subsetneq \mu(\mathcal{T}^{grl}) \subseteq \mathcal{L}_{CF} \subsetneq \mu(\mathcal{T}^{gl})$

〔定理 6.6〕 $\mathcal{T}^{grl} \subsetneq \mathcal{T}^{gl}$

〔定理 6.7〕 $\mathcal{L}_R \subsetneq path(\mathcal{T}^{gl}) \subseteq \mathcal{L}_{CF}$

〔定理 6.8〕 $\mathcal{T}^{gl} = \mathcal{T}_1^{gcf} \subsetneq \mathcal{T}_2^{gcf} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{T}_\infty^{gcf} \subsetneq \mathcal{T}_\omega^{gcf}$

〔定理 6.9〕 $\mathcal{T}_\infty^{gcf} \cap \mathcal{T}_{CF} \neq \phi$, $\overline{\mathcal{T}}_\infty^{gcf} \cap \mathcal{T}_{CF} \neq \phi$, $\mathcal{T}_\infty^{gcf} \cap \overline{\mathcal{T}}_{CF} \neq \phi$

〔定理 6.10〕 $\mathcal{T}_\infty^{gcf} \cap \mathcal{T}_{CS} \neq \phi$, $\overline{\mathcal{T}}_\infty^{gcf} \cap \mathcal{T}_{CS} \neq \phi$, $\mathcal{T}_\infty^{gcf} \cap \overline{\mathcal{T}}_{CS} \neq \phi$

〔定理 6.11〕 $\mathcal{T}_{CS} \subsetneq \mathcal{T}_\omega^{gcf}$

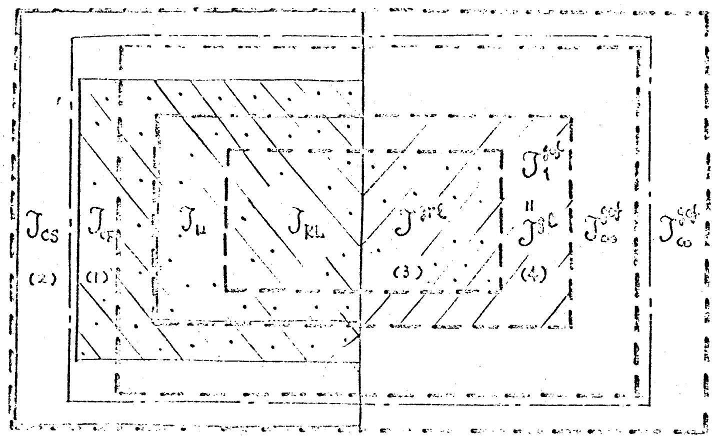
以上の定理 6.4 ～ 6.11 を Fig. 4 に示す.

最後に，CSG, CFG, LG および RLG, G の導出木 $D_L(G)$ をそれぞれ CSDS, CFDS, LDS および RLDS によって特性化することが可能であるがここでは紙面の都合上省略する．なおこのことの詳細については，文献(6)を参照されたい．

末筆ながら，ご指導賜わった東北大学　本多波雄教授ならびに，4節についてはとくに富山大学　小島政明氏にご討論

+ この節の定理の証明は文献(10),(11)を参照されたい.

頂いたことに感謝致します．



：path(T)が正規言語の族

：path(T)がCFLの族

：μ(T)がCFLの族

：ψ(μ(T))が準線形集合の族

Fig.4　DLとgDLの包含関係

参考文献

(1) 伊藤，稲垣，福村；"樹状言語の族の階層構造"，信学研資 AL PRL 72-76 (1972-10)．

(2) J.W. Thatcher and J.B.Wright: "Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second-order logic", Math. Syst. Theory,2, pp 56 (1968).

(3) W.C. Rounds: "Mapping and grammars on trees", Math. Syst. Theory, 2, pp257 (1970).

(4) W.S. Brainerd: "Tree benerating regular systems", Inf. & Cont., 14, pp 257 (1969).

(5) 小島，本多："木オートマトンの拡張による文脈規定形文法の導出木の特性化"，

信学誌 VoL，55-D pp 601 (1972-9)

(6) 伊藤，稲垣，福村；文脈規定形文法の導出木の特性化"，

信学誌，VoL，56-D pp 178 (1973-3)

(7) T. Kasai: "An hierarchy between context-free and context-sensitive languages", J.CSS, pp 492 (1970).

(8) 伊藤，稲垣，福村："ストリング文法について"，信学誌 VoL，55-D pp 528 (1972-8)

(9) 〃 〃 〃；"分散木オートマトンと分散文脈規定形木生成システムについて"，

信学誌掲載予定，又は信学研資 AL PRL 72-31 29 (1972-6)

(10) 〃 〃 〃；"状態集合上の樹状言語生成システム"，

信学誌掲載予定，又は信学研資 AL RRL 72-84 (1972-11)

(11) 〃 〃 〃："制御系列集合上の樹状言語生成システム"，

信学研資 AL PRL 72-110 111 (1973-1)