数理解析研究所講究録
179巻 1973年 32-44



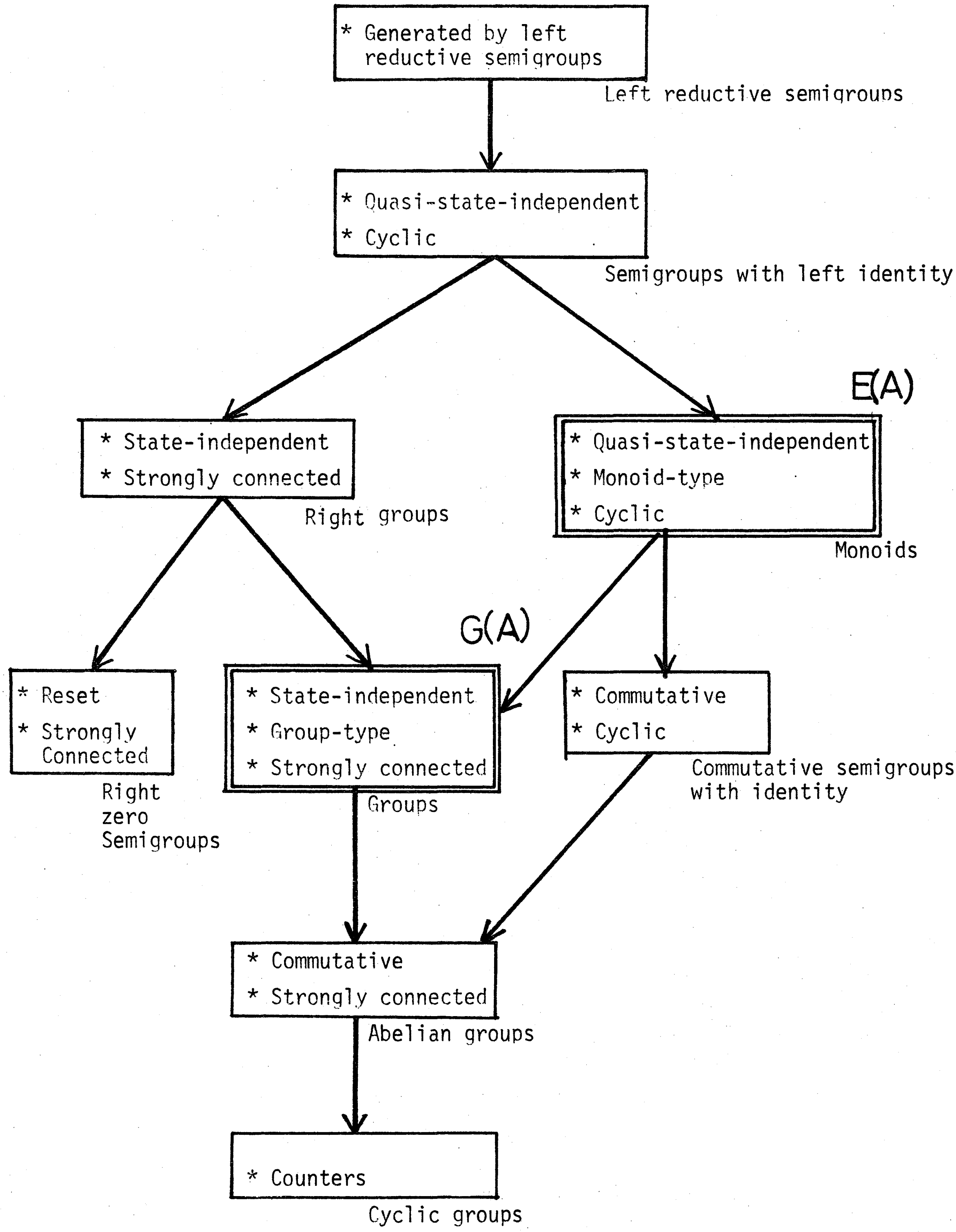
# 可遷的自己準同型半群を有するオートマタ族

東北大 通研 増永良文
東北大 通研 野口正一

## §1. 序

可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族が新しく定義導入され，このオートマタ族の特性化定理が本報告で与えられている。従来自己同型群の構造により状態遷移構造が決定されるオートマタ族として，Fleck[1]が定義導入した完全オートマタの族，Trauth[2]が定義導入した擬完全オートマタの族が知られている。また自己同型群の分解可能性がオートマトンの分解可能性と結びつけて議論可能なオートマタ族には完全，擬完全オートマタ族の他に状態独立な強連結オートマタ族がある[3]。既に筆者らは“半群から生成されたオートマトン”なる概念を定義導入してこれら3つのオートマタ族は順にアーベル群，群，右群から生成されたオートマタ族に等価であることを示している[3]

が，更にオートマトンが準状態独立であると云う概念を定義導入して，準状態独立な巡回オートマタ族，準状態独立で単位型なる巡回オートマタ族を定義し，これら2つのオートマタ族は順に左単位元を有する半群，単位元を有する半群から生成されたオートマタ族に等価であることを明らかにしてきた[4]。 本報告の主要な結果の一つは可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族は準状態独立で単位型なる巡回オートマタ族に等価であることを明らかにしたことにある。この結果は擬完全オートマタ族，この族は状態独立で群型なる強連結オートマタ族である，が可遷的自己同型群を有する強連結オートマタ族に等価であると云う従来知られている結果のエレガントな拡張になっている。 既に筆者らはカウンターの族，強連結リセットオートマタ族，可換な巡回オートマタ族は順に巡回群，右零半群，単位元を有する可換半群から生成されたオートマタ族に等価であることを示している[5，3，4]が，前述の各種オートマタ族の特性化の諸結果とこれらオートマタ族間の包含関係を図示し，本報告で特性化された可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族がその図中で占める相対的位置関係を明確にしておくことは今後の議論の発展の為にも意義深い様に思われる。 この図式表現が次に示す図－1である。




〔図－1〕半群によって規定されるオートマタ族の図式表現

## §2. 可遷的自己準同型半群を有するオートマタ

〔定義2.1〕 オートマトンAは3項系列，$A=(Q, M, I)$である。ここにQは状態のなす空でない有限集合，Iは入力半群，$M: Q\times I\to Q$ は状態遷移関数で次の条件を満す：$\forall q\in Q, \forall x, y\in I, M(q, xy)=M(M(q, x), y)$ ■

本報告で考察するオートマトンは完備であると仮定し，入力半群Iには任意の半群が仮定しうる。オートマトンAが巡回であるとは次の条件が成立する時を云う：

$$\exists q_0\in Q, \forall q\in Q, \exists x\in I, q=M(q_0, x) \text{。}$$

この時状態$q_0$を巡回オートマトンAの生成元と云う。巡回オートマトンには一般に複数個の生成元がありうる。オートマトンが強連結と呼ばれるのは任意の状態がその生成元である時を云う。

次にオートマトンの準同型写像について述べる。$A=(Q, M, I)$，$B=(R, N, I)$をオートマタとする。Q上から一般にRの中への写像$\eta$がオートマトンAからBの中への準同型写像であるとは次の条件が成立する時を云う：

$$\forall q\in Q, \forall x\in I, \eta(M(q, x))=N(\eta(q), x) \text{。}$$

$\eta$が特に一対一写像でもある時，同型写像と云う。またオートマトンAとBが同型であるとはAからBの上への同型写

像が存在する時を云う。特にオートマトンAからA自身への準同型写像をオートマトンAの自己準同型写像，同型写像を自己同型写像と云う。 $E(A)$ ，$G(A)$ で順にオートマトンAの自己準同型写像の全体のなす集合，自己同型写像の全体のなす集合を表わすと，$E(A)$，$G(A)$ は関数合成*のもとで順に単位半群，群をなすことが知られている。 $E(A)$，$G(A)$ をそれぞれオートマトンAの自己準同型半群，自己同型群と云う。さて可遷的自己準同型半群を有するオートマトンの定義と基礎的結果を次に示す。

〔定義2.2〕 オートマトンAが $E(A)$ と状態 $q$ に関して可遷的であるとは次の条件が成立する時を云う：

$$\forall q' \in Q,\ \exists h \in E(A),\ q' = h(q)\ ■$$

以下本報告では特に巡回オートマトンAが $E(A)$ とある生成元 $q_0$ に関して可遷的である場合について考察する。

〔定理2.1〕 巡回オートマトンAは $E(A)$ とある生成元 $q_0$ に関して可遷的と仮定する。するとAは $E(A)$ とAの他の任意の生成元 $q_0'$ に関しても可遷的である。■

(証明) Aを巡回オートマトン，$q_0$ をその生成元とするとき次の結果が成立する[6]ことを使う：

$$(*):\quad \forall h,\ h' \in E(A),\ h = h' \Leftrightarrow h(q_0) = h'(q_0)$$

従って巡回オートマトンが定理の仮定を満すなら，$E(A)$ の

---

* 関数合成演算"●"は次の様に定義する：$\forall h,\ h' \in E(A)$，$\forall q \in Q$，$h \bullet h'(q) \equiv h(h'(q))$。

位数は$A$の状態総数に等しい。 所で$A$は $E(A)$ と $q_0'$ に関しては可遷的でないと仮定すると，$\exists h, h' \in E(A)$，$h \neq h'$ かつ $h(q_0') = h'(q_0')$ が成立しなければならなくなるがこれは (*) 式から不可能である。 証明終。

本定理から巡回オートマトンが自己準同型半群に関して可遷的，あるいは可遷的自己準同型半群を有するとは自己準同型半群とある生成元に関して可遷的な時を云うと定義する。可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマトンの生成元の全体は自己同型群により規定されることについては筆者らの文献[7, 8]を参照されたい。本報告では紙面の制限上省略する。

## §3. 特性化定理

本節では可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマトンを次の4つの立場から特性化する：

《1》 $E(A)$の位数と$A$の状態総数との関係性から。

《2》 準状態独立でかつ単位型である定義との関係性から。

《3》 $E(A)$ と $I(A)$との関係性から。

《4》 半群から生成されたオートマトンとの関係性から。

さて《1》の立場からの特性化の議論を始めるが結果を示す。

〔定理3.1〕 巡回オートマトンAに関する次の2つの命題は同値である。 (1) AはE(A)に関して可遷的である。
(2) E(A)の位数はAの状態総数に等しい。 ■

(証明) 定理2.1の証明中に示した様に(1)→(2)であるが、同様(*)式の成立から逆も成立する。 証明終。

次に《2》の立場からの特性化の議論を始める。この為には若干の基礎的定義関係が必要なのでこれを述べる。Aをオートマトン，qを任意の状態とする時，入力半群I上に関係 $\rho_q$ ，$\rho$ を次の様に定義する：

$$\forall x, y \in I,\ x\ \rho_q\ y \Leftrightarrow M(q, x) = M(q, y)\ 。$$

$$\rho = \bigcap_{q \in Q} \rho_q\ 。$$

一般に $\rho_q$ は右合同関係を，$\rho$ は合同関係をなす[12]。特に $\rho$ を法とするIの商半群 $I/\rho$ を $\bar{I}(A)$ と記し，オートマトンAに付随する入力半群と云う。 $\bar{I}(A)$ の半群演算○はIの元x，yを含む $\rho$ 同値類を〔x〕，〔y〕で表わすとき，〔x〕○〔y〕=〔xy〕で定義される。次の2つの定義は筆者らが既に行っている[4]が若干一般化してある。

〔定義3.1〕 オートマトンAが状態qに関して準状態独立であるとは次の条件が成立する時を云う：

$$\forall q' \in Q,\quad \rho_{q'} \supseteq \rho_q \quad ■$$

特にAが巡回オートマトンであって，Aがある生成元に関し

て準状態独立ならばAは他の如何なる生成元に関しても準状態独立となり，従って巡回オートマトンがある生成元に関して準状態独立な時及びその時にのみ簡略に巡回オートマトンは準状態独立と云うことと定義する。

〔定義3.2〕 オートマトンAが単位型であるとはAに付随する入力半群 $\bar{I}(A)$ が単位半群をなす場合を云う。■

〔命題3.1〕 Aを $E(A)$ に関して可遷的な巡回オートマトンとする。 するとAは準状態独立でかつ単位型である。■

(証明) $q_0$ をAの生成元とする時，次が成立する：

$\forall x, y \in I,\ x \rho_{q_0} y \Rightarrow \forall h \in E(A),\ x \rho_{h(q_0)} y$ 。

従ってAは $E(A)$ に関して可遷的なる仮定からAは準状態独立である。 次に $\bar{I}(A)$ は単位元を有することを証明する。

$M(q_0, x_0) = q_0$ となるIの元 $x_0$ を含む $\rho_{q_0}(=\rho)$ 同値類 $[x_0]$ は明らかに $\bar{I}(A)$ の左単位元である。 そこで $[x_0]$ が右単位元でもあることを示せばよい。 仮定から $\forall y \in I$，$\exists h \in E(A), M(q_0, y) = h(q_0)$ 。 従って $M(M(q_0, y), x_0) = M(h(q_0), x_0)$ から $M(q_0, yx_0) = M(h(q_0), x_0) = h(M(q_0, x_0)) = h(q_0) = M(q_0, y)$ ，即ち $[y] \circ [x_0] = [y]$ が得られる。 証明終。

〔命題3.2〕 Aを準状態独立で単位型なる巡回オートマトンとすると，Aは $E(A)$ に関して可遷的である。■

(証明)　まずIの元$y$に対して写像$\lambda_y : Q \to Q$を$\lambda_y(q) = M(q_0, yx)$で定義する。ここに$q = M(q_0, x)$で$q_0$はAの生成元である。Aが準状態独立なることから$\lambda_y$は各$y$に対してAの自己準同型写像となる。また$M(q_0, x_0) = q_0$となるIの元$x_0$を含むρ同値類$[x_0]$が$\bar{I}(A)$の単位元となることを証明出来るから$q = M(q_0, y) = M(q_0, yx_0) = \lambda_y(M(q_0, x_0)) = \lambda_y(q_0)$が成立する。　証明終。

〔定理3.2〕　巡回オートマトンAに関する次の2つの命題は同値である。(1) Aは$E(A)$に関して可遷的である。
(2) Aは準状態独立でかつ単位型である。■

さて《3》の立場からの特性化には既に筆者らが示している次の結果を使う[4]。

〔命題3.3〕　巡回オートマトンAに関する次の2つの命題は同値である。(1) Aは準状態独立でかつ単位型である。(2) $E(A)$は$\bar{I}(A)$と同型である。■

また《4》の立場からの特性化を行うには半群から生成されたオートマトンの定義が必要であるがこの定義は次の通りである[3]：　Sを有限半群，Iを入力半群とし，IからS上への準同型写像ξが存在したとする。すると半群Sから生成されたオートマトン$A_{S,\xi} = (S, M_S, I)$の状態遷移は次の通りである。　$\forall s \in S, \forall x \in I, M_S(s, x) = s\xi(x)$。

筆者らは図－１で既に示している様に種々のオートマタ族が半群Sの性質により特性化されることを示してきた［３，４，５］が本報告で必要とする結果は次の通りである。

〔命題３．４〕　オートマトンAが準状態独立で単位型なる巡回オートマトンである為の必要かつ十分条件はAがある単位半群から生成されたオートマトンに同型となること。■

本節以上の結果をまとめると次の特性化定理をうる。

〔定理３．３〕（特性化定理）　巡回オートマトンAに関する次の４つの命題は同値である。

(1)　AはE(A)に関して可遷的である。

(2)　E(A)の位数はAの状態総数に等しい。

(3)　Aは準状態独立でかつ単位型である。

(4)　E(A)はI(A)と同型である。

そしてAが上の条件を満足するのはAがある単位半群から生成されたオートマトンに同型な時及びその時に限る。■

なお本定理の条件を満すオートマトンの状態遷移構造は自己準同型半群により決定されるが，詳細な議論は文献［８］を参照されたい。　次節では可遷的自己同型群を有する強連結オートマタ族と可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族との関係について述べる。

## §4. 可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族と可遷的自己同型群を有する強連結オートマタ族の関係.

オートマトンAが状態独立であるとは次の条件が成立している時を云う： $\forall q, q' \in Q$, $\rho_q = \rho_{q'}$ 。またオートマトンAが群型であるとは $I(A)$ が群をなす時を云う。状態独立で群型なる強連結オートマトンをTrauth[2]は擬完全オートマトンと呼んでいる。またオートマトンAが $G(A)$ に関して可遷的であるとは次の条件が成立する時を云う： $\forall q, q' \in Q, \exists g \in G(A), q' = g(q)$ 。Trauthは可遷的自己同型群を有する強連結オートマトンの定義を導入している。Bayer[9]は自己同型群の位数がオートマトンの状態総数に等しいオートマタ族を定義導入しトータルオートマタ族と呼び，擬完全オートマタ族に等価であることを示している。その他多くの著者により，この族の特性化が行なわれてきたが，従来の結果をまとめて記すと次の如くである。

〔定理4．1〕 強連結オートマトンAに関する次の4つの命題は同値である。

(1) Aは $G(A)$ に関して可遷的である。

(2) $G(A)$ の位数はAの状態総数に等しい。

(3) Aは状態独立でかつ群型である。

(4) $G(A)$ は $\bar{I}(A)$ と同型である。
そしてAが上の条件を満足するのはAがある群から生成されたオートマトンに同型な時及びその時に限る。■

(証明) まず本定理最後の主張は著者ら[3]が示している。(1)~(4)の間の同値性は次図，図-2，の通りである。

$$
\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{Bayer [9]}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Trauth [2]}"'] & (2) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Barnes [10] \& Fleck [11]}"] \\
(4) \arrow[r, "\text{Trauth [2]}"'] & (3)
\end{tikzcd}
$$

〔図-2〕定理4.1の証明構成図。

## §5. 結論

本報告では可遷的自己準同型半群を有する巡回オートマタ族が新しく定義導入され，この族の特性化が行なわれた。この結果従来オートマトンの構造が群論的手法のもとに良く解明されてきた可遷的自己同型群を有する強連結オートマタ族のエレガントな拡張となっていることが明らかにされた。

〔謝辞〕本学，大泉充郎教授並びに研究室諸氏に感謝する。

# 〔文献〕


[1] A.C.Fleck : "Isomorphism group of automata", J.ACM, 9, 4 (1962).

[2] C.A.Trauth Jr. : "Group-type automata", J.ACM, 13, 1 (1966).

[3] 増永，野口，大泉 ："オートマトンの構造の半群論的考察"，信学論(C)，53-C，6（昭45）.

[4] 猪瀬，増永，野口，大泉 ："オートマトンの構造の半群論的考察 ― 自己準同型半群によって規定されるオートマター"，信学論(C)，54-C，8（昭46）.

[5] 増永，野口，大泉 ："擬完全オートマトンの分解理論について"，信学論(D)，55-D，8（昭47）

[6] Z.Bavel : "Structure and transition-preserving function of finite automata", J.ACM, 15, 1 (1968).

[7] 増永，野口，大泉 ："可遷的自己準同型半群を有するオートマタ族の特性化定理"，信学会．オートマトンと言語研究会資料，AL/PRL 72-107/-108（1973-01）.

[8] 増永，野口，大泉 ："可遷的自己準同型半群を有するオートマタ族の特性化定理"，信学論(D) 投稿中（昭48）.

[9] R.Bayer : "Automorphism groups and quotients of strongly connected automata and monadic algebras", IEEE Conf. Rec. 1966 7th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory (1966).

[10] B.Barnes : "Groups of automorphisms and sets of equivalence classes of input for automata", J.ACM, 12, 4 (1965).

[11] A.C.Fleck : "On the automorphism group of automata", J.ACM, 12, 4 (1965).

[12] G.P.Weeg : "The structure of an automaton and its operation preserving transformation group", J.ACM, 9, 3 (1962).