数理解析研究所講究録
179巻 1973年 1-18

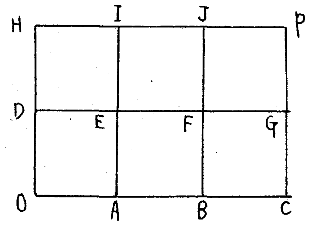


# 組合せ理論の基礎

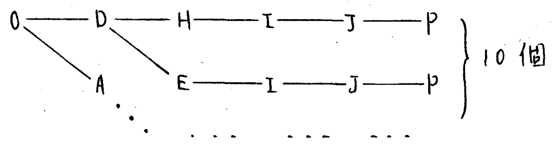
東海大 数学　　成島 弘

組合せ数学と情報科学とのかかわりは"連続的情報を離散化する時点にまた離散的情報を処理する時点にある"と思う。数え上げ，グラフ，ブロックデザイン，LP，DP，有限幾何など多くの分野[7〜19]がある。本講演ではこれらの分野のなかでもっとも基礎的である計数(数え上げ)の理論について，60年代までの紹介と我々の結果の位置づけ及びいくつかの問題提起を試みる。ところで小学，中学，高校に於ては組合せ数学がどのように扱われているのか興味をもち，教科書，参考書などを調べてみたのであるが，我々の小，中，高時代よりも整っていて重要視されているように思われる[1〜4]。以下その時に出会った問題，道の数，クラスの数，2または3の倍数の個数を求める問題，色ぬりの問題，などをもとにして論を進めてみる。

(1) "道の数"とある問題提起　「次の図でOからPへの最短通路の個数を求めよ」をいくつかの方法で考えてみる。




(イ)　0から始まりPまですべて数え上げていくと，求める個数は10となる。




(ロ)　0からPまでの点に座標を考え，点$(m, n)$までの道の個数を$p(m, n)$であらわすと，$p(m, n) = p(m-1, n) + p(m, n-1)$，$p(k, 0) = p(0, l) = 1$，なる漸化式(*)により，点$P(3, 2)$までの道の数は $p(3, 2) = p(2, 2) + p(3, 1) = p(1, 2) + 2p(2, 1) + p(3, 0) = \cdots = 10$，となる。

(ハ)　図でよこに1区画，たてに1区画だけ進むことをそれぞれ$a$，$b$なる記号であらわせば，$aabab$，$abaab$，… など記号の列で求める通路をあらわすことができる。すなわち全部で5区画進むうち$a$が3つ，$b$が2つあればよいから $5!/(3!\times 2!) = 10$ となる。一般に $p(m, n) = (m+n)!/(m!\,n!) = {}_{m+n}C_m$ と閉じた式で求めることができる。更に $(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} {}_rC_k\, a^k b^{r-k}$，$m+n=r$ と母関数を考えることもできる。

このように同じ10個を求めるアルゴリズムにも，全くの数え上げ，漸化式，閉じた式と幅が広いことがわかる。調べる対象の個数が有限のとき，全くの数え上げはいわば自明解であるが，組合せ的数は天文学的数より大きい(碁の盤面の可能性 $3^{361} \fallingdotseq 1.74\times 10^{172}$ に対して全宇宙に存在する陽子と電子の総数 $(3/2)\times 136\times 2^{256} \fallingdotseq 2.36\times 10^{79}$ とのこと[5])から，計算機を使，

(*) パスカルの三角形を座標化したものと考えてもよい。

て調べてもすぐにだめになる。従って閉じた式が求まれば一番よいのであるが、すくなくとも漸化式あるいは近似式が求まることが望ましい。また閉じた式や漸化式の存在についての基礎づけも興味深い。すなわち、全ての数え上げ，…，漸化式，…，閉じた式に到るアルゴリズムの理論を展開することが我々の課題となる。上の意味でのアルゴリズムの理論を考えるとき、組合せ論の多くの問題は我々に豊富な素材を与えてくれるものと思う。実際に個数を求める方法としては、函数解析的手法，代数的、集合関数論的手法など考えられるが"素朴な組合せ論的直観"も大切である。

ここでC. Bergeの考え方（〔19〕の what is combinatorics の章）について少しふれておく。記号 a, b, c による順列，組合せはそれぞれ $\{a, b, c\}$ から $\{1 \le 2 \le 3\}$ への単射，$\{a, b, c\}$ から $\{0, 1\}$ への写像ととらえられる。このとらえ方はブルバキ〔9〕，H. Sharp, Jr〔10〕を始め，日本でも宮本〔8〕，森〔6〕，小沢，増島〔4〕などによって指摘されている。このことを Berge は更にラテン方陣などいくつかの例をあげながら、一般的に次のように定義している。"a mapping of a set of objects into a finite abstract set with a given structure" によって "configuration" を定義し，代数が演算，解析が関数，トポロジーが連続を扱うように，組合せ論は "configuration" を扱うと述べている。こ

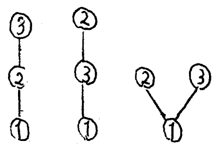
れも一つの考え方である。

ところで(1)の問題を$n$次元の道に拡張するならば、多項定理 $(a+b+c+\cdots)^n=\sum(n!/p!q!r!\cdots)\,a^p b^q c^r\cdots$ の係数を考えればよい。$\sum$は $p+q+r+\cdots=n$, $p,q,r,\cdots\geqq 0$ についての和。

(2) "分割数"とある拡張　「相異なる5個のものがある、これを、2個、2個、1個の3つのグループに分ける仕方はいく通りあるか」。これは3項係数 $5!/(2!)^2$ を更に$2!$で割って15通りとなる。3項係数に於ては、例えば $aabbc$ と $bbaac$ とは区別されて2個となるがクラス分けでは区別されないため。一般に集合 $S$ の個数 $m(S)=n$ のとき、$S$ の直和分解で、$x_1$ 個の元からなる部分集合が $a_1$ 個、$x_2$ 個の元からなる部分集合が $a_2$ 個、$\cdots$、$x_h$ 個の元からなる部分集合が $a_h$ 個となるものはタイプ $(x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2}\cdots(x_h)^{a_h}$ なるSの分割と呼ばれ、このタイプの $S$ の分割の個数は $n!/\prod_{i=1}^{h}(a_i!(x_i!)^{a_i})$ であり、多項係数を $\prod_{i=1}^{h}(a_i!)$ で割ったものである。分割数は多くの組合せ論的問題にあらわれる。「$n$個の頂点をもつ植木(rooted tree)のうち非同型なものの個数」を $t(n)$ とすると、分割数を係数とする漸化式 $t(n+1)=(n+1)\sum_{\bar{x}}\left(n!/\prod_{k=1}^{n}(a_k!(k!)^{a_k})\right)\prod_{i=1}^{n}(t(i)^{a_i})$, $\bar{x}$ は $\{(1)^{a_1}(2)^{a_2}\cdots(n)^{a_n}\}$ なる自然数 $n$ の分割、が得られる。この漸化式を使い指数的母関数 $T=\sum_{n=0}^{\infty}(t(n)/n!)x^n$ を考え、$x=T/e^T$ をえる。こ

こでベキ級数の反転に関するLagrangeの定理を使い、閉じた式 $t(n)=n^{n-1}$ をえることができる[7]。この解法は離散的対象を連続的対象に移し、そのなかでの定理を使い、結果としてもとの離散的対象の解をえる例の一つである。

$n=3$のときの植木



と②と③とを根にもつ場合 全部で9個

ところで集合Sの分割全体（PL(S)とかく）、ただし $n(S)=n$、のなかで$g$個の同値類（ブロックと呼ぶ）をもつ分割の個数は第2種のStirling数（$S(n,g)$）と呼ばれ[15〜19]、

(イ) 漸化式 $S(n+1,g)=S(n,g-1)+gS(n,g)$, $S(n,1)=S(n,n)=1$,

又は $S(n+1,g)=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k S(k,g-1)$。

(ロ) 母関数と閉じた式 $x^n=\sum_{\pi\in PL(S)}(x)_{m(\pi)}$、ここで $(x)_r=x(x-1)\cdots(x-r+1)$ を示す。これより $x^n=\sum_{g=1}^{n}S(n,g)(x)_g$。 また

$(e^x-1)^g=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n/n!)\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\,{}_gC_i\,(g-i)^n$ より、$g!\,S(n,g)=\sum_{i=0}^{g}(-1)^i\,{}_gC_i\,(g-i)^n$

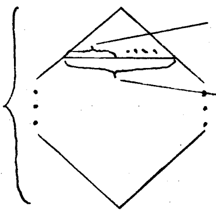
ここで $g-i=k$ とおいて、$S(n,g)=\sum_{k=0}^{g}(-1)^{g-k}\,{}_gC_k\,k^n/g!$、となる。

次に源氏香の遊び「香を次々に5包嗅いで、その同異判定を競う」は順を追った5個のものの間に成立する同異関係、すなわち、$n(S)=5$に対して $m(PL(S))=52$個で、その各々に最初の"桐壺"と最後の"夢の浮橋"を除いた源氏物語52帖の巻名がつけられている[7]。一般に $m(PL(S))$ はBell数と呼ばれ、漸化式は

$B(n+1)=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,B(k)$, $B(0)=1$ である。また指数的母関数は

$\sum_{n=0}^{\infty}B(n)/n!=e^{e^x-1}$ であり、無限級数 $B(n+1)=(1/e)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^n/k!\right)$

(by G. Dobinski)[19] が与えられている。



$m(PL(S))$ = Bell数 $(B(n))$

タイプ $(x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2}\cdots(x_h)^{a_h}$ $(=\bar{x})$, $\sum_{i=1}^{h} a_i = g$, なる分割全体 $(P(\bar{x}))$

ブロックの個数が $g$ 個である分割全体の個数 $=$ 才2種のスターリング数 $(S(n,g))$

$B(n)=\sum_{g=1}^{n} S(n,g)$, $S(n,g)=\sum_{\substack{\bar{x} \\ a_1+\cdots+a_h=g}} m(P(\bar{x}))$, $m(P(\bar{x}))=n!/\prod_{i=1}^{h}(a_i!(x_i!)^{a_i})$

PL(S)

PL(S)の内部構造を考えないときは、分割数, Stirling数, Bell数で十分であるが、例えば下図のようなPL(S)の区間を考え束構造も考えた上で、各区間の間の同値関係による各クラスの個数を求める場合はどのように扱ったらよいであろうか。この辺のことを我々は"基数合同"関係によって統一的にとらえ各クラスの不変量を導入する。[37~41]

$$\{\overline{1,2,3},\overline{4,5}\}$$

$$\{\overline{1,2,3},\overline{4},\overline{5}\}\quad\{\overline{1,2},\overline{3},\overline{4,5}\}$$

$$\{\overline{1,2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$$

PL(S)の鎖の全体を $Ch(PL(S))$ で表わす。$Ch(PL(S))$ の元 $\mathbb{C}:\pi_0<\pi_1<\cdots<\pi_n$, $\mathbb{C}':\pi_0'<\pi_1'<\cdots<\pi_n'$ に対して、全単射 $f:\pi_0\to\pi_0'$ ($\forall B\in\pi_0$, $m(B)=m(f(B))$ かつ $\forall i$ $(1\le i\le n)$, $\pi_i'=\{\sum_{B\in X(\pi_0)} f(B) \mid X\in\pi_i\}$), ここで $X(\pi_0)=\{B\in\pi_0 \mid B\subseteq X\}$, が存在するとき $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}'$ とは基数合同であるといい、$\mathbb{C}\cong_c\mathbb{C}'$ とかく。またこの $f$ を基数合同写像という。$\cong_c$ は同値関係となり、この関係によるクラス分けのクラスを基数合同類と呼ぶ。次に上の定義と同値となるS上置換による定義を述べる(*)。S上の対称群をGで表わす。Gの

(*) 野崎昭弘氏の質問にsuggestされて考えたこと。

元 $\alpha$ に対して，$\bar{\alpha} : PL(S) \to PL(S)$，$\bar{\alpha}(\pi)=\{\alpha(B) \mid B\in\pi\}$ を定めると，$\bar{\alpha}$ は $PL(S)$ 上の置換となり，$\{\bar{\alpha} \mid \alpha\in G\}=\bar{G}$ は $G$ と同型な $PL(S)$ 上の置換群となる。更に $\bar{G}$ の元 $\bar{\alpha}$ に対して，$\hat{\alpha} : Ch(PL(S)) \to Ch(PL(S))$, $\hat{\alpha}(\mathbb{C})=\{\bar{\alpha}(\pi)\mid \pi\in\mathbb{C}\}$ を定めると，$\hat{\alpha}$ は $Ch(PL(S))$ 上の置換となり，$\{\hat{\alpha} \mid \bar{\alpha}\in\bar{G}\}=\hat{G}$ は $\bar{G}$ と同型な $Ch(PL(S))$ 上の置換群となる。$Ch(PL(S))$ の元 $\mathbb{C}$ と $\mathbb{C}'$ に対して，$G$ の元 $\alpha$ が存在して $\hat{\alpha}(\mathbb{C})=\mathbb{C}'$ となるとき $\mathbb{C}\cong_p\mathbb{C}'$ とかく。定義から次の補題が成り立つ。

補題　$\mathbb{C}\cong_c\mathbb{C}' \iff \mathbb{C}\cong_p\mathbb{C}'$

また $PL(S)$ の区間 $[\pi,\tau]$ と $[\pi',\tau']$ とに対して，$f:[\pi,\tau]\to[\pi',\tau']$ ($\forall\nu\in[\pi,\tau]$, $f(\nu)\cong_c\nu$) となる束同型写像が存在することと $\pi<\tau \cong_c \pi'<\tau'$ とは同値であり，更に全単射 $f: Ch([\pi,\tau])\to Ch([\pi',\tau'])$ ($\forall\mathbb{C}\in Ch([\pi,\tau])$, $f(\mathbb{C})\cong_c\mathbb{C}$) が存在することとも同値である。

次に長さ0，1の鎖に対する，すなわち $PL(S)$ の元及び区間に対する基数合同類の不変量を導入する。$P(n)$ で自然数 $n$ の分割全体の集合を表わし，$P(v)$ で成分が非負整数のベクトル $v$ の分割全体の集合を表わす。ここで写像 $\eta_s$ と $\theta_\pi$ とを次のように定める。$\eta_s : PL(S)\to P(n)$，$\eta_s(\pi)=[m(B)\mid B\in\pi]$；$\theta_\pi:[\pi,I]\to P(v)$，$\theta_\pi(\tau)=[\psi(\eta(X(\pi)))\mid X\in\tau]$，ただし $X(\pi)=\{B\in\pi\mid B\subseteq X\}$，$\psi$ は $(\bigcup_{k\le n}P(k))^*$ の元 $\bar{x}=[(1)^{a_1}(2)^{a_2}\cdots(n)^{a_n}]$ に対して $\psi(\bar{x})=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ をとる写像であり，$[\pi,I]$ は $PL(S)$ の区間，$I$ は $PL(S)$ の最大元，$\eta=\bigcup_S\eta_s$，$\psi(\eta(\pi))=v$ とする。このとき次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>　(1) $\pi,\tau\in PL(S)$に対して、$\pi\cong_c\tau \longleftrightarrow \eta(\pi)=\eta(\tau)$、すなわち$\pi$と$\tau$とは同じタイプ。(2) $\pi<\tau\cong_c\pi<\tau' \longleftrightarrow O_\pi(\tau)=O_\pi(\tau')$，

(3) $\pi<\tau\cong_c\pi'<\tau' \longleftrightarrow \eta(\pi)=\eta(\pi')$ かつ $O_\pi(\tau)=O_\pi(\tau')$。

$C_\pi$，$C_{\pi(\tau)}$，$C_{\pi<\tau}$ でそれぞれ、$\pi$を含む基数合同類、$\pi$を固定したときの$\pi<\tau$を含む合同類、$\pi<\tau$を含む合同類を表わすと定理から次の公式をえる。

<u>公式</u>　$\eta(\pi)=\{(x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2}\cdots(x_h)^{a_h}\}$，$O_\pi(\tau)=\{y_1^{b_1}y_2^{b_2}\cdots y_m^{b_m}\}$，

$y_j=(y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{hj})$，$1\leq j\leq m$ とするとき，

(1) $m(C_\pi)=n!/\prod_{i=1}^{h}(a_i!(x_i!)^{a_i})$，(2) $m(C_{\pi(\tau)})=\prod_{i=1}^{h}(a_i!)/\prod_{j=1}^{m}(b_j!\prod_{i=1}^{h}(y_{ij}!)^{b_j})$，

(3) $m(C_{\pi<\tau})=m(C_\pi)\times m(C_{\pi(\tau)})=n!/(\prod_{i=1}^{h}(x_i!)^{a_i}\prod_{j=1}^{m}(b_j!\prod_{i=1}^{h}(y_{ij}!)^{b_j}))$。

ここでP.6の例について計算してみると，$\pi=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5}\}$，$\tau=\{\overline{1,2,3},\overline{4,5}\}$であるから$\eta(\pi)=\{(1)^3(2)^1\}$，$O_\pi(\tau)=\{(1,1),(2,0)\}$となり，$m(C_\pi)=5!/2!\,3!=10$，$m(C_{\pi(\tau)})=3!/2!=3$，$m(C_{\pi<\tau})=5!/2!\cdot2!=30$。

ところで、後に述べるBurnsideの補題を導くもとになる次のような置換群に関する定理がある。$G$を集合$X$上の置換群とする。$x,y\in X$　$x\equiv y \Leftrightarrow \exists\alpha\in G,\ \alpha(x)=y$ と関係$\equiv$を定めると、同値関係となる。$\equiv$によるクラス分けのクラスを軌道と呼び、$X$の元$x$を含む軌道を$O_x$で表わす。

<u>定理</u>　$m(O_x)=m(G)/m(G_x)$，$G_x=\{\alpha\in G\mid\alpha(x)=x\}$．

この定理より，今$G$を$S$上の対称群とし，$Ch(PL(S))$上の置換群$\hat{G}$を考えると，$G\cong\hat{G}$，$m(O_c)=m(C_c)$，$c\in Ch(PL(S))$に注意

すれば、我々の定義した不変量をもつ $S$ 上の置換群（基数合同不変群 i.e., $G_{\mathbb{C}}$）の族を考えることができる。また自己基数合同群（自己基数合同写像全体のなす群）と $\mathbb{C}$ の不変群 $G_{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C} \in Ch(PL(S))$, とは少し異なるがこれらの関連、及び $\mathbb{C}$ の不変群は One [35] による同値関係上の自己同型群の拡張となっており、単項群（monomial group）との関連も興味深い。

なお、$[\pi, I]$, $P(\upsilon)$, $P(n)$, 長さ $n$ の鎖 $C(n)$ の各順序集合間の関係が順序写像でとらえられており[37, 41]、これがもとになって半順序集合上の順序を保つ写像のクラスが詳しく調べられている[38, 39]。このクラスの意味づけとともに、"Scott Logic"、半順序集合上の反転公式（後述）、半束上の和積定理などとも考え合せ、半順序集合上の計算論として展開できる可能性もある。

また、$P(\upsilon)$ の母関数は $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \cdots, \upsilon_n)$ に対して、

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{s_1=0}^{\infty} \prod_{s_2=0}^{\infty} \cdots \prod_{s_n=0}^{\infty} (1 - x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n})^{-1} = \sum p(\upsilon)\, x_1^{\upsilon_1} x_2^{\upsilon_2} \cdots x_n^{\upsilon_n}$$

ただし、$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ は除く, $p(\upsilon) = m(P(\upsilon))$。$n = 1$ のとき数の分割の母関数となる。$p(\upsilon)$ の漸化式や近似式を求めることも一つの問題である。

(3) ふるいの公式と反転公式 「1から100までの正の整数のうち、2または3の倍数は全部でいくつあるか」 2の倍数は $100/2 = 50$, 3の倍数は $99/3 = 33$, 2の倍数でありかつ3の

倍数である数は $96/6=16$ であるから $m(A\cup B)=m(A)+m(B)-m(A\cap B)$ によって、求める個数は $50+33-16=67$ となる。これの一般式は $m(\bigcup_{i\in I}A_i)=\sum_{J\subseteq I}(-1)^{m(J)+1}m(\bigcap_{j\in J}A_j)$ であり、包除原理(principle of inclusion and exclusion)(この邦訳はあまりよくないので和積定理という訳はどうか)と呼ばれている[15~19]。ところで「1から100までの正の整数で2または3の倍数でないもの」は $m(\overline{A\cup B})=m(\Omega-A\cup B)=m(\Omega)-m(A\cup B)$ より $100-67=33$ である。これの一般式をBerge[19]はSylvesterの公式と呼んでいる。更に$\Omega$の集合族$\{A_i\}_{i\in I}$、$m(I)=q$ のちょうど $p$ 個の集合に属する元の個数は $\sum_{k=p}^{q}(-1)^{k-p}{}_kC_p\sum_{\substack{K\subseteq I\\ m(K)=k}}m(\bigcap_{i\in K}A_i)$、ただし $K=\phi$ に対して $m(\bigcap_{i\in K}A_i)=m(\Omega)$、によって求まり、ふるいの公式(*)と呼ばれる[19]。これらの公式の具体的問題への応用は[15~19]に豊富である。ところでこれらの公式のうちもっとも基本的な和積定理は $I$ 上の帰納法によって証明され、他の公式はこれから導かれるが、ここではG. Rota によって組織的に研究され[21]、組合せ理論に於けるその重要性が指摘された半順序集合上のMobiusの反転公式から導いてみよう。

$P$を局所的有限な半順序集合、すなわち $\forall x\leq y$ in $P$ に対して $m([x,y])<\infty$ とする。$x\not\leq y$ に対して $f(x,y)=0$ をとる実数値関数 $f:P\times P\to R$ の全体を $A(P)$ とおく。$f,g\in A(P)$, $\lambda\in R$ に対

(*) $p=0$ のとき Sylvesterの公式となる。

して、和、スカラー倍、積を次のように定める。

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y),\quad (\lambda f)(x,y)=\lambda(f(x,y))$$

$$(f\cdot g)(x,y)=\sum_{x\le z\le y} f(x,z)g(z,y)$$

これらの演算によって、$A(P)$ は $\mathbb{R}$ 上の線形空間であり、更に積に関して結合律、分配律を満し、単位元としてクロネッカーの $\delta$ 関数 ($\delta(x,x)=1$, $\delta(x,y)=0$, $x\ne y$) をもつ。このとき $A(P)$ を $P$ の <u>incidence algebra</u> と呼ぶ。

<u>補題</u> (Wand)　$f\in A(P)$ が逆元をもつための必要十分条件は $\forall x\in P$ に対して $f(x,x)\ne 0$ である。

$f$ の逆元は次のように帰納的に定まる。

$$f^{-1}(y,y)=1/f(y,y),\quad f^{-1}(x,y)=(-1/f(y,y))\sum_{x\le u<y} f^{-1}(x,u)f(u,y)$$

$A(P)$ のゼータ関数 $\zeta(x,y)$, Möbius 関数 $\mu(x,y)$ とはそれぞれ次のように定義され、互いに他の逆元となる。

$$\zeta(x,y)=\begin{cases}1 & x\le y\\ 0 & \text{その他}\end{cases},\qquad \mu(x,y)=\begin{cases}1 & x=y\\ -\sum_{x\le z<y}\mu(x,z) & x<y\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

<u>定理</u> (Hall-Möbius-Wand-Weisner の反転公式)　$P$ を局所的有限な半順序集合とする。$P$ の元 $z$ に対して $f(z)$ が定まり、$\exists p\in P$, $\forall z\ne p$ に対して $f(z)=0$ とする。このとき $x\in P$ に対して

$$g(x)=\sum_{x\le y} f(y)\quad ならば\quad f(x)=\sum_{x\le y}\mu(x,y)g(y).$$

この定理の双対も成立する。古典的 Möbius 関数は自然数の集合に約数関係 ($x\le y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y|x$) によって順序を入れることによ

って導かれる。ここで和積定理を導くもとになるブール束上のMöbius関数を求める。

補題 $\mathcal{B}$を$n$個の元からなる集合の部分集合の全体(順序は集合の包含関係)のなすブール束とする。このとき

$\forall x, y \in \mathcal{B}$ $(x \leq y)$に対して $\mu(x, y) = (-1)^{m(y)-m(x)}$。

$\mathcal{B} \cong \mathbf{2}^n$, $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$ によってもわかるが, $m(y) - m(x) = r$ に関する帰納法によって, $r = 0$ 又は $1$ のとき成立, $r-1$ 以下のとき仮定して, $\mu(x, y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) = -\left(\sum_{i=0}^{r-1} {}_rC_i (-1)^i\right)$ となるから, $\sum_{i=0}^{r-1} {}_rC_i (-1)^i$ (17) $+ (-1)^r = (1-1)^r = 0$ より $\mu(x, y) = (-1)^r$ となる。

ここで$\Omega$の集合族$\{A_i\}_{i \in I}$を与え, $\mathcal{P}(I)$の元$J$に対して $f(J) = m(\bigcap_{j \in J} A_j \cap \bigcap_{k \in I-J} \bar{A}_k)$ と定め, $g(J) = \sum_{J \subseteq K} f(K)$ とおくとき, 反転公式を用いて, $f(J) = \sum_{J \subseteq K} \mu(J, K) g(K) = \sum_{J \subseteq K} (-1)^{m(K)-m(J)} g(K)$ となる。$g(K) = m(\bigcap_{i \in K} A_i)$ に注意すれば, $\sum_{m(J)=p} f(J)$, $f(\phi)$ はそれぞれふるいの公式, Sylvester の公式となることがわかる。とくに $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$ とおくと, $f(\phi) = 0$, $g(\phi) = m(\bigcup_{i \in I} A_i)$ であり,

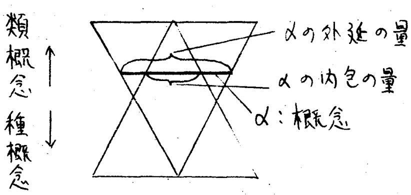
$$m(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{J \in \mathcal{P}(I)} (-1)^{m(J)+1} m(\bigcap_{j \in J} A_j), \text{ ただし } m(\bigcap_{i \in \phi} A_i) = 0 \text{ とおく,}$$

となり和積定理が導かれる。

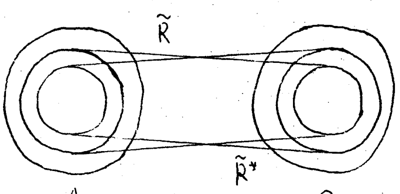
ここで$i \in I$に対して, $i$なる性質をもつものの集合$A_i$という関係をより一般的に考えるならば, 古典論理学に於ける概念の内包と外延に関するハミルトンの図を思い出す。次にこのハミルトンの図を集合と関係によって形式的にとらえてみる。

そしてこのとらえ方が我々の方法の基本となるものである。

(4) 和積定理のある variant と分割束上の和積定理




ハミルトンの図とは左図のようなもので、概念の外延の量と内包の量との関係を示めしている。すなわち、属性が多くなればなるほど、それらの属性をもつものが少くなり、ものが多くなればなるほど、それらの共通の属性が少くなくなる。今、内包の集合を $A$ とし、外延の集合を $\Omega$ として、その間の関係を $R$ とする。$\tilde{R}:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(\Omega)$ を $\tilde{R}(a)=\{\omega\in\Omega \mid aR\omega\}$, $\tilde{R}(X)=\bigcap_{a\in X}\tilde{R}(a)$ によって定め、$\tilde{R}^*:\mathcal{P}(\Omega)\to\mathcal{P}(A)$ を $R$ の逆関係 $R^*$ によって定めると、$(\tilde{R},\tilde{R}^*)$ はガロア対応[34]となる。非常に一般的に言うならば、$X\in\mathcal{P}(A)$ に対して何らかの方法によって、$m(\tilde{R}(X))$ を求めること及びその基礎づけが我々の課題となる。ここで $A$ に束構造を考えた場合の1つの定理を導く。




その前に Berge にならって $X\in\mathcal{P}(\Omega)$ に対して $m(X)$ を少し拡張しておく[19]。$x\in\Omega$ に対して $m(x)$ を $x$ の測度と呼び $X\in\mathcal{P}(\Omega)$ に対して $m(X)=\begin{cases}\sum_{x\in X} m(x) & X\neq\phi \\ 0 & X=\phi\end{cases}$ と定め、$X$ の測度と呼ぶ。$m(x)=1$, $x\in\Omega$ のとき、$m(X)$ は $X$ の個数となる。$(\mathcal{L},\cdot)$ を有限半束とする。$\mathcal{L}$ が上半束ならば $\cdot$ は "join" を意味し、

下半束ならば"meet"を意味する。$R$を$\mathcal{L}$と$\Omega$との間の関係とし、$\tilde{R}:\mathcal{L}\longrightarrow\wp(\Omega)$ を$R$によって誘導された写像とする。

半束上の和積定理　$\forall x, y\in\mathcal{L}$ に対して $\tilde{R}(x\circ y)\supseteq\tilde{R}(x)\cap\tilde{R}(y)$ ならば、$m(\bigcup_{x\in\mathcal{L}}\tilde{R}(x))=\sum_{c\in C}(-1)^{\ell(c)}m(\bigcap_{x\in c}\tilde{R}(x))$、$C$は$\mathcal{L}$の鎖の全体、$\ell(c)$は鎖$c$の長さ、となる。この双対も成り立つ。[41, 42]

とくに$\mathcal{L}$として全順序集合を考えれば、普通の和積定理が導かれる。次に分割束について考える。$S$と$T$とを有限集合とし、$\{f:S\to T\}$を$\mathfrak{F}(S,T)$であらわす。分割束$PL(S)$と$PL(T)$との積による束を$\forall(\pi,\tau),(\pi',\tau')\in PL(S)\times PL(T)$に対して$(\pi,\tau)\cap(\pi',\tau')=(\pi\cap\pi',\tau\cap\tau')$、$(\pi,\tau)\cup(\pi',\tau')=(\pi\cup\pi',\tau\cup\tau')$と定め、$PL(S)\times PL(T)$とかく。このとき$PL(S)\times PL(T)$と$\mathfrak{F}(S,T)$との間の関係$\Gamma$を次のように定める。

$\forall(\pi,\tau)\in PL(S)\times PL(T)$、$\forall f\in\mathfrak{F}(S,T)$ $((\pi,\tau)\Gamma f\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}(\forall s,t\in S,\ s\pi t\longrightarrow f(s)\tau f(t)))$。

補題　$\Gamma$によって誘導された写像$\tilde{\Gamma}:PL(S)\times PL(T)\longrightarrow\wp(\mathfrak{F}(S,T))$ は $\forall x,y\in PL(S)\times PL(T)$ に対して、$\tilde{\Gamma}(x\cap y)\supseteq\tilde{\Gamma}(x)\cap\tilde{\Gamma}(y)$ かつ $\tilde{\Gamma}(x\cup y)\supseteq\tilde{\Gamma}(x)\cap\tilde{\Gamma}(y)$ を満す。この補題と半束上の和積定理により次の定理をえる。

分割束上の和積定理　$PL(S)\times PL(T)$の任意の部分半束$\mathcal{L}$に対して、$m(\bigcup_{x\in\mathcal{L}}\tilde{\Gamma}(x))=\sum_{c\in C}(-1)^{\ell(c)}m(\bigcap_{x\in c}\tilde{\Gamma}(x))$ となる。[41, 42]

とくに$S=T$のとき$\mathfrak{F}(S,T)$を$\mathfrak{F}(S)$で表わし、$\Gamma$の$PL(S)^2$の対角集合$\Delta_{PL(S)}$への制限を$\delta$で表わす。$\Delta_{PL(S)}$は$PL(S)^2$の部分束であり、$\gamma:\Delta_{PL(S)}\longrightarrow PL(S)$、$\gamma(\pi,\pi)=\pi$ によって$PL(S)$と束同型となるから、$\delta$によって誘導された写像を $\tilde{\delta}:PL(S)\longrightarrow\wp(\mathfrak{F}(S))$ とかく。この

とき分割束上の和積定理から次の系をえる。

系　PL(S)の任意の部分半束 $\mathcal{L}$ に対して

$$m(\bigcup_{\pi\in\mathcal{L}}\tilde{\delta}(\pi))=\sum_{\mathcal{C}\in C}(-1)^{\ell(\mathcal{C})}m(\bigcap_{\pi\in\mathcal{C}}\tilde{\delta}(\pi))$$ となる。[40]

いくつかの注意　(1) $\tilde{\delta}(\pi)$ は Ore[35] による $\pi$ 上の自己準同型写像の全体と一致する。(2) $\Gamma$ を $PL(S)^2$ に制限し、その逆関係によって誘導される写像 $\tilde{\Gamma}:\wp(\mathcal{F}(S))\to\wp(PL(S)^2)$ を考えると、$\forall F\in\wp(\mathcal{F}(S))$ に対して、$\tilde{\Gamma}(F)$ は J. Hartmanis と R. E. Stearns による"分割対"のなす分部束と一致する。[36] また $\delta$ の逆関係によって誘導される写像 $\tilde{\delta}^*:\wp(\mathcal{F}(S))\to\wp(PL(S))$ を考えると、$\forall F\in\wp(\mathcal{F}(S))$ に対して $\tilde{\delta}(F)$ は Hartmanis と Stearns による"S.P. 分割"のなす分割束と一致する。[36] (3) $m(\bigcap_{\pi\in\mathcal{C}}\tilde{\delta}(\pi))$ が $\pi$ をもとにして算術演算によって求まり、このことと上の系及び前出の基数合同類を用いて、自明でない"既約システムの数え上げ"が可能となる。[41]

(5) 置換群が作用した場合の数え上げの定理　"色ぬりの問題"をもとにして、Burnside, Redfield, Pólya, Bruijn, Harary らによる一連の定理[25〜31]を紹介する予定であったが、時間と紙面の都合により詳述は割愛し、我々のとらえ方[41]について少しふれておくにとどむ。グラフと置換群、あるいはブロック・デザインと置換群などについては後に機会があれば述べたいと思

まだ

う。またこの方面は数研共同研究集会"群論と組合せ論"に於て討論されている[14]。

<u>Burnside の補題</u>　X を有限集合とし，G を X 上の置換群とする。G による X の軌道（遷移関係による同値類）の全体を $\mathscr{C}$ で表わすと，$m(\mathscr{C})=(1/m(G))\sum_{\alpha\in G} m(\tilde{H}(\alpha))$，$\tilde{H}(\alpha)=\{x\in X \mid \alpha(x)=x\}$。

H を $\forall x\in X, \forall \alpha\in G$ に対して $xH\alpha \overset{def}{\Longleftrightarrow} \alpha(x)=x$ によって定まる関係とすれば $\tilde{H}$ は H によって誘導された写像であり，α をもとにして $m(\tilde{H}(\alpha))$ を求めること及び Y の基礎づけが夫々の課題となる。例えば X，G としてそれぞれ $\mathfrak{F}(S)$，S 上の対称群を考え，$f\in\mathfrak{F}(S), \alpha\in G$，に対して $\tilde{\alpha}(f)=f$（ただし $f=\begin{pmatrix}\cdots & s & \cdots\\ \cdots & f(s) & \cdots\end{pmatrix}$ に対して $\tilde{\alpha}(f)=\begin{pmatrix}\cdots & \alpha(s) & \cdots\\ \cdots & \alpha(f(s)) & \cdots\end{pmatrix}$ と定める）と $\forall s\in S$，$\alpha f(s)=f\alpha(s)$ とは同値であることに注意すれば，$F\in\mathfrak{F}(S)$ に対して，$\tilde{H}^*(F)$（$H^*$ は H の逆関係）が A. C. Fleck らによるオートマトンの自己同型群[33]であり，また M. A. Harrison は $m(\tilde{H}(\alpha))$ を求めることによって，同型でないオートマトンを数え上げたことになる[32]。

## 主な文献


(1) 窪田贍，大須賀康宏，小学算数解き方辞典，文英堂，1971.

(2) 藤崎要佐五，順列と組合せ，科学新興社，1968.

(3) 早川康弌，順列・組合せ，旺文社，1967.

(4) 小沢健一，増島高敬，「順列・組合せ」を考える，数学セミナー，1971 No.6

(5) 伊理正夫，順列・組合せの初歩，bit，1971，Vol. 3，No. 1.

(6) 森毅，順列と組合わせ，現代数学，71-5，Vol. 4，No. 6.

(7) 数理科学，特集/コンビナトリアル・セオリー，1969，Sept.
(古屋茂，山本幸一，新納文雄，伊理正夫，岩堀長慶，岩堀信子)

(8) 宮本敏雄，「写像と関数」2. 有限集合の写像 —順列と組合せ— 明治図書，1964.

(9) 花谷，村田訳，ブルバキ数学原論「集合論2」才3章 §5 東京図書，1969.

(10) H. Sharp, Jr. 著，大竹茂雄訳，組合せ数学入門，東京図書，1970.

(11) I. ニーベン著，寺田文行訳，選択の数学，—組合せ解析入門— 河出書房新社，1970.

(12) 情報理論・実験計画法における組合せ数学の諸問題 I, II 数理解析研講究録，82，95.

(13) 数学とくに整数論，組合せ論などの超大型計算，数解研講究録 155.

(14) 群論と組合せ論，数研共同研究集会予稿集，1973年2月.

(15) J. Riordan, An Introduction to Combinatorial analysis, John-Wiley 1958.

(16) H. J. Ryser, Combinatorial Mathematics, pub. by Math. Asso. Amer. dist by John-Wiley, 1963.

(17) M. Hall, Combinatorial Theory, Blaisdell Pub., 1967, Chap. 2.
(岩堀信子訳，組合せ理論，吉岡書店，1971)

(18) C. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, 1968.
(伊理正夫，由美訳，組合せ数学入門 I. II，共立全書，1972)

(19) C. Berge, Principle of Combinatorics, Academic Press. 1971.
(野崎昭弘訳，組合せ論の基礎，サイエンス社，1973)

(20) G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Vol. XXV, 1967.

(21) G. C. Rota, On the Foundation of Combinatorial Theory. I., Theory of Möbius Functions, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie 2 (1964), 340-368.

(22) L. Solomon, The Burnside Algebra of a Finite Group, J. Combinatorial Theory 2 (1967), 603-615.

(23) D. Smith, Incidence Functions as Generalized Arithmetic Functions I, II, Duke Math. J., Vol. 34, No. 4 (1967), 617-634, Vol. 36, No. 1, (1969), 15-30.

(24) R. L. Davis, Order Algebra, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 76, No. 1 (1970), 83-87.

(25) W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2nd ed., Cambridge, 1911 Theorem VII, P. 191.

(26) J. H. Redfield, The Theory of Group Reduced Distributions, Amer. J. Math., Vol. 49 (1927), 433-455.

(27) G. Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und Chemische Verbindungen, Acta Math., 68 (1937), 145-253.

(28) N. G. De Bruijn, Generalization of Polya's Fundamental Theorem in Enumerative Combinatorical Analysis, Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A, (62), 1959.

(29) F. Harary and E. M. Palmer, The Power Group Enumeration Theorem, J. Combinatorial Theory, Vol. 1, (1966), 157-173.

(30) F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, 1969, Chap. 15.

(31) E. M. Palmer and R. W. Robinson, The Matrix Group of two permutation Groups, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 204-207.

(32) M. A. Harrison, A Census of Finite Automata, Canad. J. Math. 17, 1965.

(33) A. C. Fleck, Isomorphism group of automata, J. ACM., 9 (1962), 469-476.

(34) O. Ore, Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., Vol. XXXVIII, 1962, Chap. 11.

(35) O. Ore, Theory of equivalence relations, Duke Math. J. Vol. 9 (1942).

(36) J. Hartmanis and R. E. Stearns, Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Prentice Hall, Inc., 1966, Chap. 2, 3.

(37) H. Narushima, A Theory of Partitions I, – order maps, partitions and cardinal congruencies –, 1970.

(38) H. Narushima, Order preserving maps and Classification of partially ordered sets, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ., Vol. VI (1970).

(39) M. Kamii and H. Narushima, Further results on order maps, Proc. Fac. Sci., Tokai Univ., Vol VIII (1972).

(40) H. Narushima, Partitions and Principle of inclusion-exclusion, master thesis, Tokyo Univ. of Education, 1969.

(41) 成嶋弘, On the number of minimal automata with n states, Principle of inclusion-exclusion on the family S(PL(S)), Some properties of intervals in PL(S) and numerical results in sequential machines, Order mapsについて(大矢氏と共同), Two Galois Connection in automata Theory, Order mapsについてのその後の結果(神居氏と共同), Order maps on partitions, Principle of inclusion and exclusion on semilattices, 応用数学分科会予稿集, 1968年5月 ～1972年10月.

(42) H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on semilattices. (to appear)

(43) H. Narushima, Combinatorial Theory of Partitions (to appear).