数理解析研究所講究録
180巻 1973年 60-64

n-tournamentの定義可能性と量記号の消去

学習院大　本橋信義

Xを無限集合，nを正の整数とするとき$X^{[n]}$でXの相異なるn個の元からなる集合全体をあらわす。$X^{[n]}$の元の表示を見やすくするために前もって linear order $<$がXの上に与えられているものとし，$X^{[n]}$の元は$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ の形であらわされているものとする。S_nで$\{1, 2, \cdots, n\}$の上の permatation 全体の集合をあらわす。X上のn-ary relation Rについて，

R is connected over $X \underset{\text{dif.}}{\Longleftrightarrow}$ For any $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in X^{[n]}$ there is a $\sigma \in S_n$ such that $\langle x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)} \rangle \in R$

R is antisymmetric over $X \underset{\text{dif.}}{\Longleftrightarrow}$ For any $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in X^{[n]}$ there is a $\sigma \in S_n$ such that $\langle x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)} \rangle \notin R$

と定義する（Ehrenfeucht [2]による）。Aを無限集合，RをAの上のn-ary relation とするときRがAの上のn-tournament であるとは，Aの無限部分集合Xが存在して

RをXの上に制限するとRが connected and antisymmetric over X となることと定義する（Baumgartner [1] による）。従って無限集合上の linear order は 2-tournament であり、1-tournament は存在しないことになる。この n-tournament について良く知られた結果として Ehrenfeucht [2] の

(I) First order theory T が非可算濃度で categorical ならば、いかなる n-tournament も T の model の中では定義できない。

がある。この定義の結論は Theory T が totally transcendental な場合にも成り立つことが Morley によって示されている。（[4] 参照）。本講演では、まず次の二つの事実を示す。

$R, R_1, \cdots, R_k$ を無限集合 A 上の n-ary relations とする。$1 \leq i < j \leq n$ に対して R_j^i は R の第 i 成分と第 j 成分を入れかえてできる relation とする。すると

(II)
- イ）R が n-tournament $\Longrightarrow$ $A^n - R$ も n-tournament.
- ロ）$R_1 \cup \cdots \cup R_k$ が n-tournament $\Longrightarrow$ ある $1 \leq i \leq k$ について、R_i が n-tournament.
- ハ）$R_1 \cap \cdots \cap R_k$ が n-tournament $\Longrightarrow$ ある $1 \leq i \leq k$ について、R_i が n-tournament.
- ニ）R が n-tournament $\Longrightarrow$ R_j^i も n-tournament.
- ホ）$R \times A$ が $(n+1)$-tournament $\Longrightarrow$ R は n-tournament

(Ⅲ) Unary functions と unary relations しかもたない first order structure の中ではいかなる n-tournament も open formula では定義できない。

この2つの事実から、我々は、

(Ⅳ) Unary functions と unary relations しかもたない first order structure の中である n-tournament が定義できたとすれば、その structure は量記号の消去を許さない。

を得る。McNaughton [5] によると structure $\langle A, f, U \rangle_{U \subseteq A}$, ここでAは無限集合、$f$ はAの上の unary function、は量記号の消去を許すことがわかるから、

(Ⅴ) $\langle A, f, U \rangle_{U \subseteq A}$ の中ではいかなる n-tournament も定義できない。

が得られる。(Ⅴ) を筆者は上記のような考察から得たのであるが、この結果は既に Baumgartner によって Notice of A.M.S. に発表されていた。([1] 参照)。(Ⅴ) から我々は、ω を自然数全体とすると

(Ⅵ) $\langle \omega, f, U \rangle_{U \subseteq \omega}$ の中で通常の大小関係は定義できない。

を得る。これを用いると McNaughton の結果

(Ⅶ) $\langle \omega, f, U \rangle_{U \subseteq \omega}$ の中で加法は定義できない。

が得られる。一方 Hartig [3] によると

(VIII) $\left\{\right.$ ωの上の2つのunary functions f, g をうまく取ると，$\langle \omega, f, g\rangle$の中で加法と乗法が共に定義できる。

が成り立つから(VII)はある意味で最良の結果だと言える。

以上がn-tournamentについて筆者の手許にある事実のすべてである。最後に、linear orderとunary relationsをもったstructureについての次のような予想を提出して本講演を終えたいと思う。

(IX) $\left\{\right.$ Aを無限集合、$<$をA上のlinear order、fをA^2からAへのbijectionとするとき、fは$\langle A, <, U\rangle_{U\subseteq A}$の中では定義できない。

この予想(IX)が、教育大の江田君や、埼玉大の花沢君達が研究している。

(X) $\left\{\right.$ κをinfinite cardinal、$<$をその上の通常のorderとするとき、κ^2からκへのcamonical bijectionは$\langle \kappa, <, U\rangle_{U\subseteq \kappa}$の中では定義出来るか?

という問題をspecial caseとして含むことは明らかであろう。

References

[1] J.E. Baumgartner, Undefinability of n-ary relations from unary functions, Notice of A.M.S.

[2] A. Ehrenfencht, On theories categorical in power, Fund. Math., 44 (1957), 241–248.

[3] K. Hartig, Einstellige Funktionen als Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie, Z. Math. Logic. Grundlagen Math. 5 (1959), 209–215.

[4] M. Morley, Categoricity in powers, Trans. A.M.S., 114 (1965), 514–538

[5] R. McNaughton, Undefinability of addsion from one unary operation, Trans. A.M.S., 117 (1965), 329–337.