

Algebraic Kripke model

京大理 永井 寛

中間論理など non-classical logic の研究に於いては、
semantical な方法が重要な役割を果たす。その場合、その
semantics が complete であることが不可欠な条件となる。
ところが最近、小野 [1], [2] に於いて示されたように、中間述
語論理に対しては、従来の semantics 即ち algebraic
semantics と Kripke-type semantics は いずれも
incomplete であることが分った。従って新しい semantics
が要求される訳であるが、その場合既存の二つの semantics
より powerful であることが新しい semantics として採用される
一つの条件となるであろう。ここではそのようなものとして
最も自然に得られる semantics を考えてみた。それは
algebraic semantics と Kripke-type semantics を言わ
ば張り合わせたもので、そのおのおのを特殊な場合として含
むものである。この semantics が中間述語論理に対して

complete となるか否かは 未だ知られていない。ここでは専ら中間論理に対する semantics のみを述べるが様相論理に對しても同様の semantics を定義することができる [4]。

§ 1.

descriptive constants を含まない language \mathcal{L} を固定する。 \mathcal{L} は individual variables, n -adic predicate variables ($n \neq 0$) と logical symbols $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$ を含むものとする。

Def. 1.1. 擬ブール代数 (以下 pBa と略す) P は $\kappa < \lambda$ なるすべての cardinal α に対して κ -complete であるとき $\lambda^<$ -complete であるという。同様に pBa の $\lambda^<$ -complete subalgebra, pBa 間の $\lambda^<$ -complete homomorphism 等が定義される。

Def. 1.2. Algebraic Kripke model とは次の条件を充つ triple $(M, \nabla; P)$ を云う。

1) M は空でない半順序集合 (以下 p.o.s. と略す)。その順序関係を \leq_M で表わす。

2) ∇ は M から ある集合の中集合への mapping で各 $a \in M$ に対して $\nabla(a)$ は空でない、又 $a \leq_M b$ ならば $\nabla(a) \subseteq \nabla(b)$ が成立する。

3) P は non-degenerate ならば $\kappa(M, \mathcal{V}) \leftarrow$ complete pBa. 但し $\kappa(M, \mathcal{V})$ は $\min\{\sigma \mid \exists \wedge z \text{ の } a \in M \text{ について } \sigma > \overline{\mathcal{V}(a)} \text{ かつ } \sigma > \overline{\{b \in M \mid a \leq_M b\}}\}$ である。

$(M, \mathcal{V}; P)$ を \rightarrow の algebraic Kripke model としよう (以後単に model と呼ぶことにする)。次に $(M, \mathcal{V}; P)$ -valuation を定義する。 $\mathcal{L}[\mathcal{V}]$ と $\mathcal{L} = \bigcup_{a \in M} \mathcal{V}(a)$ の各元 ξ の name $\bar{\xi}$ を付け加えた language とする。この時 $(M, \mathcal{V}; P)$ -valuation \mathcal{W} とは $\{\mathcal{L}[\mathcal{V}] \text{ の closed formula}\} \times M$ から $P \wedge$ の mapping τ . 次の条件を満足するものを云う。

1) 各 n -adic ($n \geq 0$) predicate variable $P^{(n)}$ について $a \leq_M b$ かつ $\langle \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n \rangle \in \mathcal{V}(a)^n$ ならば $\mathcal{W}(P^{(n)} \bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n, a) \leq \mathcal{W}(P^{(n)} \bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n, b)$.

$$2) \mathcal{W}(A \wedge B, a) = \mathcal{W}(A, a) \wedge \mathcal{W}(B, a)$$

$$3) \mathcal{W}(A \vee B, a) = \mathcal{W}(A, a) \vee \mathcal{W}(B, a)$$

$$4) \mathcal{W}(\neg A, a) = \bigcap_{a \leq_M b} \neg \mathcal{W}(A, b)$$

$$5) \mathcal{W}(A \rightarrow B, a) = \bigcap_{a \leq_M b} (\mathcal{W}(A, b) \supset \mathcal{W}(B, b))$$

$$6) \mathcal{W}(\exists x A, a) = \bigcup_{\xi \in \mathcal{V}(a)} \mathcal{W}(A_x[\bar{\xi}], a)$$

$$7) \mathcal{W}(\forall x A, a) = \bigcap_{a \leq_M b} \bigcap_{\xi \in \mathcal{V}(b)} \mathcal{W}(A_x[\bar{\xi}], b).$$

\mathcal{L} の formula A は ξ の universal closure A' が任意の $a \in M$ と任意の $(M, \mathcal{V}; P)$ -valuation \mathcal{W} について

$\forall(A', a) = \top_P$ を充すとき、model $(M, \forall; P)$ が valid であるという。 $(M, \forall; P)$ が valid な L の formula 全体を $L(M, \forall; P)$ とするとき、次の定理が成立する。以下 $L(M, \forall; P)$ と書くときは $(M, \forall; P)$ が model であることを仮定する。

Th. 1.3. $L(M, \forall; P)$ は modus ponens, 一般化及び代入に関して閉じてい、直観主義述語論理 LJ を含む。

Th. 1.4. 1) M が singleton $\{a\}$ ならば $L(\{a\}, \forall; P)$ は [3] に於ける $L^+(P, \forall(a))$ と一致し、 $(\{a\}, \forall; P)$ は algebraic model と見做せる。

2) P が二値のブール代数 S_1 ならば $(M, \forall; S_1)$ は従来の Kripke model であり、従って $L(M, \forall; S_1)$ は [3] に於ける $L(M, \forall)$ と一致する。

Lemma 1.5. 1) P' が P の $\kappa(M, \forall)$ -complete subalgebra ならば、 $L(M, \forall; P) \subseteq L(M, \forall; P')$ 。

2) P から $Q \wedge \kappa(M, \forall)$ -complete なる onto-homomorphism f があり、又 Q から $P \wedge$ order-preserving なる mapping f' で $f \circ f' = id_Q$ となるものがあれば、 $L(M, \forall; P) \subseteq L(M, \forall; Q)$ 。

3) (M, \forall) が [3] の意味で (M', \forall') に embeddable ならば $L(M, \forall; P) \subseteq L(M', \forall'; P)$ 。

この lemma の 1) より $L(M, \forall; P)$ が 中間述語論理 となる
一つの十分条件が得られる。

Cor. 1.6. $\overline{\forall(a)} \geq \forall$. なる $a \in M$ が存在すれば
 $L(M, \forall; P) \subseteq LK$.

§ 2

この節では特に我々の semantics の propositional part の
構造を調べる。従って model は 対 (M, P) とし $L(M, P)$ は
中間命題論理 となる。

一般に P が pBa で、 M が $p.o.s$ であるとき $[P^M]$ に よって
 M から P への order-preserving な mapping 全体の集合を表
わすと、 $[P^M]$ は

$$(f \cup g)(a) = f(a) \cup g(a)$$

$$(f \cap g)(a) = f(a) \cap g(a)$$

なる operations に よって pBa となる (小野)。但し $pBa [P^M]$
の最小元は 0_p を値にもつ constant mapping である。

$$(f \supset g)(a) = \bigcap_{a \leq m b} (f(b) \supset g(b))$$

となる。

Th. 2.1. $L(M, P) = L^+([P^M])$ 、但し $L^+([P^M])$
は algebraic model $[P^M]$ に よって特徴づけられる logic
である。

Lemma 2.2. M, N が p.o.s. で P が pBa のとき

$$1) [P^{M \times N}] \cong [[P^M]^N]$$

2) $[P^{M+N}] \cong [P^M] \times [P^N]$ 、但し $M \times N$ は M と N の直積と、 $M+N$ は M と N の直和を表わす。

$$\text{Cor. 2.3} \quad 1) L(M \times N, P) = L(N, [P^M]) \\ = L(M, [P^N])$$

$$2) L(M+N, P) = L(M, P) \cap L(N, P).$$

M を finite p.o.s. $A \in \mathcal{L}$ の formula (propositional) とする。
今 A の各 subformula B と各 $a \in M$ に対し formula $\delta_a^A(B)$ を次のように帰納的に定義する。 A の propositional variables P_i ($1 \leq i \leq n$) の各々に対し M 個のコピー $\{P_{ia} \mid a \in M\}$ (但し P_{ia} は A に現われないときは) と用意する。

$$1) \delta_a^A(P_i) = \bigwedge_{b \in M} P_{ib}$$

$$2) \delta_a^A(B \wedge C) = \delta_a^A(B) \wedge \delta_a^A(C)$$

$$3) \delta_a^A(B \vee C) = \delta_a^A(B) \vee \delta_a^A(C)$$

$$4) \delta_a^A(\neg B) = \bigwedge_{b \in M} \neg \delta_b^A(B)$$

$$5) \delta_a^A(B \rightarrow C) = \bigwedge_{b \in M} (\delta_b^A(B) \rightarrow \delta_b^A(C)).$$

Th. 2.4. M が finite p.o.s. のとき $A \in L(M, P)$ となる必要十分条件は $\bigwedge_{a \in M} \delta_a^A(A) \in L^+(P)$ 。

Cor. 2.5. 1) M が finite p.o.s. と P_1, P_2 が pBa と $L^+(P_1) \subseteq L^+(P_2)$ ならば $L(M, P_1) \subseteq L(M, P_2)$.

2) M_1, M_2 が p.o.s.、 P が finite pBa と $L(M_1) \subseteq L(M_2)$ ならば $L(M_1, P) \subseteq L(M_2, P)$.

3) M が finite p.o.s.、 P が pBa と $L^+(P)$ が decidable ならば $L(M, P)$ も decidable.

4) M が finite p.o.s. で最小元を持ち、 P が pBa と $L^+(P)$ が disjunction property を持つならば $L(M, P)$ も disjunction property を持つ。

さて lemma 1.5 より $L(M, P) \subseteq L(M) \cap L^+(P)$ が成立するが等号が一般に成立しないことは次の定理により知られる。

Th. 2.6. M, N が p.o.s. と $L(M) \in \mathcal{S}_m, L(N) \in \mathcal{S}_n$ ($m, n < \omega$) ならば $L(M, [S,]N) \in \mathcal{S}_{m+n-1}$.

References

- [1] H. Ono : Incompleteness of semantics for intermediate predicate logics I, — Kripke's semantics, to appear.
- [2] H. Ono : Incompleteness of semantics for intermediate predicate logics II, — The algebraic semantics, to appear.
- [3] H. Ono : A study of intermediate predicate logics, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.
- [4] S. Nagai : On a semantics for non-classical logics, unpublished.