

ランダム結合神経網における興奮領域の成長

—ニューロン場モデルによる取扱—

大阪工大 奥田賢三

Ashby¹⁾は互いにランダムに結合された全く同質の M 個の McCulloch-Pitts ニューロンからなる孤立した神経網について議論し、つぎのように結論した。 $t=0$ のとき、 M 個のうち Mp_0 個のニューロンが興奮していたとする。このとき p_c ($0 < p_c < 1$) なる値が存在し、もし $p_0 < p_c$ ならば興奮するニューロンの数 Mp は時間とともに減少し、ついに 0 となる。逆に $p_0 > p_c$ ならば興奮ニューロンの数 Mp は時間とともに増大し、ついに M となる。したがってニューロンが発火するかどうかの閾値が存在するのと同様、ランダム結合の神経網についても全体が興奮するかどうかの閾値 p_c が存在する。

Griffith²⁾はランダム結合神経網を連続的なものとみなして、ニューロン場 $\psi(r, t)$ に関して

$$\left(a + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \Psi(r, t) - \nabla^2 \Psi(r, t) = R f[\Psi(r, t)], \quad (1)$$

なる方程式を導いた。ここで $\Psi(r, t)$ は PSP に対応し、 $f[\Psi]$ はニューロンの発火率に対応する。 v はスパイクの軸索伝導速度で、 a と R は神経網の特性をあらわす正の定数である。

グリーン関数の方法を用いて、ニューロン場の方程式 (1) の積分表示が 1次元の場合つきのように得られる。

$$\Psi(x, t) = \int_0^\infty ds \int_{-vs}^{vs} d\xi \frac{Rv}{2} e^{-avs} f[\Psi(x-\xi, t-s)]. \quad (2)$$

ここで、 $X_f(x, t) = f[\Psi(x, t)]$ とおくと (2) からニューロン発火率 $X_f(x, t)$ についての方程式

$$X_f(x, t) = f\left[\int_0^\infty ds \int_{-vs}^{vs} d\xi \frac{Rv}{2} e^{-avs} X_f(x-\xi, t-s)\right] \quad (3)$$

が得られる。積分形 (3) は (1) にくらべて物理的意味を直観的に把握しやすく、解析が容易である場合も多い。

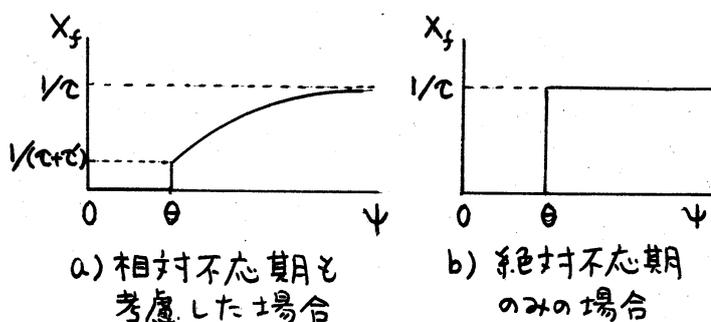


図1. 発火率とPSPの関係

θ : ニューロン発火の閾値

τ : 絶対不応期

τ' : 相対不応期

一般に 発火率 X_f と PSP ψ の関係は 図 1. a) のようになると思えることができる。もし 相対不応期を無視できるとすれば、図 1. b) のように

$$X_f = f[\psi] = \frac{1}{\tau} 1[\psi - \theta] \equiv \begin{cases} 1/\tau, & (\psi \geq \theta) \\ 0, & (\psi < \theta) \end{cases} \quad (4)$$

となる。以下 この場合について議論をすすめる。

$X(x, t) = \tau X_f(x, t)$ とおく。 $X = 1$ の領域ではニューロンは一定の高頻度 $1/\tau$ で発火している。この領域を興奮領域 (active region) とよぶことにする。一方 $X = 0$ の領域ではニューロンは全く発火しない。この領域を休止領域とよぼう。

(3), (4) から $X(x, t)$ の満足すべき方程式は

$$X(x, t) = 1 \left[\int_0^{\infty} ds \int_{-vs}^{vs} d\zeta \frac{Rv}{2\tau} e^{-avs} X(x-\zeta, t-s) - \theta \right], \quad (5)$$

となる。この (5) は Caianiello 方程式に形式的に類似しているが、時間目盛には決定的な違いがあり、ニューロン場の方程式は神経網のより巨視的な振舞いを記述する方程式である。なお (5) は 不応期の扱いの点で Caianiello 方程式より扱いやすくなっている。さらに $\bar{X}(x, t) = 1 - X(x, t)$ とおくと (5) から $\bar{X}(x, t)$ についての方程式

$$\bar{X}(x,t) = 1 \left[\int_0^\infty ds \int_{-vs}^{vs} d\zeta \frac{kV}{2\tau} e^{-aV s} \bar{X}(x-\zeta, t-s) - \bar{\theta} \right] \quad (6)$$

が得られる。ここで

$$\bar{\theta} = k/(\tau a^2) - \theta$$

$$1'[\mu] \equiv \begin{cases} 1, & (\mu > 0) \\ 0, & (\mu \leq 0) \end{cases}$$

である。 $\bar{X} = 1$ は休止領域, $\bar{X} = 0$ は興奮領域に対応する。

X が 0 か 1 の値しかとりえないことを考えると (5) から $a^2 \tau \theta / k \leq 0$ (すなわち $\theta \leq 0$) のときは つねに $X(x,t) = 1$, $a^2 \tau \theta / k > 1$ のときは つねに $X(x,t) = 0$ であることがわかる。なお $a^2 \tau \theta / k = 1$ のときは $X(x,t) = 1$ なる解も存在するが, 明らかにこれは不安定な解である。つぎに $0 < a^2 \tau \theta / k < 1$ の神経網について考えよう。(1) あるいは (5), (6) の解析から以下のことが得られる。

① 臨界興奮領域, 臨界休止領域

i) $0 < a^2 \tau \theta / k < 0.5$ の場合

このとき, 1つの定常分佈

$$X(x,t) = X_{ac}(x) \equiv \begin{cases} 1, & (0 \leq x \leq L_{ac}) \\ 0, & (-\infty < x < 0 \text{ or } L_{ac} < x < \infty) \end{cases} \quad (7)$$

ただし

$$L_{ac} = -(1/a) \log(1 - 2a^2 \tau \theta / R), \quad (8)$$

が存在する。神経網内に唯1個の興奮領域があり、 $\tau < 0$ では外部からの制御により興奮領域が不変に保たれたとしよう。その興奮領域の大きさを L_a とする。外部からの制御が $\tau = 0$ で取り除かれたとする。そのときもし $L_a < L_{ac}$ であれば興奮領域は時間とともに小さくなり、ついには神経網全体が休止領域になる。一方、 $L_a > L_{ac}$ であれば初期の興奮領域の神経網全体に占める割合は無限小であるにもかかわらず、興奮領域は拡大していき、ついには神経網全体が興奮領域になる。

ii) $0.5 < a^2 \tau \theta / R < 1$ の場合

このとき $0 < a^2 \tau \bar{\theta} / R < 0.5$ となるから、(6)より $X(x, t)$ について i) と同じ議論ができる。したがって

$$X(x, t) = X_{rc}(x) \equiv \begin{cases} 0, & (0 < x < L_{rc}) \\ 1, & (-\infty < x \leq 0 \text{ or } L_{rc} \leq x < \infty) \end{cases} \quad (9)$$

ただし

$$L_{rc} = -(1/a) \log(2a^2 \tau \theta / R - 1), \quad (10)$$

なる定常解が存在する。神経網内に唯1個の休止領域があって、その大きさを L_r としよう。十分長い時間この状態が

外部制御によって続いてきたとしよう。外部からの制御が取除かれたあと、もし $L_r < L_{rc}$ であれば休止領域は時間とともに小さくなり、ついには神経網全体が興奮領域になる。逆に $L_r > L_{rc}$ であれば、初期の休止領域の神経網全体に占める割合は無限小であるにもかかわらず、休止領域は拡大していき、ついには神経網全体が休止領域になる。

② 興奮領域の拡がり速度

つぎに 興奮領域の拡がり方を調べよう。

$0 < \alpha^2 \tau \theta / R < 1$ のとき つぎのような解が存在する。

$$X(x, t) = 1 [u t - x], \quad (11)$$

ただし

$$u = (1 - 2\alpha^2 \tau \theta / R) v. \quad (12)$$

したがって u は半無限の興奮領域と半無限の休止領域が接触しているときの 興奮領域の拡がり速度である(図2. 参照)。

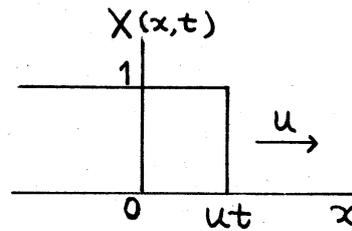


図2.

$0 < \alpha^2 \tau \theta / R < 0.5$ のとき $u > 0$ すなわち興奮領域が拡がっていく。一方 $0.5 < \alpha^2 \tau \theta / R < 1$ ならば、 $u < 0$ すなわち興奮領域が縮小していくことがわかる。なお、例え

は $0 < a^2 \tau \theta / R < 0.5$ のとき, Lac より大なる興奮領域が \square で述べたように成長して十分大きくなったとき, 興奮領域が両方向に拡がっていくときの速さが (12) で与えられる u であると考えられる. v は巨視的な興奮領域をつくりだす原因となる微視的スパイクの伝導の速さである. (12) は速度比 u/v の神経網特性に対する依存性を示している.

文献

- 1) W.R.Ashby et al.: Nature 196(1962)561.
- 2) J.S.Griffith: Mathematical Neurobiology (Academic Press, New York, 1971) p.75.

[Discussion]

Q. 周期解はでてこないか。

A. 今の場合でてこない。

C. Griffith の方程式は *excitatory* ばかりだからでないの
でしょう。

Q. 発火率を考えているのだから部分的には *reverberation*
が起っていることもあるわけですね。

A. Griffith の方程式は系の状態を大まかに記述するもの
と考えられるのでこまかい点は出てこない。

Q. Caianiello の記憶方程式をこの様式に直すとか、
inhibitory を考えるようなことはされているか。

A. 場所によって *inhibitory* の素子があったり、 a, b
に素子間の相互作用を入れるようなことを現任考えている。

Q. 2次元はどうか。

A. 今考えている。