

Neuron の action potential に関する Zeeman 方程式について。

大阪市立大学 理学部

田尾 嘉三

これまで微分方程式をもちいて現象を解析する過程は、次の順序をたどるのが常とした。

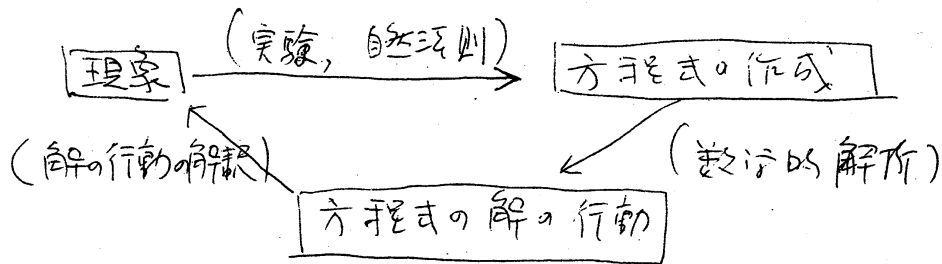
1° 現象において基本的な要因と思われる変量と変数に与らる。

2° 変量間の物理的、化学的、その他自然科学的法則あるいは実験より、変量内に成立する関係式、すなわち微分方程式をつくる。

3° 作らした微分方程式を数学的に解析する。

4° その解の行動より現象を解析する。

図式で示せば、



上の図式を逆にたどることは出来ないだろうか？

すなわち、現象より解の行動の推測をたどるとき、その解の行動より、解がどのような行動をする微分方程式を作成し、微分方程式にあらわされる変数内の関係と解が明らか自然法則

を見出すこと、また変数に対応する基本的要因を見つけ出すこと。さらに又その存在を実験の指針にすることは不可能であらうか？

公理的思考方法は近代数学の一つの基本的思考方法であり、応用数学にあらわされる微分方程式には、*ad hoc* 的・学構成的方法が「かにも多」い。その中には「2 解の行動に公理的な理想制を与えて、公理を満足する方程式を分類することを実行することは極めて意義深い」と思われる。

そのためには、方程式の解の行動から方程式を分類する数学的理論が可成り発展してこなければならない。近年の力学系の位相的研究、とくにその中でも前衛的なる R. Thom による「catastrophe の理論」はそのような方向への一歩前進を約束する。

Neuron の action potential に関する微分方程式は Hodgkin - Huxley の微分方程式が有名。それは現象から実験的・自然科学的法則より作られた、その意味において、古典的学構成的方程式である。

とすると action potential の行動は極めて明白である。可成り

1° 静止 (平衡) 状態

2° 行動への同値の存在

3° 急激な行動

4° 3°と比較して、 $\mu < 1$ と平衡状態への復帰、

$\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ と仮定して、その解からそのような行動を示す方程式を全て探すと見つかるか？

R. Thom の理論によると、“位相的に同値”な分類は微分方程式の

おいて、そのような方程式は、次に示す方程式に本質的に同値である。

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -(x^3 + ax + b) & (\varepsilon > 0) \\ \dot{a} = -2a - 2x \\ \dot{b} = -a - 1 \end{cases}$$

この基本的な型から実験に合うような式を（同値類の中から）探すと、やはり ad hoc 的な修正を伴って探さなければならない。第1式は基本的なものであるが、第2、第3式を修正して、E.C. Zeeman は次の方程式を得た。

$$\dot{x} = -1.25 (x^3 + ax + b)$$

$$\dot{a} = \{x + 0.06(a + 0.5)\} \{x - 1.5a - 1.67\} \{0.054(b - 0.8)^2 + 0.75\}$$

$$\dot{b} = -2.38[a + 0.5]_+ (b + 1.4) - (4[x + 0.5]_-)^2 (b - 4.95) - 0.15(b - 0.15)$$

$$\therefore [y]_+ = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}, \quad [y]_- = \begin{cases} 0 & y \geq 0 \\ y & y < 0 \end{cases}$$

とある。

文献

E.C. Zeeman: Differential equations for heartbeats
and nerve impulses,
Towards a theoretical biology, 4,
(Ed. C.H. Waddington, E.U.P. 1972)