Title	De Sitter群の一様有界表現 (ユニタリ表現論とその応用)
Author(s)	川西, 啓一
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 182: 196-210
Issue Date	1973-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/107153
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
182巻 1973年 196-210

De Sitter群の一様有界表現

阪大 基礎工 川 西 啓 一

§1. 序文

$SL(2,\mathbb{R})$および$SL(2,\mathbb{C})$に関しては，それらの一様有界表現が構成され，その応用として matrix element を使ってすべての既約ユニタリー表現が分類されている。(cf. [2], [3]) 我々はここで De Sitter 群について上記の考察を行なう。その際，[4]の表現 $g \mapsto R(g,n,s)$ が complementary series の表現を部分的に含むものであることを示し，表現 $g \mapsto R(g,n,s)$を使って De Sitter 群について Hausdorff－Young の定理 Lp convolution 定理，Riemann－Lebesgue lemma を導く。最後にこれらの定理によって既約ユニタリー表現の分類を実行する。

G を De Sitter 群の universal covering group とし，$\mathbb{H}$ を quaternion field とする。 $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \mathbb{H}$, x_1, x_2 $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k,$$

$$\hat{x} = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k,$$

$$|x| = (x\bar{x})^{1/2} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}$$

$$U = \{x \in \mathbb{H} ;\ |x| = 1\},\quad Z = \{x \in \mathbb{H} ;\ x_4 = 0\}$$

とおく。 G は 2×2 quaternion matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad \hat{a}c = \hat{c}a,\ \hat{b}d = \hat{d}b,\ \hat{a}d - \hat{c}b = 1$$

全体からなる群と同一視されることが[6], Chap II に示されている。

$$G = KA_+N \quad (\text{岩沢分解})$$

ただし

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & -\hat{b} \\ b & a \end{pmatrix} ;\ |a|^2 + |b|^2 = 1,\ a\hat{b} = b\hat{a} \right\},$$

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix} ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} ;\ x \in Z \right\}$$

M' および M を K における A_+ の normalizer, centralizer とすると,

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\hat{u} \\ u & 0 \end{pmatrix} ;\ u \in U \right\}$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} ;\ u \in U \right\}$$

を得る。 θ を Cartan involution とし, $\bar{N} = \theta N$ とおくと,

$$\bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ z \in Z \right\}$$

である。これらの subgroups について measure zero を除いて $G=\mathbb{T}MA_+N$ と分解される。$T=MA_+N$, $\mathbb{W}=M'/M$ (Weyl group) とし、$\mathbb{W}$ の代表元として $e=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ と $p=\begin{pmatrix}0&-k\\k&0\end{pmatrix}$ をとる。そのとき Bruhat 分解 $G=T\cup TpT$ (disjoint) を得る。

次に、G は左から $\mathcal{Z}$ に act し、次の式で定義される。

$$g\cdot z=(az+b)(cz+d)^{-1}$$

ただし、$g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$, $z\in\mathcal{Z}$ である。また、

$$\begin{cases}\omega_G(g,z)=|cz+d|^2,\\ u_G(g,z)=(cz+d)/|cz+d|\end{cases}$$

とおくと ω_G および u_G は multipliers である。

§2. G の表現について

Continuous principal series の既約ユニタリー表現は[6]に記述されている。それらは2つの parameters (n,s), $n\geq 0$ half-integer, $s=3/2+it$, をもつ表現 $g\mapsto \mathbb{T}_g^{n,s}$ として与えられる。n に対して $(2n+1)$ 次元 Hilbert 空間 $\mathbb{V}^n$ 上の $SU(2)$ の既約ユニタリー表現 ρ^n を考える。そのとき $\mathbb{T}_g^{n,s}$ は $\mathcal{Z}$ 上で定義された $\mathbb{V}^n$-valued 2乗可積分関数全体よりなる Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の作用素として定義され、explicit には次の形である。

$$(2.1)\quad (\mathbb{T}_g^{n,s}f)(z)=\omega_G(g^{-1},z)^{-s}\rho^n(u_G(g^{-1},z)^{-1})f(g^{-1}\cdot z),\quad f\in\mathfrak{H}$$

次に (2.1) から complementary series の既約ユニタリー表現の explicit な形を得る。

$\mathfrak{H}_{n,\sigma}$ ($\sigma\in\mathbb{R}$) を Z 上で定義された V^n-valued 関数で

$$\|f\|_{n,\sigma}^2 = C_\sigma^n \iint_{ZZ} |u-v|^{-6+2\sigma} < f(u), f(v) >_{V^n} du\,dv < +\infty$$

を満たすもの全体の作る Hilbert 空間とする。ただし，$C_\sigma^n = (2n+1)^{-1} 2^{3-2\sigma} \pi^{-3/2} \Gamma(-3/2+\sigma)/\Gamma(3-\sigma)$ である。そのとき

(1) $3/2<\sigma<3$ に対して，表現 $g\mapsto V_g^{0,\sigma}$ on $\mathfrak{H}_{0,\sigma}$ は class 1 の complementary series の表現である。

(2) positive integer n と $3/2<\sigma<2$ に対して，表現 $g\mapsto V_g^{n,\sigma}$ on $\mathfrak{H}_{n,\sigma}$ は n に対応する complementary series の表現である。

§3. G の一様有界表現

[4]と同様の方法によって次の定理を得る。得られる表現 $g\mapsto R(g,n,s)$ に関しては[4]の結果と一致するが，さらにそれが Complementary series をも部分的に含むことが分る。

定理1. $n\geq 0$ を half-integer とする。そのとき以下の条件を満たす表現 $g\mapsto R(g,n,s)$ of G on $\mathfrak{H}$ が存在する；

(1) $g\mapsto R(g,n,s)$ は continuous，ただし，$n\geq 0$ half-integer，$1/2<\mathrm{Re}\, s<5/2$，

(2) $\mathrm{Re}\, s=3/2$ のとき，$g\mapsto R(g,n,s)$ は Continuous principal series の表現にユニタリー同値，

(3) $n=0$，s が実数で $3/2<s<5/2$ のとき，$g\mapsto R(g,n,s)$ は class 1 の Complementary series の表現にユニタリー同値，

(4) $n \geqq 1$ integer, s が実数で $3/2 < s < 2$ のとき, $g \mapsto R(g, n, s)$ は n に対応する Complementary series の表現にユニタリー同値,

(5) $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ ならば, 各 fixed $g \in G$, $n \geqq 0$ half-integer に対して $s \mapsto (R(g, n, s)\xi, \eta)$ は $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 5/2$ で analytic,

(6) $\sup\limits_{g \in G} \| R(g, n, s) \|_\infty \leqq K_\sigma (1+n)(1+|t|)^4$, $s = \sigma + it$, $1/2 < \sigma < 5/2$, $n \geqq 0$ half-integer, $\|\cdot\|_\infty$ は operator norm を表わし, K_σ は $(1/2, 5/2)$ の任意の closed subinterval 上で一様有界にとれる.

(証明) (3), (4) を除いては [4] にその証明が与えられている。(3), (4) を証明するために $n \geqq 0$ integer, $0 < \sigma < 3$ に対して, Z 上で定義された V^n-valued 関数で

$$\|F\|_{n,\sigma}^2 = \int_Z |F(z)|_{V^n}^2 \cdot |z|^{3-2\sigma} dz < +\infty$$

を満たすもの全体のつくる Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{n,\sigma}$ を導入する。$s_1 = \sigma_1 + it_1$, $s_2 = \sigma_2 + it_2$, $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 3$, $-\infty < t_1, t_2 < +\infty$ に対して $\mathfrak{H}_{n,\sigma_1}$ 上の operator $W(s_1, s_2)$ を

$$(W(s_1, s_2)F)(z) = |z|^{s_2 - s_1} F(z), \quad F \in \mathfrak{H}_{n,\sigma_1}$$

によって定義すれば, $W(s_1, s_2)$ は $\mathfrak{H}_{n,\sigma_1}$ から $\mathfrak{H}_{n,\sigma_2}$ の上への isometry で, $W(s_2, s_1)$ は $W(s_1, s_2)$ の inverse mapping である。さらに R^3 上の Fourier 変換を $\mathcal{F}$ で表わせば, $\mathcal{F}\mathfrak{H}_{n,\sigma} = \mathfrak{H}_{n,\sigma}$ であることが分り, [4] における intertwining operator $A(s) = \mathcal{F}^{-1} W(s, 3/2) \mathcal{F}$ for $\mathrm{Re}\, s \geqq 3/2$, が成立する。これらの事と $R(g, n, s)$ の analyticity によって (3), (4) を得る。　　(証明終り)

§4. G の Fourier analysis

$f \in L_1(G)$, $n \geqq 0$ half-integer, $s \in \mathbb{C}$ $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 5/2$ に対して f の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(n,s) = \int_G f(g) R(g,n,s)\, dg$$

によって定義する。fixed n, s, $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 5/2$ に対して $R(g,n,s)$ は一様有界表現であるから $\mathcal{F}(n,s)$ は well-defined で $\mathfrak{H}$ 上の bounded operator である。さらに，各 fixed n に対して $\mathcal{F}(n,s)$ は $1/2 < \mathrm{Re}\, s < 5/2$ において s の analytic function である。

定理 2 (Hausdorff-Young 定理) $1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$, $s = \sigma + it$, $(1/p + 5/q)/2 < \sigma < (5/p + 1/q)/2$, $\sigma \neq 3/2$ とする。そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ と constant $A(p,\sigma,\varepsilon)$ が存在して

$$(4.1)\qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n,s)\|_q^q (1+|t|)^{2-4|\sigma-3/2|q-\varepsilon} dt\right)^{1/q} \leqq A(p,\sigma,\varepsilon)(1+n)^{|\sigma-3/2|\tau(1+\delta)/(1-\tau)+\tau-1} \|f\|_p,$$

を満たす。ただし，$f \in S_0(G)$, G 上の compact support をもつ simple function の全体からなる集合，$\|A\|_p^p = \mathrm{tr}(|A|^p)$, $|A| = (A^*A)^{1/2}$, τ は $1/p = 1 - \tau/2$ によって与えられ，$0 < \tau < 1$ である。

(証明) 最初に定理 1 の (6) は次の様に強められる；

任意の $\delta > 0$ に対して

$$\sup_{g \in G} \|R(g,n,s)\|_\infty \leqq A_{\sigma,\delta} (1+n)^{|\sigma-3/2|(1+\delta)} (1+|t|)^{4|\sigma-3/2|(1+\delta)}$$

また $\mathcal{F}(n,s)$ の定義によって

$$\|\mathcal{F}(n,s)\|_\infty \leqq \sup_{g\in G} \|R(g,n,s)\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

これらの不等式から次のことを得る；

任意の $\delta>0$, $1/2<\sigma<5/2$ に対して

$$(4.2) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^{-4|\sigma-3/2|(1+\delta)} \|\mathcal{F}(n,\sigma+it)\|_\infty$$
$$\leqq A_{\sigma,\delta}(1+n)^{|\sigma-3/2|(1+\delta)}\|f\|_1, \quad f\in S_0(G)$$

が成立する。さらに G に対する Planchérel の定理 (cf. [5]) によって

$$\|f\|_2^2 \geqq \frac{1}{16\pi^2}\sum_{\substack{n\geqq 0\\ \text{half-integer}}} (2n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n,3/2+it)\|_2^2\,[(n+1/2)^2+t^2]$$
$$\times\, t\cdot \tanh(\pi t+in)\,dt$$

故に

$$(4.3) \qquad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathcal{F}(n,3/2+it)\|_2^2\cdot |t|^3/(1+|t|)\,dt\right)^{1/2}$$
$$\leqq 4\pi(2n+1)^{-1}\cdot\|f\|_2$$

$(1/p+5/q)/2<\sigma<3/2$ と仮定する。α を $1/2<\alpha<\sigma<3/2$ として、(4.2) を σ の代りに α に置き換えると、

$$(4.4) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} (1+|t|)^c \|\mathcal{F}(n,\alpha+it)\|_\infty \leqq A_{\alpha,\delta}(1+n)^{-c/4}\|f\|_1,$$

$c=4(\alpha-3/2)(1+\delta)$ 　α を $\sigma=\alpha(1-\tau)+3\tau/2$ に取って、(4.3) と (4.4) に定理 4 ([2], p.16) を適用する。定理 4 の notation で

$$c=4(\alpha-3/2)(1+\delta),\quad a=3/2,\quad b=-1/2$$

と取ると

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(n,\sigma+it)\|_q^q\,(1+|t|)^{qd}\,dt\right)^{1/q} \leqq A(\tau,\alpha,\delta,n)\,\|f\|_p$$

$f \in S_0(G)$ を得る。 ここで[2]における同様の議論により，

$$qd \geq 2 - 4q|\sigma - 3/2| - \varepsilon$$

$$A(\tau, \alpha, \delta, n) = A(p, \sigma, \delta)(1+n)^{|\sigma-3/2|\tau(1+\delta)/(1-\tau)+\tau-1}$$

が得られる。 $3/2 < \sigma < (5/p + 1/q)/2$ の場合にも $\mathcal{F}(n, s) = \mathcal{F}(n, 3-s)$ であることを使って同様に証明される。 （証明終り）

$\Phi(s) = (\mathcal{F}(n,s)\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ に Phragmen-Lindelöf principle を適用することにより以下の系が得られる。(cf. [2])

系 2.1. 各 p, $1 \leq p < 2$ に対して

(4.5) $$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathcal{F}(n, 3/2 + it)\|_\infty \leq A_p \|f\|_p, \quad f \in S_0(G)$$

ただし，A_p は p のみに depend する constant である。

系 2.2. 各 p, $1 \leq p < 2$, $(1/p + 5/q)/2 < \sigma < (5/p + 1/q)/2$, $s = \sigma + it$ に対して，

(4.6) $$\|\mathcal{F}(n,s)\|_\infty \leq A_{p,n,s} \|f\|_p, \quad f \in S_0(G)$$

次に Discrete series の表現を $D^{n,r;+}$, $D^{n,r;-}$ で表わす。ここで n, r: half-integer, $n \geq r \geq 1$, $n-r$: integer である。(cf. [6])

$$D_f^{n,r;\pm} = \int_G f(g) D_g^{n,r;\pm} dg, \quad f \in L_1(G)$$

とおく。

定理 3. $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$ とすると，

$$\frac{1}{4\pi}\Big\{\sum_{\substack{n \geq 1 \\ \text{half-integer}}} (2n+1) \sum_{\substack{n \geq r \geq 1 \\ n-r;\ \text{integer}}} (2r-1)(n+r)(n-r+1)\big(\|D_f^{n,r;+}\|_q^q$$

$+\|D_f^{n,r;-}\|_q^q)\}^{1/q} \leq \|f\|_p, \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$

これは定理2と同じ方法で証明される。

系3.1. Mapping $f \mapsto D_f^{n,r;\pm}$ は L_p 全体への unique な拡張をもち，この拡張は次の不等式を満たす。

$$\sup_{n,r;\pm} \|D_f^{n,r;\pm}\|_\infty \leq (2\pi/3)^{1-1/p} \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq 2 \tag{4.7}$$

2つの関数 f, h に対して，それらの Convolution を

$$(f * h)(g_0) = \int_G f(g_0 g^{-1}) h(g)\, dg$$

で定義する。(4.5), (4.7) および Hilbert 空間上の bounded operators からなる Banach 空間の一般論 (cf. [2]) を結びあわせると，計算によって次の結論を得る。

定理4.1. (L_p convolution 定理) $f \in L_2(G)$, $h \in L_p(G)$, $1 \leq p < 2$ とする。$k = f * h$ とおくと，

$$k \in L_2(G), \quad \|k\|_2 \leq C_p \|f\|_2 \|h\|_p, \tag{4.8}$$

ただし，C_p は f および h に independent である。すなわち L_p 関数 ($1 \leq p < 2$) による convolution の operation は $L_2(G)$ 上の bounded operator である。

定理4.2. $f, h \in L_2(G)$, $k = f * h$ とすると，

$$k \in L_q(G), \ 2 < q \leq \infty, \quad \|k\|_q \leq C_q \|f\|_2 \|h\|_2, \tag{4.9}$$

ここでC_qはfおよびnに independent である。

(4.6)における constant $A_{p,n,s}$ をさらに詳細に調べることによって次の定理を得る。(cf. [2], [3])

定理5 (A Riemann-Lebesgue lemma) $n \geqq 0$, half-integer, $1 \leqq p < 2$, $f \in L_p(G)$ とする。そのとき, $\|\mathcal{F}(n, 3/2+it)\|_\infty$ は infinity で 0 になる。

§5. Continuous principal series の characterization

$g \mapsto U_g$ を Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ における G のユニタリー表現とする。

定義. $g \mapsto U_g$ が fixed p, $p \geqq 1$ に対して extendable to $L_p(G)$ であるとは

$$\|U(f)\|_\infty \leqq A\|f\|_p \ , \quad f \in L_1(G) \cap L_p(G)$$

が成立することである。ただし, A は f に independent で, $U(f) = \int_G f(g) U_g \, dg$ である。

次の lemma は [2] による。

Lemma. 表現 $g \mapsto U_g$ が extendable to $L_p(G)$ であるための必要十分条件は, 任意の $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ に対してすべての matrix element $\phi(g) = (U_g \xi, \eta)$ が $L_q(G)$ に属することである。ここで $1/p + 1/q = 1$ である。

Remarks. G の正則表現は (4.8) によって $L_p(G)$, $1 \leqq p < 2$ に extendable である。再び (4.9) によって正則表現のすべて

の matrix element は $L_q(G)$, $q>2$ に属する。

すべての matrix element は $L_\infty(G)$ に属するので、matrix element が $L_{q_0}(G)$ に属するならば、それはまた $L_q(G)$, $q \geqq q_0$ に属している。故に lemma によって、表現が $L_{p_0}(G)$, $p_0>1$ に extendable ならば、それはまた $L_p(G)$, $1 \leqq p \leqq p_0$ に extendable である。

定理 6. $g \mapsto U_g$ を恒等表現および non square-integrable 表現と異なる G の既約ユニタリー表現とする。そのとき U は、(1) Continuous principal series, (2) Complementary series, (3) Discrete series, (4) Limits of Discrete series, のいずれかの表現に同値である。さらに、

(i) U が (1) または (4) の表現にユニタリー同値。

$\Leftrightarrow$ U は $L_p(G)$, $1 \leqq p < 2$ に extendable であるが、$L_2(G)$ に extendable でない。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q>2$ に属するが、$L_2(G)$ に属さないものが存在する。

(ii) U が $n=0$ に対しては $3/2 < \sigma < 5/2$, $n \geqq 1$ integer に対しては $3/2 < \sigma < 2$ である parameter σ に対応する (2) の表現にユニタリー同値。

$\Rightarrow$ U は $L_p(G)$, $p < 4/(2\sigma - 1)$ に extendable。

$\Leftrightarrow$ すべての matrix element が $L_q(G)$, $q > 4/(5-2\sigma)$ に

属する。

(iii) Uが(3)の表現にユニタリー同値。

$\Leftrightarrow$ Uは$L_2(G)$にextendable。

$\Leftrightarrow$ すべてのmatrix elementが$L_2(G)$に属する。

(証明) [1]において，Gのすべての既約ユニタリー表現は恒等表現およびnon square-integrable表現を除いて，(1), (2), (3), (4)のいずれかの表現にユニタリー同値であることが示されている。

(4.5)によって(1)のすべての表現は$L_p(G)$, $1 \leq p < 2$にextendableであり，(4.7)によって(3)のすべての表現は$L_2(G)$にextendableである。strict half-integer nに対する表現$g \mapsto V_g^{n,3/2}$は(4)の2つの表現の直和である。(cf. [6]) $V_g^{n,3/2}$は$L_p(G)$, $1 \leq p < 2$にextendableであるから，(4)のすべての表現もまた$L_p(G)$, $1 \leq p < 2$にextendableである。最後に(4.6)によって$n=0$に対して$3/2 < \sigma < 5/2$, $n \geq 1$ integerに対して$3/2 < \sigma < 2$であるσに対応する(2)の表現は$L_p(G)$, $1 \leq p < 4/(2\sigma - 1)$にextendableである。

次に(1)または(4)のすべての表現が$L_2(G)$にextendableでないことを示さなければならない。最初に(1)について考える。lemmaによって，$L_2(G)$に属さないmatrix elementの存在を示せば十分である。[1]によって，$t \to \infty$のとき，

$$\phi(a_t)=(T_{a_t}^{n,s}f,f)\sim \mathrm{Re}\left[\lambda \exp\{(-3/2+i(\sigma-1/4)^{1/2})t\}\right],$$

ただし，$s=3/2\pm i(\sigma-1/4)^{1/2}$，$\lambda\neq 0$，$dg=2\pi^2\sinh^3 t\ dt\,dk\,dk'$

従って，$\phi(a_t)\notin L_2(G)$ である。(4)の表現に対しては，

$t\to\infty$ のとき，

$$\phi(a_t)\sim\lambda e^{-3t/2}$$

従って，$\phi(a_t)\notin L_2(G)$ である。　　　（証明終り）

§3 の補足

Normalized principal series は次の様に定義される；

$n\geq 0$ half-integer，$\mathrm{Re}\, s=3/2$ に対して

$$R(g,n,s)=A(s)T_g^{n,s}A(3-s)\ ,\quad g\in G$$

ただし，$\mathrm{Re}\,s=3/2$に対しては，operator $A(s)$ は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリー operator で $A(s)^{-1}=A(3-s)$ である。その explicit な形は

$$(A_n(s)f)(v)=\frac{1}{\gamma(s)}\int_Z |z|^{-9/2+s}f(v-z)\,dz$$

$$\gamma(s)=2^{-3/2+s}\pi^{3/2}\Gamma(-3/4+s/2)/\Gamma(9/4-s/2)$$

である。

$R(g,n,s)$ を拡張するときに本質的に用いることは，$G_0=VMA_+$ としたとき，

$$R(g,n,s)=T_g^{n,3/2},\quad g\in G_0,\quad \mathrm{Re}\,s=3/2$$

であること，$G = G_0 \cup G_0 p G_0$（disjoint），および次の不等式（[7] の Theorem B_2^*）である。

$\phi(v)$, $\psi(z)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の関数とし，$0<\gamma<3$，$1<p<\infty$，$\alpha<3/p'$，$\beta<3/q$，$\alpha+\beta \geqq 0$，$1/q = 1/p + (\alpha+\beta+\gamma)/3 - 1$ と仮定する。$p \leqq q < \infty$ ならば，

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^3\,\mathbb{R}^3} \frac{\phi(v)\psi(z)}{|v|^\alpha |v-z|^\gamma |z|^\beta}\, dv\, dz \right| \leqq K \|\phi\|_p \|\psi\|_{q'}$$

ただし，$1/p + 1/p' = 1$，$1/q + 1/q' = 1$，K は ϕ および ψ に independent である。

References

1 J.Dixmier: Représentations intégrables du groupe de De Sitter, Bull. Soc. Math. France, 89 (1961), 9-41.

2 R.A.Kunze and E.M.Stein: Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. Math., 82 (1960), 1-62.

3 R.L.Lipsman: Uniformly bounded representations of SL(2,$\mathbb{C}$), Amer. J. Math., 91 (1969), 47-66.

4 ___________: Uniformly bounded representations of the Lorentz groups, Amer. J. Math., 91 (1969), 938-962.

5 K.Okamoto: On the Plancherel formulas for some types of simple Lie groups, Osaka J. Math., 2 (1965), 247-282.

6 R.Takahashi: Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz géneralisés, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 289-433.

7 E.M.Stein and G.Weiss: Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space, J. Math. and Mechanics, 7 (1958), 503-514.