数理解析研究所講究録
182巻 1973年 53-69

ベクトル値ポアッソン積分と調和セクションの作る Hardy class について

名大 理学部 浦川 肇

§1. 序

$D=\{z\in\mathbb{C}^1 ; |z|<1\}$ 単位球とし、$B=\{e^{it} ; 0\le t\le 2\pi\}$ を D の境界とする。また $db=\frac{1}{2\pi}dt$ を B 上の回転で不変な測度とし、B 上の関数 ϕ に対して次のような積分（ポアッソン積分）を考える：

$$\mathcal{P}_\mu\phi(z):=\int_B P(z,b)^\mu\phi(b)\,db$$

ここで μ は複素数であり、$P(z,b)$（ポアッソン核と呼ばれる）は

$$P(z,e^{i\theta}):=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

によって与えられるものとする。この時次のような事実が成り立つことが知られている。

$z=x+iy$, $\Delta:=-(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ D 上の Laplace-Beltrami 作用素とした時、

$$\Delta\,\mathcal{P}_\mu\phi=4\mu(1-\mu)\,\mathcal{P}_\mu\phi$$

が成り立つ。更に

(i) μ：正なる実数，B上の連続関数ϕに対し，B上の各点e^{it}において

$$\lim_{r\uparrow 1} c_\mu (1-r^2)^{\mu-1} \mathcal{P}_\mu\phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立つ。ここで$c_\mu = \Gamma(\mu)^2/\Gamma(2\mu-1)$，$\Gamma(\mu)$はいわゆるガンマ関数である。

(ii) $\mu = 1$の時，(イ) $\phi \in L^1(B)$に対しては ほとんど到る所のe^{it}において

$$\lim_{r\uparrow 1} \mathcal{P}_\mu\phi(re^{it}) = \phi(e^{it})$$

が成り立ち，特に(ロ) $p > 1$に対しては次のことが成り立つ。D上の関数fに対して，$f_r(u) := f(ru)$，$0 \leq r < 1$，$u \in B$によってB上の関数f_rを定義し，dbに関するL^p-normを$\|f_r\|_p$とおく。そこでHardy classと呼ばれる関数空間$H^p(D)$を，

$$H^p(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{C},\ C^\infty\text{-関数} \;\middle|\; \Delta f = 0 \text{ かつ } \sup_{0<r<1} \|f_r\|_p < \infty \right\}$$

と定義すると，$H^p(D)$はノルム$\|f\|_p := \sup_{0<r<1} \|f_r\|_p$に関してBanach空間となり，$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}_1$によって，$L^p(B) \cong H^p(D)$なるBanach空間としての同型が与えられる。

ところで，一般に，非コンパクト型のエルミート対称空間G/Kにおいて，ポアッソン積分は次のように拡張された(K. Okamoto [11])：G/KをHarish-Chandraのimbeddingにより複素

空間の有界領域$\mathcal{D}$として，正則同型に埋め込む。この時$\mathcal{D}$のŠilov境界は均質空間$G/B(E)$と同一視できる（$B(E)$はGの極大parabolic部分群）。Kの表現τにassociateしたG/K上のvector bundle E_τを考え，$G/B(E)$上のvector bundleのsectionの作る空間からE_τのsectionの作る空間への写像としてポアッソン積分を一般化する。すなわち，境界$G/B(E)$上のGの表現をG/K上のGの表現に写す写像として定義された。

そこで我々は，単位円板D上のHardy class $H^p(D)$を拡張し，一般化されたポアッソン積分の境界値を調べることにより，どのような境界$G/B(E)$上の表現が，ポアッソン積分によって一般化されたHardy classに写されるかを調べる。この結果，主系列とそのlimitに続く非ユニタリ有界表現のある系列が出てくることがわかった。これは，Knapp-Okamoto [5]の結果のanalogyである。

§2. ポアッソン積分の境界値について

Gを非コンパクト半単純リー群，KをGの極大コンパクト部分群とし，均質空間G/Kが対称空間になっているとする。$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$をG，Kのリー環とし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$をCartan分解とする。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$の極大可換部分環，$\mathfrak{h}$を$\mathfrak{a}$を含む$\mathfrak{g}$のCartan部分環とする。$\Sigma$を$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$に関するルート系とする。（一般に実リー環$\mathfrak{m}$に対し，その複素化を$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$と書くことにする。）また$\sigma$

を$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の$\mathfrak{g}$に関するconjugationとし、$\Sigma$の順序$>$を、“$\alpha>0$かつ$\alpha$の$\mathfrak{a}$への制限が恒等的に零でなければ、$\sigma(\alpha)>0$”となるように定義する—$\sigma$ order。Σ_0を$\mathfrak{a}$で恒等的に零になるΣの元全体とし、$\Sigma-\Sigma_0$の元の$\mathfrak{a}$への制限を制限根という。Σの上の順序より、制限根の集合に順序を定義し、Fを制限根のこの順序に関する基本系とする。Fの部分集合Eに対して、Moore [10]に従って次のような集合を定義する：

$$\mathfrak{a}(E):=\{H\in\mathfrak{a}\ ;\ \gamma(H)=0\quad\forall\,\gamma\in E\}$$

$$\Sigma_0(E):=\{\alpha\in\Sigma\ ;\ \pi(\alpha)=\sum_{\gamma\in E}n_\gamma\gamma\ ,\ n_\gamma:\text{整数}\}\quad(\pi\text{は}\Sigma\text{の}\mathfrak{a}\text{への制限})$$

$$\Sigma_+(E):=\{\alpha\in\Sigma-\Sigma_0(E)\ ;\ \alpha>0\},\quad \Sigma_-(E):=\{\alpha\in\Sigma-\Sigma_0(E)\ ;\ \alpha<0\}$$

この時、$\sum_{\alpha\in\Sigma_+(E)}\mathbb{C}E_\alpha$，$\sum_{\alpha\in\Sigma_-(E)}\mathbb{C}E_\alpha$は$\sigma$で不変な$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$の部分環で、$\mathfrak{g}$とのそれぞれの共通部分を$\mathfrak{n}(E)$，$\bar{\mathfrak{n}}(E)$とする（$E_\alpha$は$\alpha$に対するroot vector）。また$\mathfrak{b}(E)$を$\mathfrak{n}(E)$の$\mathfrak{g}$における正規化環、$\mathfrak{m}(E)$を$\mathfrak{a}(E)$の$\mathfrak{k}$における中心化環、$B(E)$を$\mathfrak{n}(E)$の$G$における正規化群、$M(E)$を$\mathfrak{a}(E)$の$K$における中心化群とする。また$N(E)$，$\bar{N}(E)$，$A(E)$を$\mathfrak{n}(E)$，$\bar{\mathfrak{n}}(E)$，$\mathfrak{a}(E)$に対応する$G$の部分群とする。Eが空集合の時、Eをはぶいて、$\mathfrak{a}$，$A$，$\mathfrak{n}$，$\bar{\mathfrak{n}}$，$N$，$\bar{N}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{m}$，$B$，$M$とかくことにする。

<u>定義</u>　$\lambda:=z\rho_E\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$，$z\in\mathbb{C}^1$とする。ここで$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$は$\mathfrak{a}$の双対空間$\mathfrak{a}^*$の複素化とし、$\rho_E$は$\Sigma_+(E)$の元の和の半分とする。また$\tau$を$K$の有限次元ユニタリ表現で、その表現空間を$V_\tau$と

する。この時

$$C_{\tau,\lambda}(G/B(E)) := \{\phi : G \to V_\tau \mid \text{連続写像で 条件 (1) を満す}\}$$

とおく。ここで、

(1) $\phi(gman) = e^{-(i\lambda+\rho_E)(\log a)}\tau(m^{-1})\phi(g)$

$m \in M(E)$, $a \in A$, $n \in N$ で、$\log a$ は $a = \exp(\log a)$ を満す $\mathfrak{a}$ の元。$B(E) = M(E)AN$ となることに注意。$p \geq 1$ に対し、

$$L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E)) := \{\phi : G \to V_\tau \mid (1), (2) \text{ を満す}\}$$ とおく。

ここで、

(2) $\int_K \|\phi(k)\|^p dk < \infty$

$\|\cdot\|$ は V_τ におけるノルムで dk は K の Haar 測度である。

K. Okamoto [11] に従って、$C_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ 又は $L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ の各元 ϕ に対して、ϕ の Poisson 積分を

(3) $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(g) := \int_K \tau(k)\phi(gk)dk$

によって定義する。この時 定義から $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(gk) = \tau(k^{-1})\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(g)$ を満し、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ は、τ に associated した G/K 上の vector bundle の section となっているが、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ の境界値は次のようになっていることがわかる。ここで $g \in G$ に対し、$g = k(g)\exp H(g)n$ ($k(g) \in K$, $H(g) \in \mathfrak{a}$, $n \in N$) を岩沢分解 $G = KAN$ に従った分解としておく。

命題 1

$\mathfrak{a}^+(E) := \{H \in \mathfrak{a}(E) ; \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Sigma_+(E)\}$ とする。$H \in \mathfrak{a}^+(E)$

に対して、$a_t = \exp tH$ とおく。この時次のことがすべての $g \in G$ と $\phi \in C_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して成り立つ：

$$(4)\quad \lim_{t\to\infty} e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(ga_t) = \int_{\bar{N}(E)} \tau(k(\bar{n}))\phi(g) e^{(i\lambda-\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n}$$

<u>命題 2</u>

$1 < p < \infty$ とする。すべての $\phi \in L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して、

$$(5)\quad \lim_{t\to\infty} \int_K \left\{ \left\| e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(ka_t) - \int_{\bar{N}} \tau(k(\bar{n}))\phi(k) e^{(i\lambda-\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} \right\| \right\}^p dk = 0$$

が成り立つ。

この命題から、$1 < p < \infty$ かつ $\mathrm{Re}\langle i\lambda, \alpha\rangle < 0$ for all $\alpha \in \Sigma_+(E)$ が成り立つ時、$\phi \in L^p_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して、

$$(6)\quad \lim_{t\to\infty} \left\{ \int_K \| e^{(i\lambda+\rho_E)(\log a_t)} \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi(ka_t) \|^p dk \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq C_E(-i\lambda_2) \|\phi\|_{L^p(K/M(E))}$$

が成り立つ。ここで、$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$，$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{a}^*$ かつ、$C_E(-i\lambda_2) = \int_{\bar{N}(E)} e^{-(\lambda_2+\rho_E)(H(\bar{n}))} d\bar{n} < \infty$ であり、$\|\phi\|_{L^p(K/M(E))}$ は $\|\phi(k)\|$ の普通の L^p-ノルムである。

これでポアッソン積分 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$ の像の性質がわかったわけであるが、エルミート対称空間に対する次のような準備をしておく。

<u>§3. エルミート対称空間のある性質</u>

以後、G/K は a tube domain と正則同型なエルミート対称

領域と仮定する。また G は複素化 $G^{\mathbb{C}}$ をもつと仮定する。$\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{k}$ の Cartan 部分環とすると、これは $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環にもなっている。$T^{\mathbb{C}}$, $K^{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $G^{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ に対応するリー(部分)群とする。R を $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系とし、$\alpha \in R$ に対し、$\mathfrak{g}_\alpha$ を α に対するルート空間とすると、$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ 又は $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ となっているから、それに従って、α をコンパクト・ルート，非コンパクト・ルートと呼ぶ。$R_{\mathfrak{k}}$, R_n をコンパクト・ルートの集合(非コンパクト・ルートの集合)としておく。また、$\mathfrak{p}$ と G/K の原点 eK における接空間 $T_{eK}(G/K)$ とを自然に同一視し、$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ と $T_{eK}(G/K)$ の複素化 $T_{eK}^{\mathbb{C}}(G/K)$ とを同一視する。$\mathfrak{p}_-$ ($\mathfrak{p}_+$) をそれぞれ $T_{eK}^{\mathbb{C}}(G/K)$ の正則(反正則)ベクトル全体の作る $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ の部分空間とすると、$\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ は $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ 不変な可換な $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分環で、$\mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ + \mathfrak{p}_-$ となっている。P_+, P_- を対応する $G^{\mathbb{C}}$ のリー部分群とする。R の部分集合 P_n で、$\mathfrak{p}_+ = \sum_{\alpha \in P_n} \mathfrak{g}_\alpha$ なるものが存在するから、R の順序 $>$ として、R の正のルートの集合 P が P_n を含むように定義する。$P_{\mathfrak{k}} = P \cap R_{\mathfrak{k}}$ とおく。

さて今、τ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のコンパクト real form $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{p}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の conjugation とし、$\alpha \in R$ に対してルート・ベクトルを $\tau E_\alpha = -E_{-\alpha}$ となるようにとる。Δ を Harish-Chandra [1] の構成した非コンパクト正ルートで strongly orthogonal (i.e. 二つのルート α, β が strongly orthogonal とは、$\alpha \pm \beta$ がルートでないことをいう) なものの極大集合とする。そこで $\alpha \in \Delta$ に対して、$X_\alpha^0 := E_\alpha + E_{-\alpha}$,

$Y_\alpha^0 := (-\sqrt{-1})(E_\alpha - E_{-\alpha})$, $H'_\alpha := \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha$ とおく。ただし H_α は $B(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ をすべての $H \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に対して満たす $\sqrt{-1}\,\mathfrak{t}$ の元である。更に，$X^0 := \sum_{\alpha\in\Delta} X_\alpha^0$ ，$Z^0 := -\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} H'_\alpha$ とおき，$\mathfrak{t}^- := \sqrt{-1}\sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}H'_\alpha$ $\mathfrak{t}^+$ を $\mathfrak{t}^-$ の $\mathfrak{t}$ における Killing form B に関する直交補空間とし，$\mathfrak{t}^-$ $\mathfrak{t}^+$ に対応する T のリー部分群を T^-, T^+ とする。$\mathfrak{a} := \sum_{\alpha\in\Delta}\mathbb{R}X_\alpha^0$ とすると $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の極大可換環で，$\mathfrak{h} := \mathfrak{t}^+ + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環となっており，A，H を G の対応するリー部分群としておく。

さて，Okamoto-Knapp[5] に従って

$$u_t := \exp\left(\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}(-\sqrt{-1})Y_\alpha^0\right) \in G^{\mathbb{C}}, \quad 0 \le t \le 1$$

と定義する。この時，次のことが成り立つ。

補題 1

G/K は既約なエルミート対称空間とする（a tube domain と正則同型であることは仮定しなくてもよい。）。この時 u_t は次のように分解する：

$$(7) \qquad u_t = \zeta_t k_t z_t, \quad 0 \le t \le 1$$

ここで，$\zeta_t = \exp\left(\tan\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}E_{-\alpha}\right) \in P_-$ ，$k_t = \exp\left(\log\left(\cos\frac{\pi t}{4}\right)\sum_{\alpha\in\Delta}H'_\alpha\right) \in T^{\mathbb{C}}$ $z_t = \exp\left(-\tan\frac{\pi t}{4}\sum_{\alpha\in\Delta}E_\alpha\right) \in P_+$ とする。更に $0 < t < 1$ に対して，

$$(8) \qquad \zeta_t = a_s h_r \eta_t$$

ここで，$a_s = \exp sX_0 \in A$ ，$\left(\tanh s = \tan\frac{\pi t}{4}\right)$，

$h_r = \exp\left(r\sum_{\alpha\in\Delta}H'_\alpha\right) \in T^{\mathbb{C}}$ $\left(e^r = 1/\cosh(s)\right)$

$\eta_t = \exp\left(-\tanh s \cdot e^{-2r}\sum_{\alpha\in\Delta}E_\alpha\right) \in P_+$

と分解することがわかる。

また次のことはよく知られている：

(9) $\mathrm{Ad}(u_1) = id$ on $\mathfrak{t}^+$, $\mathrm{Ad}(u_1)(H'_\alpha) = X^0_\alpha$, $\alpha \in \Delta$

従って $\mathrm{Ad}(u_1)(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{j}^{\mathbb{C}}$ となる。$\mathrm{Ad}(u_1)$ を Cayley transform という。(cf. Moore [10]). このことから、Σ を $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系とすると、${}^t\mathrm{Ad}(u_1^{-1})$ によって、R は Σ に写る。そこで、我々は、Σ の順序 $>$ を、Σ の正ルート全体が、${}^t\mathrm{Ad}(u_1^{-1})P$ と一致するように定義する。この時、

補題 2　G/K が a tube domain と正則同型であることを仮定すると、上記の Σ の順序 $>$ は、σ-order すなわち、

"$0 < \alpha' \in \Sigma$ で、α' が $\mathfrak{a}$ で恒等的に零でなければ、

$\sigma(\alpha') > 0$ が成り立つ。"

この補題から、§2 における Σ_0, $\Sigma_\pm$, F を考え、$E := \{\alpha \in F : \alpha(X^0) = 0\}$ を考えると、$\mathfrak{a}(E) = \mathbb{R}X^0$ で、M(E) は、X^0 の K における中心化群で、$u_1^{-1} B(E) u_1 \in K^{\mathbb{C}} P_+$ となっている。また、δ を R の正ルートの和の半分、ρ を Σ_+ のルートの和の半分、ρ_E を、$\Sigma_+(E)$ のルートの和の半分とすると、

(10) $\rho = {}^t\mathrm{Ad}(u_1^{-1})\delta$ on $\mathfrak{a}$

$$\rho_E(X^0) = \rho(X^0) = \delta\left(\sum_{\alpha \in \Delta} H'_\alpha\right)$$

が成り立っていることに注意する。

§4 Hardy class の構成

以上のような準備の下に、Hardy class を構成しよう。Λ を $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ 上の dominant ($\mathfrak{k}$ に関して) 整形式とする。この Λ に対して τ_Λ を、K の既約ユニタリ表現で、最高ウェイトが Λ なるものとし、その表現空間を V_Λ とする。この時 τ_Λ は P_+ 上恒等変換になるよう $K^{\mathbb{C}}P_+$ の正則な表現に拡張できる。そこで $\tau := \tau_\Lambda^*$ を V_Λ の双対空間 V_Λ^* の反傾表現とし、$\tilde{E}_\Lambda$ を τ に同伴な $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ 上のベクトルバンドルとする。$G \cap K^{\mathbb{C}}P_+ = K$ で、G/K は $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}P_+$ における原点の G-orbit と同一視でき、E_Λ を $\tilde{E}_\Lambda$ の G/K への制限として定義する。

定義

$$\Gamma(\Lambda) := \{ f : GK^{\mathbb{C}}P_+ \to V_\Lambda^*,\ C^\infty \text{写像で、条件 (i), (ii) を満す} \}$$

ここで (i) $f(gb) = \tau(b^{-1}) f(g)$, $g \in GK^{\mathbb{C}}P_+$, $b \in K^{\mathbb{C}}P_+$

(ii) $\|f\|_2^2 := \lim_{t \uparrow 1} \int_K \|f(ku_t)\|^2 dk < \infty$.

補題1と条件 (i) より、$f(ku_t)$ は well-defined である。$\Gamma(\Lambda)$ は E_Λ の C^∞ 切断の作る空間であり、また $\phi \in L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に対して、ϕ のポアッソン積分 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\phi$ は、E_Λ の C^∞ 切断とみなせる。ここで E は §3 におけるものを、τ は上記の $\tau = \tau_\Lambda^*$ を考えている。更に次のことが言える。

定理1 G/K が a tube domain と正則同型なエルミット対称空間とし、$\lambda = z\rho_E \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $z \in \mathbb{C}$ と Λ が次の条件を満すと

する：

(11) $\mathrm{Re}\langle i\lambda, \alpha\rangle < 0 \qquad \forall\, \alpha \in \Sigma_+(E)$

(12) $\Lambda(\sum_{\alpha\in\Delta} H_\alpha') = -(i\lambda + \rho_E)(X^0)$

この時 $\mathcal{P}_{\tau,\lambda} L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E)) \subset \Gamma(\Lambda)$

が成り立つ。

$\Gamma(\Lambda)$ は G の表現になってはいないので，$\Gamma(\Lambda)$ に次のような境界条件をつけた部分空間 $\Gamma_0(\Lambda)$ を考え，G の有界表現を構成する。

<u>定義</u> $\Gamma_0(\Lambda) := \{ f \in \Gamma(\Lambda) \mid f$ は条件 (iii), (iv) を満す$\}$

ここで (iii) $\forall\, g \in G$, $\lim_{t\uparrow 1} f(g u_t) =$ 存在，この極限を $f(g u_1)$ とかいた時，この境界値 $f(g u_1)$ が，

(13) $\|f(g m a n u_1)\| \leq M(n)\, |e^{\Lambda(Ad(u_1^{-1})X)}|\, \|f(g u_1)\|$

$(g \in G,\ m \in M = Z_K(\mathfrak{a}),\ a = \exp X,\ X \in Cl(\mathfrak{a}^+),\ n \in N,)$ を満す。—— この条件は，$f(g u_1)$ が実際"境界値"となるための条件。

(iv) $G \ni g \longmapsto \|f(g u_1)\|$ が連続関数となる。

このように $\Gamma_0(\Lambda)$ を定義した時，G の $\Gamma_0(\Lambda)$ への作用を，

$U_\Lambda(g) f(x) := f(g^{-1}x)$,

と定義すると $\Gamma_0(\Lambda)$ は G-不変となっている。$\Gamma_0(\Lambda)$ を $\{f \in \Gamma_0(\Lambda);\ \|f\|_2 = 0\}$ で割った空間を考え，その完備化を，$\Gamma_2(\Lambda)$ とする。この時，$U_\Lambda(g)$ は，ノルム $\|\cdot\|_2$ に関して有界作用素となるように，$E(\Lambda)$ に拡張できることがわかる。

他方、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ に G は、$U_{\tau,\lambda}(g)\phi(x) := \phi(g^{-1}x)$ により有界作用素として、作用しているが、ポアッソン積分の定義より、

$$(14)\quad U_\Lambda(g)\cdot \mathcal{P}_{\tau,\lambda} = \mathcal{P}_{\tau,\lambda}\circ U_{\tau,\lambda}(g)$$

を満すことがわかるが、更に、次のことが言える。

<u>定理2</u>　定理1の仮定の下に、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$ は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ から、$\Gamma(\Lambda)$ への G-equivariant な有界作用素となる。

<u>注意</u>　定理1の条件(12)は、要するに " ${}^tAd(u_i^{-1})\Lambda = -(i\lambda+\rho_E)$ が $\mathfrak{a}$ の上で成り立つ" ことであるが、$\lambda\in\mathfrak{a}^*$ の時、G は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ にユニタリ作用素として作用する。しかし、一方で、Λ が、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 上の整形式であることをも要請しているので、$\lambda\in\mathfrak{a}^*$ の場合は、起り得ないことがわかる。

さて、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ を G から V_Λ^* への C^∞ 写像全体とし、ν を G の、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への左正則表現とし、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の $C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への表現 ν を、

$$\nu(X)f(g) := \left[\frac{d}{dt}f(\exp(-tX)g)\right]_{t=0}$$

$g\in G$, $f\in C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ と定義し、$U(\mathfrak{g})$ を、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の展開環とした時、ν より、$U(\mathfrak{g})$ の $C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への表現が定義できる。そこで、$\nu(C)$ を、$C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ への ν に関する Casimir 作用素とし、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$ を、$C_{\tau,\lambda}(G/B(E))\cap C^\infty(G,V_\Lambda^*)$ とおく。

そこで、Hardy class を、次のように定義する。

<u>定義</u>　$H_0(\Lambda) := \{f\in\Gamma_0(\Lambda)\ ;\ (\nu(C) - \langle\Lambda+2\delta,\Lambda\rangle)f = 0\}$

更に、$H_2(\Lambda)$を、その完備化とする。この時できる、Gの有界表現$H_2(\Lambda)$を、ベクトルーバンドルE_Λにおける Hardy class と定義する。

この$H_2(\Lambda)$と、ポアッソン積分$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$との関係は、次のようになっている。$\mathfrak{t}=\mathfrak{t}^+ + \mathfrak{t}^-$の分解に従って、$\delta$, Λを、

$\Lambda = \Lambda_+ + \Lambda_-$, $\delta = \delta_+ + \delta_-$ と分解する。M_0を、$M = Z_K(\mathfrak{a})$の連結成分とする。$\mathfrak{t}^+$はM, M_0のCartan部分環となっているが、更に、Λ_+は、$\mathfrak{t}_+^{\mathbb{C}}$上の整形式で、

$$\langle \Lambda_+ , \alpha \rangle \geq 0, \qquad \forall \alpha \in R,\ \pi(\alpha)=0$$

を満している。従って、M_0の既約ユニタリ表現τ_{Λ_+}で最高ウェイトをΛ_+にもつものが存在する。そこで、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$の射影作用素を、

$$e_{\Lambda_+}\phi(g) := d_{\Lambda_+}\int_{M_0} \overline{\theta}_{\Lambda_+}(m)\,\phi(gm)\,dm, \qquad \phi \in C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$$

と定義する。ここで、d_{Λ_+}は、τ_{Λ_+}の表現空間の次元で、θ_{Λ_+}はτ_{Λ_+}の指標で、$\overline{\theta}_{\Lambda_+}(m)$は、$\theta_{\Lambda_+}(m)$の複素共役である。この時、

$e_{\Lambda_+} C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$は、$C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E))$の$G$不変部分空間であるが、更に次のことがわかる。

__定理3__　定理1の仮定の下に、

$$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}\, e_{\Lambda_+} C^\infty_{\tau,\lambda}(G/B(E)) \subset H_2(\Lambda)$$

が成り立つ。

恐らく、$\mathcal{P}_{\tau,\lambda}$は、$L^2_{\tau,\lambda}(G/B(E))$におけるノルムと、$H_2(\Lambda)$におけるノルム

を変えないであろうと思われるので、上記のことから、$H_2(\Lambda)$ が零にならないことが言えるのではないかと思われる。実際、$G=SU(1,1)$ の場合は、次のようになっている：

$G=SU(1,1)$ の時、$K=T=\left\{\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{bmatrix} : \theta\in\mathbb{R}\right\}$，$G^{\mathbb{C}}=SL(2,\mathbb{C})$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{C}\right\}$．．$(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}},\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ に関するルート系 R は、 $R=\{\pm\gamma\}$．

$$\gamma:\ \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\ni\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}\longmapsto -2\alpha$$

により与えられる。 $E_\gamma=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，$E_{-\gamma}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$．とおく。更に、

$X_\gamma^0=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$．$Y_\gamma^0=-\sqrt{-1}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ とする。 この時，

$$\mathfrak{a}=\mathbb{R}X_\gamma^0$$

$$u_t=\exp\left(-\frac{\pi t}{4}\right)\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi t}{4} & \sin\frac{\pi t}{4}\\ -\sin\frac{\pi t}{4} & \cos\frac{\pi t}{4}\end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{t}^-=\mathfrak{t},\quad \mathfrak{t}^+=(0)$$

$$\delta:\mathfrak{t}\ni\begin{bmatrix}i\theta & 0\\ 0 & -i\theta\end{bmatrix}\longmapsto -i\theta,$$

$$\rho:\mathfrak{a}\ni\begin{bmatrix}0&t\\t&0\end{bmatrix}\longmapsto t$$

となっている。 $\Lambda:=-n\delta$，n は整数 とおく。

この時，

"踈系列が存在する" $\Longleftrightarrow$ $n>1$

となっている。

他方，$\lambda=z\rho$，$z\in\mathbb{C}$． とおくと，

主系列は， $i\lambda=iz\rho$， $\mathrm{Re}(iz)=0$

によって与えられ、

補系列は、　$i\lambda = iz\rho$,　$0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$

によって、与えられる。

ところで、我々の条件は、"$\mathrm{Re}(i\lambda, \alpha) < 0$, $\alpha = 2\rho$, かつ、${}^t\mathrm{Ad}(w_i^{-1})\Lambda = -(i\lambda+\rho)$ on Ω" であったが、これは、

$$i\lambda = (n-1)\rho, \quad n < 1.$$

となることがわかる。これは、Okamoto [11] で、最後に具体的に計算してあるところの、(II). 4) の場合である。

特に $n = 0$ i.e. $\Lambda = 0$ の時、$i\lambda = -\rho$ かつ、τ_Λ は、K の自明な表現となっているから、我々の Hardy class $H_2(\Lambda)$ は、序で述べた古典的な $H_2(D)$ となっている。

なおくわしい証明は、Urakawa [16] を参照してください。

References

[1] Harish-Chandra, Representations of semi-simple Lie groups : VI, Amer. J. Math., 78 (1956) 564-628

[2] ______, Spherical functions on a semi-simple Lie groups : I. II, Amer. J. Math., 80 (1958) 241-310, 553-613

[3] ______, On the theory of the Eisenstein integral, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 123-149

[4] S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., Vol. 5 (1970)

[5] A. W. Knapp and K. Okamoto, Limits of holomorphic discrete series, Jour. of Functional Analysis Vol. 9 (1972) 375-409

[6] A. Korányi, The Poisson integrals for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math., 82 (1965) 332-350

[7] ______, Boundary behavior of Poisson integrals on symmetric spaces, Trans. of Amer. Math. Soc., (1969) 393-409

[8] ______ and J. A. Wolf, Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, Ann. of Math. (2) 81 (1965) 265-288

[9] B. Kostant, On the existence and irreducibility of certain series of representations, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 627-642

[10] C. C. Moore, Compactifications of symmetric spaces : II, The Cartan domains, Amer. J. Math., 86 (1964) 358-378

[11] K. Okamoto, Harmonic analysis on homogeneous vector bundles, Springer, lecture note in Math. 266 (1971) 255-271

[12] ______ and H. Ozeki, On square-integrable $\bar{\partial}$-cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. 4 (1967) 95-110

[13] I. Satake, On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. 71 (1960)

[14] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I, Springer (1972)

[15] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd. ed. Cambridge Univ. Press, New York (1959)

[16] H. Urakawa, On Hardy classes of harmonic sections and vector-valued Poisson integrals, a preprint 1973.