数理解析研究所講究録
182巻 1973年 25-35

群のある種の部分群と 単項ユニタリ表現

東大 教養　斎藤 正彦

序　離散群は普通I型でないので，そのユニタリ表現に関しては，ほんの少ししか分っていない。この講演では，局所コンパクト群の閉部分群である条件をみたすものから誘導した単項ユニタリ表現の既約性と同値性に関するいくつかの結果を述べ，それを代数群の場合に応用する。モジュラー群への応用は，去年九月の日光での表現論シンポジウムで話したし，結果は文献[3][4]に発表したので，ここでは述べない。全部に証明をつけたものは，« Représentations unitaires monomiales d'un groupe discret, en particulier du groupe modulaire » として発表される予定である。

§1　条件($\mathcal{F}_0$)と既約性の判定条件。

Gを局所コンパクト群，Hをその閉部分群とする。本稿で，群の表現はつねに連続ユニタリ表現，群の指標はつねに一次

元の連続ユニタリ表現を意味する。

Hを$\mathfrak{G}$の開部分群，χをHの指標とする。χから誘導した$\mathfrak{G}$の表現を$U(\chi)$と書く。$\mathfrak{G}$の中に，$H\backslash\mathfrak{G}$の代表系$\textcircled{H}$を一つ取って固定する。ただし，$\textcircled{H}$は単位元eを含むとする。$\mathfrak{G}$の元gはすべて $g=\rho(g)\theta(g)$ （$\rho(g)\in H$，$\theta(g)\in\textcircled{H}$）の形に一意的に書ける。作用

$$\mathfrak{G}\times\textcircled{H}\ni(g,x)\longmapsto x^g=\theta(xg)$$

により，$\mathfrak{G}$は$\textcircled{H}$に右から遷移的に働く。また，簡単のため，$\chi(\rho(xg))$のことを$\chi(x,g)$で，$U(\chi)(g)$のことを$U(\chi;g)$と書く。すると，表現$U(\chi)$はヒルベルト空間$\mathcal{H}=l^2(\textcircled{H})$で実現され，その作用は，

$$U(\chi;g)\varphi(x)=\chi(x,g)\varphi(x^g) \tag{1}$$

で与えられる（$\varphi\in\mathcal{H}$，$g\in\mathfrak{G}$，$x\in\textcircled{H}$）。

$\textcircled{H}$の点aに対し，aの特性函数をΦ_aと書く。すると，

$$U(\chi;g)\Phi_a=\chi(a^{g^{-1}},g)\Phi_{a^{g^{-1}}} \tag{2}$$

が成立つ。したがってΦ_aは$U(\chi)$に関する生成ベクトルである。すなわち，$\{U(\chi;g)\Phi_a\,;\,g\in\mathfrak{G}\}$は$\mathcal{H}$で密な部分線型空間を張る。とくに，$H$の元$h$に対しては，

$$U(\chi;h)\Phi_e=\chi(h)\Phi_e \tag{3}$$

となる．

$\mathfrak{G}$ の元 g に対し，$g^{-1}Hg$ の指標 χ^g を

$$\chi^g(g^{-1}hg) = \chi(h) \qquad (h \in H)$$

によって定める．H の $\mathfrak{G}$ での正規化群を $\mathcal{N}(H)$ とし，$\mathfrak{H}_N = \mathfrak{H} \cap \mathcal{N}(H)$ とすると，$h \in H$，$n \in$ ~~$\mathcal{N}(H)$~~ $\mathfrak{H}_N$ に対して

$$\chi(n, h) = \chi^n(h), \quad U(\chi; h)\Phi_n = \chi^n(h)\Phi_n \qquad (4)$$

が成立つ．

$W(H) = \mathcal{N}(H)/H$ と置く．$w \in W(H)$ に対し，w を代表する $\mathcal{N}(H)$ の勝手な元 n を取ると，$\chi^w(h) = \chi(nhn^{-1})$ によって，H の指標 χ^w が矛盾なく定義される．

$\mathfrak{G}$ と H とに関するつぎの条件を考える：

$(\mathfrak{F}_0)$ $g \in \mathfrak{G}$，$[H : H \cap g^{-1}Hg] < \infty \implies g \in \mathcal{N}(H)$.

補題．H を $\mathfrak{G}$ の開部分群で条件 $(\mathfrak{F}_0)$ をみたすものとする．x を $\mathfrak{H}$ の点とする．もし，集合 $x^H = \{x^h ; h \in H\}$ が有限ならば x は $\mathfrak{H}_N$ に属する．

証明．x^H が有限とする．$H_x = \{h \in H ; x^h = x\}$ と置く．H は x^H に右から遷移的に働き（$x^H \ni y \longmapsto y^h$），$H_x$ は点 x の固定部分群である．したがって $[H : H_x] < \infty$.

方, $H_x = H \cap x^{-1}Hx$ だから, 条件 $(\mathfrak{F}_0)$ により, x は $\mathcal{N}(H)$ に属する. 終.

定理 1. G を局所コンパクト群, H を G の開部分群で条件 $(\mathfrak{F}_0)$ をみたすもの, χ を H の指標, $U(\chi)$ を χ から G への誘導表現とする. $W(H) = \mathcal{N}(H)/H$ とすると, $U(\chi)$ が既約であるためには, $W(H)$ の 1 でない任意の元 w に対して $\chi^w \neq \chi$ が成立つことが必要充分である.

証明. 1° $\mathcal{N}(H) - H$ の元 n_0 で, $\chi^{n_0} = \chi$ となるものがあるとする. χ から $N = \mathcal{N}(H)$ への誘導表現を $V(\chi)$ とする. N 上の函数 φ で, $h \in H$, $n \in N$ に対して $\varphi(hn) = \chi(h)\varphi(n)$ が成立ち, かつ $\displaystyle\sum_{n \in N \bmod H} |\varphi(n)|^2 < \infty$ となるもの全体のヒルベルト空間を $\mathcal{H}_N$ とすると, $V(\chi)$ は $\mathcal{H}_N$ 上の右準正則表現として実現される. $\varphi \in \mathcal{H}_N$ に対し, $M\varphi(n) = \varphi(n_0 n)$ と置くと, M は $\mathcal{H}_N$ の有界非スカラー作用素で, あらゆる $V(\chi; n)$ と可換である. よって $V(\chi)$ は可約, 階段誘導定理により $U(\chi)$ も可約となる.

2° $W(H)$ の任意の $w \neq 1$ に対して $\chi^w \neq \chi$ とする. 単位元の特性函数を Φ とすると, $U(\chi; h)\Phi = \chi(h)\Phi$ が成立つ (公式 (3)). ほかに $\mathcal{H}$ の元 $\varphi \neq 0$ で $U(\chi; h)\varphi = \chi(h)\varphi$ な

るものがあるとすると，

$$\chi(h)\varphi(x) = U(x;h)\varphi(x) = \chi(x,h)\varphi(x^h)$$

だから $|\varphi(x^h)| = |\varphi(x)|$ が成立つ（$x \in \Theta$, $h \in H$）．Θ_N に属さない $x \in \Theta$ で $\varphi(x) \neq 0$ なるものがあると，補題により，函数 $|\varphi|$ は無限個の点で 0 でない同じ値を取り，φ は $l^2(\Theta)$ に属しえない．よって φ の台は Θ_N に含まれる．

$\varphi = \sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n \Phi_n$ と書くと，公式 (4) により，

$$U(x;h)\varphi = \sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n U(x;h)\Phi_n = \sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n \chi^n(h)\Phi_n$$

となるが，一方

$$U(x;h)\varphi = \chi(h)\varphi = \sum_{n \in \Theta_N} \alpha_n \chi(h)\Phi_n$$

だから，$\alpha_n \chi^n(h) = \alpha_n \chi(h)$ （$h \in H$, $n \in \Theta_N$）となる．$n \neq e$ なら，ある h で $\chi^n(h) \neq \chi(h)$ だから $\alpha_n = 0$ となり，$\varphi = \alpha_e \Phi$ となる。Φ は生成ベクトルだから $U(\chi)$ は既約である．終．

注意．G が密な可算部分集合を持つ（separable）ときには，この定理は G. W. Mackey [2] の定理 6′ からただちに出る．

§2. 条件($\mathfrak{F}$)と同値性の判定条件。

Gを局所コンパクト群，$\mathcal{A}$をその開部分群の族とし，つぎの条件を考える：

($\mathfrak{F}$) 1. $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$, $g \in G$, $[H_1 \cap H_1 \cap g^{-1}H_2 g] < \infty$

$\Longrightarrow H_1 \subset g^{-1} H_2 g$.

2. $H \in \mathcal{A}$, $g \in G$, $gHg^{-1} \subset H \Longrightarrow g \in \mathcal{N}(H)$.

このとき，$\mathcal{A}$の各メンバーは条件($\mathfrak{F}_0$)をみたす.

定理2. Gを局所コンパクト群，$\mathcal{A}$をGの開部分群の族で条件($\mathfrak{F}$)をみたすもの，H_1, H_2を$\mathcal{A}$の元，χ_i ($i=1,2$)をH_iの指標，U_iをχ_iからGへの誘導表現とする. U_1とU_2とが(ユニタリ)同値であるためには，Gの元gで，

$$H_2 = g^{-1} H g, \quad \chi_2 = \chi_1^{g}$$

となるものが存在することが必要充分である.

証明. もしこのようなgが存在すれば，誘導表現の一般論によってU_1とU_2とは同値になる.

U_1とU_2とが同値であると仮定する. $H_i \backslash G$のGの中での代表系Θ_iを取り，前のように，U_iを$\mathcal{H}_i = l^2(\Theta_i)$で実現する. Mを，$\mathcal{H}_2$から$\mathcal{H}_1$へのユニタリ作用素で，

$$M U_2(g) = U_1(g) M \qquad (g \in G)$$

なるものとする．単位元 $e\in\textcircled{H}_2$ の特性函数を $\Phi_2\in\textcircled{H}_2$ とし，$\Phi_1 = M\Phi_2$ と置く． $h\in H_2$, $x\in\textcircled{H}_1$ に対し，

$$U_1(h)\Phi_1 = MU_2(h)\Phi_2 = \chi_2(h)\Phi_1,$$

$$U_1(h)\Phi_1(x) = \chi_1(x,h)\Phi_1(xh)$$

が成立つから， $|\Phi_1(xh)| = |\Phi_1(x)|$ となる． $\textcircled{H}_1$ の元 x を一つ固定する．集合 $x^{H_2}=\{xh \,;\, h\in H_2\}$ が無限集合なら，定理1の証明と同様に， $\Phi_1(x)=0$ でなければならない。

いま一時的に $H_1=H_2=H$ とする．補題により， Φ_1 の台は $\textcircled{H}_N$ に含まれ， $\Phi_1=\sum_{n\in\textcircled{H}_N}\alpha_n\Phi_n$ と書ける．

$$U_1(h)\Phi_1=\sum_{n\in\textcircled{H}_N}\alpha_n U_1(h)\Phi_n = \sum_{n\in\textcircled{H}_N}\alpha_n \chi_1^n(h)\Phi_n,$$

$$U_1(h)\Phi_1=\chi_2(h)\Phi_1=\sum_{n\in\textcircled{H}_N}\alpha_n\chi_2(h)\Phi_n$$

が成立つ． $\alpha_n\neq 0$ なる $n\in\textcircled{H}_N$ を取れば $\chi_2(h)=\chi_1^n(h)$ となり，結論で出た．

一般の場合に戻る． Φ_1 は0でないから， x^{H_2} が有限集合であるような $x\in\textcircled{H}_1$ が存在する． H_2 の x^{H_2} への遷移作用の x での固定群は $H_2\cap x^{-1}H_1x$ だから，これは H_2 の中で指数有限である。条件(ア)により， $H_2\subset x^{-1}H_1x$ となる．

同様に，$\mathfrak{H}_2$ のある元 y に対して，$H_1 \subset y^{-1} H_2 y$ が成立つ。条件 $(\mathfrak{F})$2 により，$H_2 = x^{-1} H_1 x = y H_1 y^{-1}$ となる。H_2 の指標 χ_1^{x} から G への誘導表現を U_1^{x} とすると，U_1^{x} は U_1 に同値だから U_2 とも同値である。したがって，$\mathfrak{H}_N$ のある元 n を取ると，$\chi_2 = (\chi_1^{x})^{n} = \chi_1^{xn}$ となり，定理は証明された。終。

注意．G が密な可算部分集合を含み，かつ U_1, U_2 がともに既約だと仮定すると，定理2は Mackey [2] の定理 7′ からただちに出る。

§3．代数群の場合．

k を無限完全体，G を k 上定義された連結線型代数群とし，~~G(k) と~~ G の k 上の有理点全部の群に離散位相を入れた群を G(k) とする。H が G の，k 上定義された連結閉部分群全部を走るときの H(k) の全体を $\mathcal{A}$ とする。

定理3．$\mathcal{A}$ は条件 $(\mathfrak{F})$ をみたす（G(k) に関して）。

証明．H(k) は指数有限の真部分群を持たないから 1 はみたされる。また，$g H(k) g^{-1}$ $(g \in G(k))$ と $H(k)$ とは同次元だから，一方が他方に真に含まれることはなく，2 もみたされる。終。

この定理は，とくに正規化群の小さな部分群，たとえば放物部分群やカルタン部分群の場合に有効である．

系．Gが reductive であるか，またはkが代数閉体であると仮定する．PをGのk上定義された放物部分群とする．このとき，$P(k)$の指標から誘導したGの表現はすべて既約である．二つの異なる指標からの誘導表現はたがいに非同値である．

証明．$P(k)$の正規化群は$P(k)$自身である．

§4．病理現象．

Gを離散群，HをGの可換部分群，$\hat{H}$をHの指標群とする．$\chi \in \hat{H}$からGへの誘導表現を$U(\chi)$とすると，Gの右正則表現Tは，$U(\chi)$，$\chi \in \hat{H}$ の直積分に分解される：

$$T = \int_{\hat{H}}^{\oplus} U(\chi)\, d\chi$$

ただし$d\chi$は$\hat{H}$のハール測度である（Godement [1]）.

Tの二つの既約分解

$$T = \int_{A}^{\oplus} U^{\alpha}\, d\alpha = \int_{B}^{\oplus} V^{\beta}\, d\beta$$

がたがいにまったく無関係であるとは，1）$\alpha \in A$，$\beta \in B$

ならば $U^{\alpha} \not\sim V^{\beta}$，2) $\alpha, \alpha' \in A$，$\beta, \beta' \in B$，$\alpha \neq \alpha'$，$\beta \neq \beta'$ ならば $U^{\alpha} \not\sim U^{\alpha'}$，$V^{\beta} \not\sim V^{\beta'}$ が成立つことであると定義する．

ゴードマンの定理をモジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に適用すると，ここには述べなかった定理（[3]を見よ）により，つぎの定理が成立つ．

定理4．モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の右正則表現は，無限に多くの，たがいにまったく無関係な仕方で，無限次元既約表現の直積分に分解される．

これは，吉沢尚明[5]や Mackey[2] の例（二つの仕方での分解）よりさらに病理的な例を与えている．

文献

[1] R. Godement, *Sur les transformations de Fourier dans les groupes discrets*, C. R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 627–628.

[2] G. W. Mackey, *On induced representations of groups*, Amer. J. Math., 73 (1951), 576–592.

[3] M. Saito, *Représentations unitaires du groupe modulaire*, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 381–383.

[4] M. Saito, *Représentations unitaires du groupe modulaire II*, ibid., 641 – 642.

[5] H. Yoshizawa, *Some remarks on unitary representations of the free group*, Osaka Math. J., 3 (1951), 55 – 63.