

Title	群のある種の部分群と単項ユニタリ表現 (ユニタリ表現論とその応用)
Author(s)	斎藤, 正彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 182: 25-35
Issue Date	1973-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/107163
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

群のある種の部分群と

単項ユ=タリ表現

東大 教養 斎藤 正彦

序 離散群は普通 I 型ではないので、そのユ=タリ表現に
 関しては、ほんの少ししか分かっていない。この講演では、局
 所コンパクト群の部分群である条件をみたすものから誘導
 した単項ユ=タリ表現の既約性と同値性に関するいくつかの
 結果を述べ、それを代数群の場合に応用する。モジュラ一群
 への応用は、去年九月の日光での表現論シンポジウムで話し
 ましたし、結果は文献 [3] [4] に発表したもので、ここでは述
 べない。左部に証明をつけたものは、*« Représentations
 unitaires monomiales d'un groupe discret, en particulier du
 groupe modulaire »* として発表された予定である。

§1 条件 (\mathcal{F}_0) と既約性の判定条件。

G を局所コンパクト群、 H をその部分群とする。本稿で、
 群の表現はつねに連続ユ=タリ表現、群の指標はつねに一次

元の連続ユニタリ表現を意味する。

H を G の閉部分群, χ を H の指標とする. χ から誘導した G の表現を $U(\chi)$ と書く. G の中に, $H \backslash G$ の代表系 \mathcal{H} を一つ取って固定する. さらに, \mathcal{H} は単位元 e を含むとする. G の元 g はすべて $g = p(g)\theta(g)$ ($p(g) \in H, \theta(g) \in \mathcal{H}$) の形に一意的に書ける. 作用

$$G \times \mathcal{H} \ni (g, x) \longmapsto xg = \theta(xg)$$

により, G は \mathcal{H} に右から遷移的に働く. また, 簡単のため, $\chi(p(xg))$ のことを $\chi(x, g)$ と, $U(\chi)(g)$ のことを $U(\chi; g)$ と書く. すると, 表現 $U(\chi)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathcal{H})$ で実現され, その作用は,

$$U(\chi; g)\varphi(x) = \chi(x, g)\varphi(xg) \quad (1)$$

で与えられる ($\varphi \in \mathcal{H}, g \in G, x \in \mathcal{H}$).

\mathcal{H} の元 a に対し, a の特性函数を \mathbb{I}_a と書く. すると,

$$U(\chi; g)\mathbb{I}_a = \chi(a^{g^{-1}}, g)\mathbb{I}_{a^{g^{-1}}} \quad (2)$$

が成立つ. したがって \mathbb{I}_a は $U(\chi)$ に関する生成ベクトルである. すると, $\{U(\chi; g)\mathbb{I}_a; g \in G\}$ は \mathcal{H} で密な部分線型空間を張る. とくに, H の元 h に対しては,

$$U(\chi; h)\mathbb{I}_e = \chi(h)\mathbb{I}_e \quad (3)$$

となる。

G の元 g に対し, $g^{-1}Hg$ の指標 χ^g を

$$\chi^g(g^{-1}hg) = \chi(h) \quad (h \in H)$$

によって定める. H の G での正規化群を $\mathcal{N}(H)$ とし, $\mathbb{C}^{\mathcal{N}(H)} =$

$\mathbb{C}^{\mathcal{N}(H)}$ とする. $h \in H, m \in \mathbb{C}^{\mathcal{N}(H)}$ に対して

$$\chi(m, h) = \chi^m(h), \quad U(\chi; h)\mathbb{C}^m = \chi^m(h)\mathbb{C}^m \quad (4)$$

が成立する.

$W(H) = \mathcal{N}(H)/H$ と置く. $w \in W(H)$ に対し, w を代表

する $\mathcal{N}(H)$ の勝手な元 m を取り, $\chi^w(h) = \chi(mhm^{-1})$

によって, H の指標 χ^w が矛盾なく定義される.

G と H とに関する下記の条件を考える:

$$(S_0) \quad g \in G, [H : H \cap g^{-1}Hg] < \infty \implies g \in \mathcal{N}(H).$$

補題. H を G の有限部分群で条件 (S_0) を満たすものとする. $\alpha \in \mathbb{C}$ の集まりとする. もし, 集合 $\alpha^H = \{\alpha^h; h \in H\}$ が有限ならば α は $\mathbb{C}^{\mathcal{N}(H)}$ に属する.

証明. α^H が有限とする. $H_\alpha = \{h \in H; \alpha^h = \alpha\}$ と置く. H は α^H に右から遷移的に働き ($\alpha^H \ni y \mapsto y^h$), H_α は α の固定部分群である. したがって $[H : H_\alpha] < \infty$.

方, $H_x = H \cap x^{-1}Hx$ である, 条件 (7₀) により, χ は $\mathcal{N}(H)$ に属する. 終.

定理 1. G を局所コンパクト群, H を G の開部分群で条件 (7₀) を満たすもの, χ を H の指標, $\mathcal{U}(\chi)$ を χ から G への誘導表現とする. $W(H) = \mathcal{N}(H)/H$ とすると, $\mathcal{U}(\chi)$ が既約であるためには, $W(H)$ の 1 でない任意の元 w に対して $\chi^w \neq \chi$ が成立することが必要十分である.

証明. 1° $\mathcal{N}(H) = H$ の元 m_0 で, $\chi^{m_0} = \chi$ とするものがあるとする. χ から $N = \mathcal{N}(H)$ への誘導表現を $V(\chi)$ とする. N 上の関数 φ で, $h \in H, n \in N$ に対して $\varphi(hn) = \chi(h)\varphi(n)$

が成立し, $\|\varphi\| = \sum_{n \in N \bmod H} |\varphi(n)|^2 < \infty$ とするもの全体のヒル

ベルト空間を \mathcal{H}_N とすると, $V(\chi)$ は \mathcal{H}_N 上の右導正則表現として実現される. $\varphi \in \mathcal{H}_N$ に対し, $M\varphi(n) = \varphi(m_0n)$ と置くと, M は \mathcal{H}_N の有界非スカラー作用素で, $\varphi \in \mathcal{H}_N$ ならば $V(\chi; m)$ と可換である. よって $V(\chi)$ は可約, 階段誘導定理により $\mathcal{U}(\chi)$ も可約である.

2° $W(H)$ の任意の $w \neq 1$ に対して $\chi^w \neq \chi$ とする. 単位元 e の特性関数 $\mathbb{1}$ とすると, $\mathcal{U}(\chi; h)\mathbb{1} = \chi(h)\mathbb{1}$ が成立する (公式 (3)). 同様に \mathcal{H} の元 $\varphi \neq 0$ で $\mathcal{U}(\chi; h)\varphi = \chi(h)\varphi$ なる

子も η があるとすると,

$$\chi(h)\varphi(x) = U(\chi; h)\varphi(x) = \chi(x, h)\varphi(xh)$$

だから $|\varphi(xh)| = |\varphi(x)|$ が成立 $(x \in \mathbb{Q}, h \in H)$. \mathbb{Q}_N

に属する $x \in \mathbb{Q}$ で $\varphi(x) \neq 0$ なる η があると, 補題

により, 函数 $|\varphi|$ は無限個の互で 0 でない同じ値を取り, φ

は $\ell^2(\mathbb{Q})$ に属し之なり. よって φ の台は \mathbb{Q}_N に含まれる.

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Q}_N} \alpha_n \overline{\Phi}_n \quad \text{と書くと, 公式 (4) により,}$$

$$U(\chi; h)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Q}_N} \alpha_n U(\chi; h)\overline{\Phi}_n = \sum_{n \in \mathbb{Q}_N} \alpha_n \chi^n(h)\overline{\Phi}_n$$

とたすか, 一方

$$U(\chi; h)\varphi = \chi(h)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Q}_N} \alpha_n \chi(h)\overline{\Phi}_n$$

だから, $\alpha_n \chi^n(h) = \alpha_n \chi(h) \quad (h \in H, n \in \mathbb{Q}_N)$ となる.

$n \neq e$ ならば, ある h で $\chi^n(h) \neq \chi(h)$ だから $\alpha_n = 0$ となり,

$\varphi = \alpha_e \overline{\Phi}_e$ となる. $\overline{\Phi}_e$ は単数ベクトルだから $U(\chi)$ は簡約

である. 終.

注意. G が密可算部分集合を持つ ~~場合~~ (separable) とす
 には, この定理は G. W. Mackey [2] の定理 6' からただ
 ちに出る.

§2. 条件 (F) と同値性の判定条件.

G を局所コンパクト群, \mathcal{A} を G の閉部分群の族とし, τ の条件を考える:

$$(F) \ 1. \ H_1, H_2 \in \mathcal{A}, \ g \in G, \ [H_1 \cap H_1 \cap g^{-1}H_2g] < \infty \\ \implies H_1 \subset g^{-1}H_2g.$$

$$2. \ H \in \mathcal{A}, \ g \in G, \ gHg^{-1} \subset H \implies g \in \mathcal{N}(H).$$

このとき, \mathcal{A} の各メンバーは条件 (F) をみたす.

定理 2. G を局所コンパクト群, \mathcal{A} を G の閉部分群の族で条件 (F) をみたすもの, $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$ の元, χ_i ($i=1, 2$) を H_i の指標, U_i を χ_i から G への誘導表現とする. U_1 と U_2 が ($\tau = 4$) 同値であるためには, G の元 g で,

$$H_2 = g^{-1}H_1g, \quad \chi_2 = \chi_1^g$$

となるものが存在するに必要十分である.

証明. もしこのように g が存在すれば, 誘導表現の一般論によつて U_1 と U_2 とは同値になる.

U_1 と U_2 とが同値であるを仮定する. $H_i \backslash G$ の G の中での代表系 Θ_i を取り, 前のまうに, U_i を $\mathcal{H}_i = \ell^2(\Theta_i)$ で実現する. $M \in \mathcal{H}_2$ から \mathcal{H}_1 への $\tau = 4$ 作用素で,

$$MU_2(g) = U_1(g)M \quad (g \in G)$$

なるものとする。単位元 $e \in \mathbb{H}_2$ の特性函数 $\chi_2 \in \mathbb{H}_2$ とし、
 $\Phi_1 = M\Phi_2$ と置く。 $h \in H_2$, $x \in \mathbb{H}_1$ に対し、

$$\cancel{U_1(h)\Phi_1} = MU_2(h)\Phi_2 = \chi_2(h)\Phi_1,$$

$$U_1(h)\Phi_1(x) = \chi_1(x, h)\Phi_1(xh)$$

が成立つから、 $|\Phi_1(xh)| = |\Phi_1(x)|$ となる。 \mathbb{H}_1 の元 x
 \rightarrow 固定する。集合 $x^{H_2} = \{xh; h \in H_2\}$ が無限集合
 なる、定理1の証明と同様に、 $\Phi_1(x) = 0$ となるだけならば
 なる。

いま一時的に $H_1 = H_2 = H$ とする。補題により、 Φ_1 の台は
 \mathbb{H}_N に含まれ、 $\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \Phi_n$ と書ける。

$$U_1(h)\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n U_1(h)\Phi_n = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \chi_1^n(h)\Phi_n,$$

$$U_1(h)\Phi_1 = \chi_2(h)\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \chi_2(h)\Phi_n$$

が成立つ。 $\alpha_n \neq 0$ なる $n \in \mathbb{H}_N$ を取れば $\chi_2(h) = \chi_1^n(h)$
 となり、結論が出た。

一般の場合に戻る。 Φ_1 は0でないから、 x^{H_2} が有限集
 合であるような $x \in \mathbb{H}_1$ が存在する。 H_2 の x^{H_2} への遷移
 作用の x での固定群は $H_2 \cap x^{-1}H_1x$ であるから、これは H_2 の中で
 指数有限である。条件(7)により、 $H_2 \subset x^{-1}H_1x$ となる。

✓

同様に, \textcircled{A}_2 のある元 y に対して, $H_1 \subset y^{-1} H_2 y$ が成立つ.
 条件 (F) 2 により, $H_2 = x^{-1} H_1 x = y H_1 y^{-1}$ となり, H_2
 の指標 χ_2^x から G の誘導表現を U_1^x とすると, U_1^x は U_1
 に同値だから U_2 と同値である. したがって, \textcircled{A}_N のある
 元 n を取る $\chi_2 = (\chi_1^x)^n = \chi_1^{x^n}$ となり, 定理は証明
 された. 終.

注意. G が密可算部分集合をとり, $\mathfrak{h} \supset U_1, U_2$ がともに
 既約だと仮定すると, 定理 2 は Mackey [2] の定理 7' から
 たゞちに出る.

§3. 代数群の場合.

k を無限完全体, G を k 上定義された連結線型代数群とし,
 ~~$G(k)$~~ G の k 上の有理点全部の群に離散位相を入れた群を
 $G(k)$ とする. G の k 上定義された連結閉部分群 H を走
 るべきの $H(k)$ の左体を A とする.

定理 3. A は条件 (F) をみたす ($G(k)$ ~~に~~ 関し).

証明. $H(k)$ は指数有限の H の部分群を持つから 1 はみた
 された. また, $\mathfrak{h} \supset g H(k) g^{-1}$ ($g \in G(k)$) と $H(k)$ とは同
 次元だから, 一方が他方に真に包含されることはなく, 2 をみ
 たされた. 終.

この定理は、とくに正規化群の小さな部分群、たとえば放物部分群やカルタニ部分群の場合に有効である。

系. G が reductive であるか、または k が代数閉体であると仮定する。 P を G の k 上定義された放物部分群とする。このとき、 $P(k)$ の指標から誘導した G の表現はすべて既約である。 \Rightarrow の異なる指標からの誘導表現はたがいに非同値である。

証明. $P(k)$ の正規化群は $P(k)$ 自身である。

§4. 病理現象.

G を離散群、 H を G の可換部分群、 \hat{H} を H の指標群とする。 $\chi \in \hat{H}$ から $G \cap$ の誘導表現を $U(\chi)$ とすると、 G の右正則表現 T は、 $U(\chi)$ 、 $\chi \in \hat{H}$ の直積方に分解される：

$$T = \int_{\hat{H}} \oplus U(\chi) d\chi$$

ただし $d\chi$ は \hat{H} のハール測度である (Godement [1])。

T の \Rightarrow の既約分解

$$T = \int_A \oplus U^\alpha d\alpha = \int_B \oplus V^\beta d\beta$$

が たがいにまったく無関係 であるとは、 1) $\alpha \in A$ 、 $\beta \in B$

有 $U^\alpha \times V^\beta$, 2) $\alpha, \alpha' \in A$, $\beta, \beta' \in B$, $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$
 有 $U^\alpha \times U^{\alpha'}$, $V^\beta \times V^{\beta'}$ が成立することをあすし定義
 する。

ゴードマンの定理をモジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に適用すると,
 ここには述べなかった定理 ([3]を見よ) により, つぎの
 定理が成立つ。

定理4. モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の右正則表現は, 無限に
 多くの, たがいにまったく無関係な仕方, 無限次元既約表
 現の直積方に分解される。

これは, 吉沢尚明 [5] や Mackey [2] の例 (= つぎの仕
 方での分解) よりさらに病理的な例を与えている。

文 献

- [1] R. Godement, Sur les transformations de Fourier dans les groupes discrets, C.R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 627-628.
- [2] G.W. Mackey, On induced representations of groups, Amer. J. Math., 73 (1951), 576-592.
- [3] M. Saito, Représentations unitaires du groupe modulaire, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 381-383.

- [4] M. Saito, Représentations unitaires du groupe modulaire Γ , *ibid.*, 641-642.
- [5] H. Yoshizawa, Some remarks on unitary representations of the free group, *Osaka Math. J.*, 3 (1951), 55-63.