数理解析研究所講究録
183巻 1973年 61-64

Equivariant Completion

甲南大　隅広秀康

k : 任意標数の代数的閉体.

G : k上定義された線型代数群.

X : k上定義された代数的多様体で, GがXに作用しているとする. 簡単の為に, この様なXをG-多様体ということにする.

線型代数群が, 代数的多様体に作用しているとき, 次の様な基本的な事柄が成り立つ. 詳しい内容及び証明は, ここでは省略することにし, 次の論文を見ていただくことにします.

Equivariant Completion : Jour. of Math. of Kyoto Univ. 1974, Vol 14. (to appear)

<u>Theorem 1</u>. Gを連結線型代数群, Xを正規準射影的G-多様体とするとき, $\exists \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ (埋め込み)

$\exists \rho : G \longrightarrow PGL(N)$（表現）で、次の図式を可換にするようなものが存在する．

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\rho\times\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ PGL(N)\times \mathbb{P}^N \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

但し．$\sigma : G\times X \to X$ は G の X への作用，$\sigma : PGL(N)\times\mathbb{P}^N \to \mathbb{P}^N$ は $PGL(N)$ の $\mathbb{P}^N$ への自然な作用．

即ち，連結線型代数群の正規準射影代数的多様体への作用は，すべて，線型であることが解かる．

<u>Theorem</u> 2. G を連結線型代数群（又は，トーラス群），X を正規代数的 G－多様体とするとき，$\exists\, \mathfrak{U} = (U_\alpha)$: X の開近傍系で次の条件をみたすものがとれる．

(i) 各 U_α は G－不変である．

(ii) 各 U_α は準射影的（又はアフィン）多様体である．

<u>Remark</u> (1). Th. 1 と Th. 2 をあわせて考えることにより連結線型代数群（又は，トーラス群）の正規代数的多様体へのすべての作用は，いくつかの正規準射影的（又は，アフィン）多様体への線型作用をはり合せて得られるものであることが解かる．

(2). 研究会発表の後，Th. 1，Th. 2 は，任意の体 k において成り立つことが解かった．即ち，代数的閉体という条

件を課しても良い.

Th. 1 と Th. 2 を利用して, 代数幾何学において, 有用な, Chow's lemma, と永田雅宜氏の, すべての代数的多様体を proper な代数的多様体に埋め込むことが出来るという結果を次の様に拡張出来る.

Theorem 3 (Equivariant Chow's lemma) G を連結線型代数群, X を G-多様体とするとき, $\exists(\tilde{X}, \varphi)$ が存在し次の条件をみたす.

(i) $\tilde{X}$ は準射影的 G-多様体.

(ii) $\varphi: \tilde{X} \longrightarrow X$ は G-不変な双有理射影的写像.

(iii) $\exists U$ (X の G-不変な開部分集合) が存在し,

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(U)}: \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \quad (\text{同型})$$

Theorem 4 (Equivariant Completion) G を線型代数群 (必ずしも, 連結でなくても良い), X を正規 G-多様体とするとき, $\exists \bar{X}$ で次の条件をみたすものが存在する.

(i) $\bar{X}$ は proper な G-多様体.

(ii) X は $\bar{X}$ の G-不変開部分多様体として, $\bar{X}$ に埋め込める. この様な二つの条件をもった G-多様体を X の equivariant completion ということにする.

Theorem 4 を証明するにあたって, G-twisted valuation ring が大切な役割をはたす. v を X の関数体

$k(X)$ の valuation ring とするとき，v が X の閉部分多様体 Y に中心をもっているとする．Y の G-orbit を中心として持つ $k(X)$ の valuation ring $\bar{v}$ を作ることが出来る．$\bar{v}$ を v の G-twisted valuation ring という．

Th. 4 の応用として，

<u>Theorem</u> 5. G を線型代数群（必ずしも連結でなくても良い）X, Y を正規 G-多様体，$f: X \to Y$ を G-不変写像，$\bar{Y}$ を Y の（勝手な）equivariant completion とするとき，$\exists(\bar{X}, \bar{f})$ で次の条件をみたすものが存在する．

(i) $\bar{X}$ は X の equivariant completion

(ii) $\bar{f}: \bar{X} \to \bar{Y}$ は G-不変な写像で，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ Y \arrow[r] & \bar{Y} \end{tikzcd}$$

<u>Remark</u> (1) Th. 5 は，Haboush 氏によって，証明を予告された．

(2) Th. 1 〜 Th. 4 迄の結果を relative case のときに拡張する仕事は大切な問題と思われる．