

Ⅱ種超伝導体中の Flux Line の形成

大阪市立大, 理, 亀高 惟倫

先づ問題と結論及びその物理的背景, について書こう。非線型放物型方程式に対して特異境界値, 初期値問題を考える。

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{v^2}{r^2} u + (1-u^2)u \\ 0 \leq u(r, t) \leq 1 & (r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(r, 0) = u_0(r) & r \in (0, \infty) \end{cases}$$

$v > 0$  は問題の長さ  $x$  -  $t$  - , 初期値  $u_0(r)$  は  $0 \leq u_0(r) \leq 1$   $r \in (0, \infty)$  であり連続関数とする。対応する定常問題は,

$$(2) \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - \frac{v^2}{r^2} w + (1-w^2)w = 0 & r \in (0, \infty) \\ 0 \leq w(r) \leq 1 & (l = \frac{v}{r}) \end{cases}$$

であり, 2. 非線型な Sturm-Liouville の特異境界値問題となる。非線型問題でありその逐次近似で線型問題を解く事に帰着する。これは次の (3), (4) である。

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} u - \left(\mu + \frac{\nu^2}{r^2}\right) u + F(r, t) & (r, t) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(\infty, t) : \text{bounded} \\ u(r, 0) = u_0(r) & r \in (0, \infty) \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

$$(4) \begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' - \left(\mu + \frac{\nu^2}{r^2}\right) w + F(r) = 0 & r \in (0, \infty) \\ w(0) = 0, \quad w(\infty) : \text{bounded} \end{cases}$$

(3), (4) に対応し境界点  $r=0$ ,  $r=\infty$  は特異点となり、2 "3" がこの事情を詳しくいえる次の様である。先ず Feller と McKean は境界点を regular, exit, entrance, natural の4種に分類したか、その下に従って  $r=0$ ,

$r=\infty$  は natural (境界条件は“この辺傍で有界に留る”) である。この際は無条件でかついえると言、2 次く Weyl の分類では  $r=0, \infty$  共に limit point case. (4) に対応し Poincaré の言葉でいうと  $r=0$  は確定特異点、 $r=\infty$  は1級不確定特異点である。この事は (2) の解の詳しい性質に反映する。以上のような意味で非線形問題 (1), (2) に対応して特異境界値問題という言葉を使え。

主要な結論は

定理 1 (2) は唯一つの非自明解  $w(r)$  を持つ。これは

$$(i) \quad w(r) \in C^2(0, \infty)$$

$$(ii) \quad 0 < w(r) < 1 \quad r \in (0, \infty)$$

$$(iii) \quad 1 - w(r) = O(r^{-2}) \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

$$(iv) \quad w(r) = u_0(\nu) r^\nu + O(r^{\nu+2}) \quad \text{as } r \rightarrow 0$$

$$u_0(\nu) = \frac{1}{2\nu} \int_0^\infty (1 - w^2(s)) w(s) s^{1-\nu} ds$$

$$(v) \quad w'(r) > 0 \quad r \in (0, \infty)$$

$$(vi) \quad 0 < \nu \leq 1 \quad \text{なるとき} \quad w''(r) < 0 \quad r \in (0, \infty)$$

(vii)  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  なる整数  $\nu$  に対しては、(2) は  $u_0(\nu) r^\nu + u_1 r^{\nu+1} + \dots$  の形の非自明解を持つが、これは  $r \rightarrow 0$  のとき  $w(r)$  の漸近級数である。

を満たす。証明は [1] にある。

定理 2 (1) は唯一つの大域解を持つ。  $u_0(r)$  は  $r > 0$  なる

この解  $u(r, t)$  は  $t \rightarrow \infty$  と可なり  $r \in [0, \infty)$  かつ  $u$  は compact 一様  $w(r)$  に収束する。  $w(r)$  は定理 1 の  $w(r)$  (2) の唯一つの非自明解。

これはこの結論の意味する所は素題にわかかた通りであるが、詳しくいうと次の通り。先ず超伝導現象をこのように紹介する。これは 1911 年 K. Onnes が自ら発見した。

1) リン酸装置を従、2) 低温における水銀の電気抵抗を測  
 定中に、ある臨界温度  $T_c$  以下で電気抵抗が突然ゼロになる事  
 を発見した事に端を発する。すなわちある種の金属及び合  
 金はある臨界温度  $T_c$  を越え2) 温度を下げると正常伝導状態か  
 ら超伝導状態に移る。これは熱力学第一の相転移であり、2)  
 超伝導状態の電気抵抗の他に完全反磁性 (Meissner効果)  
 等のいろいろな性質が特徴付けられ、一言でいうと量子効  
 果のマクロな出現という事になる。この量子効果の  
 マクロな出現を最もよく表わしているのがII種超伝導体中  
 の Flux Line である。これは次の様な現象である。ある  
 種の超伝導体 (II種超伝導体) は、ある臨界値  $H_c$  よりも  
 弱い磁場をかけるに Meissner効果は少し破れて、磁場が磁束  
 が量子化された磁束線の三角格子という形で超伝導体中にし  
 み込めるという現象がある。一本の磁束線 (Flux Line) を注  
 目してみよう。これは永久電流の渦をとり囲まれた渦糸で  
 もあるが渦糸の中心では完全に正常伝導状態であり中心から  
 離れたところでは超伝導状態に徐々に移行する、十分離れたところ  
 完全に超伝導状態になる。この様子を数量化するた  
 めには中心からの距離  $r$  に対して超伝導の度合いを表わす  
 $\psi(r)$  を  $r$  に対してプロットしてみればよい。この  
 時の  $\psi(r)$  の変化を記述する局所波関数 (常微分方程式) とこの

境界条件が 1957 年 A.A. Abrikosov [2] に於て、2 導から、  
 可成り (2) である。  $w(r)$  は図 1 に示したようにふるま  
 うが、そのため  $\nu=1$  の場合の (I 型) の獲得計算から  
 $\nu=1$  のものばかりが実現する、なお実現しないものは  $\nu=$   
 $1, 2, 3, \dots$  に対応する (2) の解は 4 であり、2 の事は磁場の  
 量子化という事象に対応する) 数値計算の結果 (Ginzburg と  
 Pitaevskii に於て) を示したとおり。

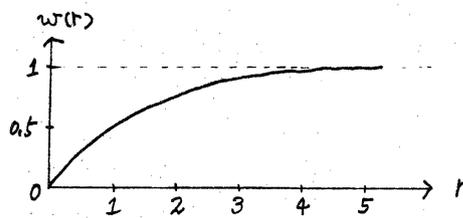


図.1 Ginzburg - Pitaevskii に於て  $\nu=1$  の (2) の解  $w(r)$  の  
 数値計算 [3]

2 次元に帰し、2 超伝導の基礎方程式 (いわゆる G-L eq.)  
 は 1950 年 Ginzburg - Landau [4] に於て、2 導から、  
 とする。  $|u|^2$  が超伝導の度合いを表わす ( $|u| \leq 1$  であ  
 り、2  $|u|=0$  の所が常伝導状態の所、 $|u|=1$  の所が完全に  
 超伝導状態の所を表わすものとされたい) する。 複素数値  
 函数  $u$  と磁場のベクトルポテンシャル  $V A = (A_1, A_2, A_3)$   
 の間に準線型楕円型偏微分方程式系がある。  $u$  の事は  
 Ginzburg - Landau の order parameter と呼ぶ。 Abrikosov

は二の G-L 方程式から出発して (2) を導いたのである。

→ 1966年 Abrahams - Tsumeto [5] は非常問題として、Ginzburg-Landau の order parameter  $u(x,t)$  の対する時間依存方程式を導いた。これは  $(T_c - T)/T_c \ll 1$  の仮定の下で、つまり臨界温度以下であり、かつ臨界温度に近い所という仮定の下で、次の様な非線形拡散方程式である。

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1 - |u|^2) u$$

次の様に変数分離された (5) の解を考える。

$$(6) \quad u = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, t) = u(r, \theta, t) \\ = u(r, t) e^{i\omega\theta} \quad (\omega > 0)$$

この時  $u(r, t)$  の満たす方程式が可なり (1) である。 (2)

の解  $w(r)$  に対し  $w(r) e^{i\omega\theta}$  は (5) の定常解でもある事に注意しよう。 従って、2 Abrikosov の方程式 (2) は

Abrahams - Tsumeto の方程式 (5) の定常方程式の一つとして導かれる事に注意しよう。 以上の背景の説明が明らかになれば、たまたま定理解の意味する所は、(2) は常伝導状態

に対応する自明な解  $w \equiv 0$  と Flux line に対応する非自明解  $w(r)$  を持つ二つの解がある。 又定理解の意味する

所の初期時刻  $t=0$  で Flux Line の芽が少しだけある時



たもつをええとする。 (1), (2) と同時に (7), (8) の結論を  
 $L \rightarrow 0$  としたものを合わせ考えると定理 2 の証明がそ  
 れぞれの2つあるが、 $\lambda = 2$  の (1), (2) (7), (8) と対応する基本  
 解と Green 函数が次の様に explicit とおける事を述べたい  
 となる。

$$(9) \quad e^{-\mu t} U(r, s, t) = e^{-\mu t} \frac{1}{2t} I_\nu\left(\frac{rs}{2t}\right) e^{-\frac{r^2+s^2}{4t}} \quad (\mu > 0)$$

ここで  $I_\nu(x)$  は  $\nu$  次零形 Bessel 函数の 1つ。

が (9) と対応する基本解2つあり。

$$(10) \quad G(r, s; \mu) = \begin{cases} I_\nu(\sqrt{\mu}r) K_\nu(\sqrt{\mu}s) & 0 < r < s \\ I_\nu(\sqrt{\mu}s) K_\nu(\sqrt{\mu}r) & 0 < s < r \end{cases} \quad (\mu > 0)$$

ここで  $K_\nu(x)$  も零形 Bessel 函数の 1つであり、 $I_\nu(x)$

と共に零形 Bessel 方程の基本解系をなす。

が (2) と対応する Green 函数2つあり。

$$(11) \quad G_L(r, s; \mu) = G(r, s; \mu) - \frac{G(r, L; \mu) G(s, L; \mu)}{G(L, L; \mu)}$$

が (8) と対応する Green 函数2つあり。上式右辺の2項が解  
 正函数2つあり。この Laplace 逆変換 ( $\mu > 0$  とする) を

$U_L^0(r, s, t)$  とすると (9) と対応する基本解  $e^{-\mu t} U_L(r, s, t)$  は

$$\begin{aligned}
 (iv) \quad U_L(n, s, t) &= U(n, s, t) - U_L^c(n, s, t) \\
 &= U(n, s, t) - \frac{1}{L^2} U_1^c\left(\frac{n}{L}, \frac{s}{L}, \frac{t}{L^2}\right)
 \end{aligned}$$

補正函数  $U_L^c(n, s, t)$  が詳しくわかれば、 $U(n, s, t)$  がわかれば、 $U_L(n, s, t)$  がわかるといえる。ここで  $G(n, 1; \mu) G(s, 1; \mu) / G(1, 1; \mu)$  の Laplace 変換であることが、一般化された Abel の積分方程式の解である。したがって、一般化された Abel の積分方程式の解として、2 境界連続核を持つ 2 種 Volterra 型積分方程式に帰着する。したがって、補正函数  $U_L^c(n, s, t)$  の Resolvent 核を得、explicit に表わすことが出来る。このことが重要な情報が全て得られる。

### 参考文献

- [1] Kametaka, Y. : On a nonlinear Bessel equation,  
Publ. RIMS Kyoto Univ. 8 (1972) 151-200
- [2] Abrikosov, A. A. : On the magnetic properties of superconductors of the second group, Soviet Physics JETP 5 (1957) 1174-1182
- [3] Ginzburg, V. L. and L. P. Pitaevskii : On the theory of superfluidity,  
Soviet Physics JETP 7 (1958) 858-861
- [4] Ginzburg, V. L., and L. D. Landau : On the theory of superconductivity  
(in Russian) Zh. Exptl. Teor. Fiz. 20 (1950) 1064-1082
- [5] Abrahams, E. and T. Tsumoto : Time variation of the Ginzburg-Landau order parameter, Phys. Rev. 152 (1966) 416-432