

ブラウン運動と乱流中に導遊する
大きい粒子の運動

東大 工 桑原 真二

§ 1. まえがき

今日まで、乱流の構造に関する理論は、多くの研究者により、色々の立場から構成されてきた。E. Hopf の理論は統計力学的立場に立つものであり、粒子系の Liouville 方程式を連続無限自由度の力学系に一般化したものである。乱流を統計力学的に考察する場合、各点 x の流速 $v(x)$ (又、そのフーリエ成分 $v(k)$) が偶然量と考えられ、したがって位相空間は $v(x)$ 又は $v(k)$ 函数空間となる。

統計力学的対象において、偶然性の要因は運動方程式中の偶然力と初期条件以外には考えられない。決定論的 Navier-Stokes 方程式のもとで乱流を問題にする場合には、それ故、偶然性の要因は初期条件以外にはない。

一方、我々が乱流について観測できる量は限られたものである。ということは、全位相空間ではなしに、もっと小さい部分空間に着目していることとなる。この事情は古典統計力学において Liouville 方程式ではなしに、Boltzmann

方程式や Fokker-Planck 方程式を論ずることには対応して
 り。

この論文では乱流中に浮遊する粒子の運動から、乱流につ
 いて如何なる情報がえられるかを論ずる。粒子の運動によ
 って我々は乱流の情報の一部をとらえていいるから、位相空間
 のある部分空間に着目していいるといえよう。

§2. レイノルズ方程式と渦粘性

流体の方程式は

$$C(x) \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x_x} = 0 \quad (2.1)$$

$$N_\alpha(x) \equiv \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\rho_{\alpha\beta} - \rho v_\alpha v_\beta) = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_{\alpha\beta} = -p \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right) \quad (2.3)$$

と書かれる。ここで $v_\alpha(t, x)$ は流速、 $p(t, x)$ は圧力、

$\rho_{\alpha\beta}(t, x)$ は応力テンソル、 ρ は密度である。諸量を平均
 流(—)と乱流(~)に分解し

$$\left. \begin{aligned} v_\alpha &= \bar{v}_\alpha + \tilde{v}_\alpha, & p &= \bar{p} + \tilde{p} \\ \langle \tilde{v}_\alpha \rangle &= 0, & \langle \tilde{p} \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

とおく。ここで $\langle \rangle$ は統計平均 ensemble mean とあらわ
 す。

平均法についての方程式をつくると

$$\langle C(x) \rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (2.5)$$

$$\langle N_\alpha(x) \rangle \equiv \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P_{\alpha\beta} - \rho \bar{v}_\alpha \bar{v}_\beta) = 0 \quad (2.6)$$

$$P_{\alpha\beta} = \bar{p}_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta}^R \quad (2.7)$$

$$\bar{p}_{\alpha\beta} = -\bar{p} \delta_{\alpha\beta} + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.8)$$

$$p_{\alpha\beta}^R = -\rho \langle \tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta \rangle \quad (2.9)$$

となる。(2.6)はレイノルズ方程式、(2.9)はレイノルズ応力とよばれる。(2.5) ~ (2.9)方程式系は(2.9)に \tilde{v}_α , \tilde{v}_β がはいっているもので、これを形としていながら

$$p_{\alpha\beta}^R = \mu_e \left(\frac{\partial \bar{v}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \quad (2.10)$$

とおき、 μ_e がわかつたものと考へると、(2.5) ~ (2.9)はといふものとなる。(2.10)の μ_e は渦粘性とよばれる。

この論文では、渦粘性が、他の平均量と如何に關係しているかを論ずる。

§3. ブラウン運動

ブラウン運動の理論は、次の仮定のもとに成り立っている。

I. ブラウン粒子の大きさは(半径 a の球とす)平均自由行程 λ にくらべて大きい:

$$a \gg \lambda \quad (3.1)$$

したがって、粒子の運動には分子粘性の効果がある。

II. ブラウン粒子の運動は熱運動と平衡状態にある。

III. ブラウン粒子同士の衝突は少く、その抗数は熱運動のゆらぎの効果にほとんど等しく。

バックグランドの流体は止っているとし、ブラウン粒子系は連続体とみ直す。まず仮定 II から

$$p_b = n_B n T \quad (3.2)$$

がえられる。 p_b はブラウン粒子系の分圧であり、ブラウン粒子を通さない半透膜における浸透圧として観測される。

n はブラウン粒子の数密度、 T は溶媒の粒子系の温度、 k_B はボルツマン定数である。

粒子数保存法則から、連続の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n \mathbf{w}) = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここで \mathbf{w} はブラウン粒子系の連続体としての流速である。更にブラウン粒子系の運動方程式を、仮定 I より

$$m n \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = -\text{grad } p_b + m n \mathbf{K} - m n \gamma \mathbf{w} \quad (3.4)$$

となる。ここで m はブラウン粒子の質量、 \mathbf{K} は外力（体積力）、 γ は粒子の暴動度で、Stokesの抵抗法則が成立している場合は

$$\gamma = 6\pi\mu a \quad (3.5)$$

となる。

さて、(3.4) はブラウン運動を平均化してえらわきもので、
 個々のブラウン粒子に対する方程式では偶然力の項があり、
 圧力項はない。平均化によって偶然力は圧力項に変形して
 わけである。平均化された運動においては、速い運動はな
 くゆっくりいから、(3.4) では慣性項と粘性項にくらべて小
 さいとみなし、完全に無視するこことができ。このような
 省略を行った(3.4)と(3.2)、(3.3)からブラウン粒子の拡散
 の方程式：

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T}{m \gamma} \Delta n - \frac{1}{\gamma} k \cdot \text{grad } n \quad (3.6)$$

という。これから拡散率 D は

$$D = \frac{k_B T}{m \gamma} \quad (3.7)$$

であることがわかる。これがアインシュタインの関係式に
 外ならない。

§4. 乱流中に浮遊する大きい粒子の運動

乱れを管流を考えよう。管壁附近のうすい領域と管の中
 心領域の2つの領域に分けて考察する。管壁近くの領域で
 は分子粘性応力が、中心領域ではレイノルズ応力が必ず支配

的である。前者では平均流速の急激に変化する境界層の厚さ δ が、後者では管の直径 d が特徴的長さと考えらる。

これらの長さに対して波数

$$k_{\delta} = 2\pi/\delta \quad k_d = 2\pi/d \quad (4.1)$$

を対応させよう。

乱れた管流では、等方性も、一様性も一般に仮定しがたくなり、したがってエネルギー・スペクトルの概念も正確には成立しない。しかし、中心領域では、一様性、等方性が大分成立しているのみならず、等方性が十分に成立しない場合にも、エネルギー・スペクトルを

$$E(k) dk = \frac{1}{4\pi k^2} \iiint_{k \leq |k| \leq k+dk} \langle v(k)^* v(k) \rangle dk \quad (4.2)$$

と定義しておく。

ブラウン運動は熱動揺 thermal agitation と分子粘性による減衰のもとおこすものであった。乱流中に浮遊する粒子の運動も、ブラウン運動と非常によく似た対応関係がある。つまり、このような粒子の運動は、乱流動揺 turbulent agitation と、滑粘性による減衰効果をうける。ただし、このような条件にあてはまる粒子はある程度 "大きい" 粒子でなければならぬ。というのは、乱流においては大きい運動 (小さい波数) と小さい運動 (大きい波数) とは力学的

平衡のこゝからである。

乱れた管流では、圧力勾配によつて壁附近の領域で強い渦が発生し、その渦は偶然的に、あつたはもつと大きい ordered motion によつて中心領域にはこぼれず。近似的に一様性、等方性をもつ中心領域でのエネルギー・スワクトンは、右の附近にエネルギー供給があり、しむがつて極大をもちと予想される。左より右まゝの方は散逸の効果が大きく、力学的平衡にあると考へられる。又、右の大きい領域は、散逸効果が大きく、エネルギーが熱に変へられるから、供給されたエネルギーは左の大きい方へ流れて行くものと考へられる。

$k < k_0$ では、一種の力学的平衡にあると考へれば、乱流温度という概念が与えられる。一番小さい波数は k_0 と考へられるから、流体空間に k_0 に一边とする立方格子をつくり、 $|k| < k_0$ では、各格子長に対応する波数は統計的に、均等のエネルギーが分配されると考へられ、各自由度あたりの平均エネルギーを k_B で割れば乱流温度が与えられる。更に

$$k_0 = \pi/a \quad (4.3)$$

と球の半径 a に対応する波数とすれば

$$k_d \ll k_0 \ll k_0 \quad (4.4)$$

の条件が成立せば、球の運動は乱流温度で平衡状態になつて

いふと考ふことが出来る。

丁度分子粘性の場合に、分子がまわりの運動のやりとりの
 に^いてであつたまうに、滑粘性では、^いた^い滑が、大きい運動
 (平均法) に対してまわりの運動の運動量の^いて^いてになつ
 て^いた^いということができる。そして、小さい滑、大きい運
 動の境目は最大エネルギー・スロウトに対応する波数と考
 ふのが適当であらう。そこで今考ふてこの管法では^いた^いと
 する。しなかつて^いた^いと^いたらば、この環の運動は滑粘性
 の効果そうけるであらう。

上のようを考察から、ブラウン運動の基本的仮定 I ~ III
 は次のように修正して、ブラウン運動の理論を乱流中の浮遊
 粒子の運動に適用する^いた^いことができる。

I. 粒子の半径 a に対応する波数 k_a はエネルギー・スロ
 ウトの極大値に対応する波数 k_m にくらべて小さい:

$$k_a \ll k_m \quad (\equiv k_0) \quad (4.5)$$

しなかつて、粒子の運動は滑粘性の効果そうける。

II. $k < k_m (= k_0)$ の k の範囲で乱流は力学的平衡にあり、
 $k_d \ll k_a \ll k_m$ に対応する粒子の運動は又その乱流と力
 学的平衡にある。

III. 粒子同志の衝突は少く、その拡散は乱流のゆらぎの効果
 による。

上の仮定のもとで、ブラウン運動の場合と全く同じ議論によって、乱流拡散率 D_t 、渦粘性率 μ_t 、乱流温度 T_t の間に入ンシュタインの関係式が成立つ。仮定Ⅱにより粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2} m \langle c^2 \rangle$ (c は粒子速度) と乱流温度の間

$$\frac{1}{2} m \langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_t \quad (4.6)$$

がなり立つ。したがってアインシュタインの関係式は

$$D_t = \frac{\langle c^2 \rangle}{18 \pi \mu_t a} \quad (4.7)$$

となり。

乱流拡散率は1個の粒子の運動から

$$\langle x^2 \rangle = 2 D_t t \quad (4.8)$$

によってもとまる。すなわち、 $t=0$ に原点にある粒子が t 後において移動した1次元距離 x の2乗平均と t の関係とプロットすればその比例係数から D_t が求まる。粒子の運動から D_t と $\langle c^2 \rangle$ を観測し、流体の平均速度勾配と粘性力の測定から、 μ_t を知れば、(4.7) を用いて a が求まる。

乱れた管流において、中心領域 I では μ_e が、境界領域 II では μ が支配的であり、境界 $\delta = a - \delta$ で、流速と粘性力が連続という境界条件によつて、流体の方程式をとくと、I, II 各領域の流速 u_I, u_{II} は

$$u_I = \frac{C}{4} \left(\frac{a^2}{\mu} + \frac{b^2}{\mu^*} - \frac{r^2}{\mu_e} \right) \quad 0 \leq r \leq b \equiv a \left[\frac{\mu^*}{3} \left(\frac{Q}{8\pi a^4 C} - \frac{1}{\mu} \right) \right]^{1/4}$$

$$u_{II} = \frac{C}{4\mu} (a^2 - r^2)$$

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_e}$$

(4.9)

となる。ここで、 Q は流量、 C は平均圧力勾配である。厚
 薄も、乱流が非常に強く（レイノルズ数大）、境界層の
 厚さが管径にくらべて非常に小さければ（4.9）の $b \equiv a$
 とおけば

$$\frac{1}{\mu_e} \equiv \frac{4}{3\mu} - \frac{Q}{8\pi a^4 C} \quad (4.10)$$

となり、圧力勾配 C と流量 Q から、渦粘性がわかる。

結論として、乱流中に浮遊する粒子の半径 a が

$$\frac{2\pi}{k_m} \ll a \ll d$$

の条件を満足すれば、アインシュタインの関係式：

$$D_t = \frac{\langle v^2 \rangle}{8\pi \mu_t a}$$

が成立する。ここで k_m は乱流のエネルギー・スペクトルの最大
 の波数、 d は乱流領域の寸法、 $\langle v^2 \rangle$ は粒子の速度の2乗可
 均、 D_t 、 μ_t は乱流拡散率、渦粘性率である。

参考文献:

- 1) E. Hopf: J. Rational Mech. and Anal. 1, 87 (1952).
- 2) A. Einstein: Ann. der Phys. 17, 549 (1905).