数理解析研究所講究録
185巻 1973年 79-92

乱流の準正規分布理論と多時間展開法

京大 理　巽 友正・木田重雄

§1. 序論

一様な乱れの各次の相関あるいはスペクトルを支配する方程式は無限の連鎖を形成し，この連鎖を閉じさせるためには何らかの閉鎖仮説を必要とすることは良く知られている。このような仮説の一つとして準正規分布近似，あるいは0－4次キュムラント近似[1]が提案されて以来，この近似理論の得失がいろいろな角度から論じられてきた。[2] その中でも，この近似の最も致命的な欠陥といえるものは，この近似を用いてスペクトル方程式を解いた場合，Reynolds数の小さな値を除いては，スペクトルに負のエネルギー帯が発生するということである。このような事情のため，準正規分布理論の有効範囲は，Reynolds数の比較的小さい値に限られるものと一般に受取られてきた。

しかるに最近，Malfliet[3]が統計力学における Bogo－

liubov の多時間展開の手法を適用することによって，準正規分布近似においても負エネルギーが発生しない結果が得られることを，Burgers乱流モデルについて示した。もし，このことがある初期値問題のみに関する偶発的な結果ではなく，物理的な根拠をもつものであるならば，準正規分布近似は，乱流の一つの解析的理論としてこれまでに認められた以上の有効範囲を主張しうることになる。この点に関して若干の考察を試みるのが本論文の目的である。

本論文では，まず（§2），Burgers乱流モデルについて，多時間展開の意味を他の近似と対比しつつ検討し，ついで（§3），3次元のNavier-Stokes乱流について，この展開によるスペクトルの漸近形を予測し，最後に（§4），Reynolds数無限大の極限におけるスペクトルの漸近形を求め，それとの比較のもとに多時間展開の有効性を探ってみたいと思う。

§2. Burgers乱流

1次元乱流のFourier分解の波数を k，乱れのエネルギー・スペクトルを $E(k, t)$，ただし t は時間，とすると，準正規分布近似によるスペクトル方程式は，つぎのように書ける[4]：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)E(k,t)=k\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k,k',k'';t)\,dk'', \qquad (1)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\nu(k^2+k'^2+k''^2)\right\}\Phi(k,k',k'';t)$$

$$=kE(k',t)E(k'',t)+k'E(k'',t)E(k,t) \qquad (2)$$

$$+k''E(k,t)E(k',t),$$

ただし，$k+k'+k''=0.$

連立方程式(1)，(2)を初期条件

$$E(k,0)=E_0(k),\quad \Phi(k,k',k'';0)=0 \qquad (3)$$

のもとに数値的に解くことはJeng その他[5]によって試みられ，その際，初期条件 $E_0(k)=Ae^{-\alpha k^2}$ (A, α は定数)に対しては，負のエネルギー帯が発生することが示された。また後に，打切りの次数を上げて，0−5次キュムラント打切りを行っても，$k\approx 0$ 近傍でのスペクトルの振舞いは改善されるものの，負エネルギー発生は避けられないことがKawahara[6]によって示された。

一方，以上の近似理論とは別に，乱れの場のWiener展開を用いた打切り近似が，Meecham および Siegel[7]によって試みられたが，この近似のもとでは，(2)式の代りに関係式

$$\Phi(k,k',k'';t) = kE(k',t)E(k'',t) + k'E(k'',t)E(k,t) + k''E(k,t)E(k',t) \tag{4}$$

が導かれている。(4)式を方程式(1)と連立させて解いた場合には、負エネルギーの発生は起らず、またスペクトルの漸近形は、

$$k \to \infty \text{ のとき、} \quad E(k,t) \propto k^{-2} \tag{5}$$

となることが示される。

この結果は、後に示すように、Burgers乱流のReynolds数無限大における漸近的性質を正しく反映しており、好ましい結果であると云える。ところが、ここに一つ問題があって、それは(4)式はWiener展開の打切り近似の必然的帰結ではなく、その帰結は正しくは(2)式と全く同じものでなければならないということである。このことは原論文[7]を点検すれば明らかである。云い換えれば、(4)式はWiener展開とは関係なく、全く別の一つの近似として提案されて然るべきものなのである。しかし、(4)式はそれ自体合理的根拠をもっておらず、また次元的にも正しい形をしていない。このため、結果がたとえ優れているからと云って、(4)式を直ちに一つの近似として採用することは躊躇される。

ところが、これより後にMalfliet[3]は連立方程式(1)，

(2) を，多くの時間尺度を導入して解くことによって，負エネルギー帯が発生しないような結果を得た。その筋道はあらまし次のようである。まず，変換

$$
\left.\begin{aligned}
F(k,t) &= E(k,t)\, e^{2\nu k^2 t},\\
\phi(k,k',k'';t) &= \Phi(k,k',k'';t)\, e^{\nu(k^2+k'^2+k''^2)t}
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

を行う。新しい従属変数に対して方程式 (1), (2) はそれぞれ，

$$
\frac{\partial}{\partial t} F(k,t) = k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k,k',k'';t)\, e^{2\nu k'k''t}\, dk' \qquad (7)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi(k,k',k'';t) &= k\, F(k',t) F(k'',t)\, e^{2\nu k'k''t}\\
&\quad + k' F(k'',t) F(k,t)\, e^{2\nu k''kt} + k'' F(k,t) F(k',t)\, e^{2\nu kk't}
\end{aligned} \qquad (8)
$$

と書ける．

多時間展開は，F, ϕ をそれぞれ1つの時間 t の関数とする代りに，多くの時間 t, εt, $\varepsilon^2 t$, --- (ε は小パラメター) の関数を考えて，方程式の ε について同じべきを整理して解き，最後に $\varepsilon = 1$ とおく手法であるが，その第1近似においては，実体つぎのような近似操作と同等である。

まず，(7) 式の右辺を無視して，

$$
\frac{\partial}{\partial t} F(k,t) = 0.
$$

この解 $F = F(k)$ を(7)式の左辺に代入して，(7)式を積分すると，

$$U(k, k', k''; t) = \frac{1}{2\nu}\left\{ \frac{k}{k'k''} F(k') F(k'') e^{2\nu k'k''t} + \frac{k'}{k''k} F(k'') F(k) e^{2\nu k''kt} + \frac{k''}{kk'} F(k) F(k') e^{2\nu kk't} \right\}.$$

これを(7)式の左辺に代入し，しかる後に F の t 依存性を回復させて，(6)式を用いて $F(k, t)$ を $E(k, t)$ に戻すと，方程式，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) = \frac{k}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{ \frac{k}{k'k''} E(k', t) E(k'', t) + \frac{k'}{k''k} E(k'', t) E(k, t) + \frac{k''}{kk'} E(k, t) E(k', t) \right\} dk' \qquad (9)$$

を得る．この方程式はもとの連立方程式(1)，(2)とは違って，$E(k, t)$ に対する1階方程式であるため，初期条件は $E_0(k)$ だけを与えればよい．Malfliet は $E_0(k) = k^2 e^{-\alpha k^2}$ とおいて(9)式を数値積分したが，結果のスペクトルには負エネルギー帯は発生しなかった。$k \to \infty$ に対する漸近形としては，(5)式のような一定のべきの値は定まらなかったが，

$$k \to \infty \text{ のとき}, \quad E(k, t) \propto k^{-1} \sim k^{-3} \qquad (10)$$

の間を連続的に変化するという結果を得ている。この結果は，(4) 式とは違って物理的意味をもつ仮説が正定符号のスペクトルを導いたという点で，興味ある注目すべき結果であると言えよう。

§3. 3次元乱流.

§2でBurgers乱流の場合に用いた多時間展開の手法を，Navier-Stokes方程式に従う3次元乱流に適用してみればどうなるであろうか．

準正規分布理論によるスペクトル方程式は，代表的な波数 k_0，初期平均2乗速度 $u_0^2 = \langle |u|^2 \rangle_{t=0}$ を用いて無次元化した変数，

$$\left.\begin{aligned}
&\text{波数：}\ s = k/k_0, \quad \text{時間：}\ \tau = \nu k_0^2 t, \\
&\text{Reynolds数：}\ R = u_0/\nu k_0. \\
&\text{スペクトル関数：} \\
&\phi(s,\tau) = (8\pi k_0/u_0^2)\Phi(k,t) \\
&\qquad\quad = (2k_0^3/u_0^2 k^2)\,E(k,t)
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

[8]

を用いて，つぎのように表わされる：

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + 2s^2\right)\phi(s,\tau) = \frac{R}{2}\int_0^\infty ds' \int_{-1}^{1} \Psi(s,s',s'';\tau)\cdot A(s,s',s'')\cdot ss'^3\, d\mu. \quad (12)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}+(s^2+s'^2+s''^2)\right\}\psi(s,s',s'';\tau)$$
$$=R\{\phi(s',\tau)-\phi(s,\tau)\}\phi(s'',\tau) \tag{13}$$

ただし,　$s''^2=s^2+s'^2+2\mu ss'$,

$$\Theta(s,s',s'')=\left(\frac{ss'}{s''^2}+\mu\right)(1-\mu^2).$$

連立方程式(12), (13)を初期条件,

$$\phi(s,0)=\phi_0(s),\quad \psi(s,s',s'';0)=0 \tag{14}$$

のもとに数値的に解くことは Ogura[2] によって実行され，負エネルギー発生という結果が得られたことは既に述べた.

ここで，§2における と同様の多時間展開の手法を(12), (13)式に施してみたら，どのような結果が得られるであろうか.

まず，(6)式と同様の変換,

$$\left.\begin{aligned}F(s,\tau)&=\phi(s,\tau)e^{2s^2\tau},\\ \sigma(s,s',s'';\tau)&=\psi(s,s',s'';\tau)e^{(s^2+s'^2+s''^2)\tau}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

を行うと，方程式(12), (13)はそれぞれ,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F(s,\tau)=\frac{R}{2}\int_0^\infty ss'^3ds'\int_{-1}^{1}\sigma(s,s',s'',\tau)\cdot e^{(s^2-s'^2-s''^2)\tau}\,\Theta(s,s',s'')\,d\mu \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U(s, s', s''; \tau) = R \Big\{ F(s', \tau)\, e^{(s^2 - s'^2 - s''^2)\tau} - F(s. \tau)\, e^{(s'^2 - s^2 - s''^2)\tau} \Big\} F(s'', \tau) \tag{17}$$

と書ける．

長時間展開近似は，つぎのような近似操作と同等である．
(16) 式の右辺を無視して，

$$\frac{\partial}{\partial \tau} F(s. \tau) = 0.$$

この解を (17) 式の右辺に代入して，(17) 式を積分すると，

$$U(s. s', s''; \tau) = R \left\{ F(s', \tau) \frac{e^{(s^2 - s'^2 - s''^2)\tau}}{s^2 - s'^2 - s''^2} - F(s, \tau) \frac{e^{(s'^2 - s^2 - s''^2)\tau}}{s'^2 - s^2 - s''^2} \right\} F(s'', \tau).$$

これを (16) 式の右辺に代入して，F の τ 依存性を回復し，(15) によって $F(s. \tau)$ を $\phi(s. \tau)$ に戻すと，方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 2s^2\right) \phi(s, \tau) = \frac{R^2}{2} \int_0^\infty s\, s'^3\, ds' \cdot \int_{-1}^{1} \left\{ \frac{\phi(s', \tau)}{s^2 - s'^2 - s''^2} - \frac{\phi(s, \tau)}{s'^2 - s^2 - s''^2} \right\} \phi(s'', \tau) \cdot H(s. s', s'')\, d\mu. \tag{18}$$

を得る．

方程式(18)はスペクトル $\phi(s.\tau)$ に対する1階方程式だから、(9)式と同様、初期スペクトル $\phi_0(s)$ だけを与えれば解くことが出来る。そのような数値計算は是非試る価値があるように思われるが、ここではそのかわり、(18)式の解の定性的な性質を調べる一つの試みとして、$R \to \infty$ における解の漸近形を求めてみよう。

$R \to \infty$ の極限では、(18)式は、右辺$=0$ という方程式に帰着する。ここで、解をべき関数、

$$\phi(s.\tau) = A\,s^{-q}$$

の形に仮定すれば、方程式は

$$0 = \frac{1}{2}R^2A^2 s\int_0^\infty s'^3 ds'\int_{-1}^{1}\left(\frac{s'^{-q}}{s^2-s'^2-s''^2}-\frac{s^{-q}}{s'^2-s^2-s''^2}\right)\cdot\Theta\cdot d\mu$$

$$=\frac{1}{2}R^2A^2 s^{3-2q}\int_0^1 \theta^{2-q/2}\left(1-\theta^{2q-6}\right)d\theta\cdot\int_{-1}^{1}\left(\frac{\theta^{-q}}{1-\theta^2-\theta'^2}-\frac{1}{\theta^2-1-\theta'^2}\right)\left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^{-\frac{q}{2}}\cdot\Theta\cdot d\mu,$$

ただし、 $\theta'^2 = 1+\theta^2+2\mu\theta,$

となる。この方程式の1つの解は明らかに、$q=3$ で与えられる。したがって、

$$\phi(s.\tau) = A\,s^{-3},$$

すなわち、

$$E(k,t) \propto k^{-1} \tag{19}$$

が，$R\to\infty$ の極限における（18）式の漸近解を与える。

§4. $R\to\infty$，$k\to\infty$ の極限におけるスペクトルの漸近形

準正規分布近似は元来，Rの小さい値に対する近似の性格をもっており，それが多時間展開の手法を採用することによって，Rの大きい値に対しても物理的に良い結果を与えることが出来たといっても，その結果が果してRの大きい値に対する"正しい"結果になっているかどうかは吟味を要する問題である。

一方，$R\to\infty$ の極限における乱流の場は，空間的に狭い領域を占める特異面や特異線と，それ以外の滑かな変化をする領域とに截然と分離されることは，良く知られた事実である。非圧縮粘性流体においては，前者は渦層，渦糸であり，後者は渦なし（ポテンシャル）領域である。エネルギー・スペクトルは，低波数領域ではこれらの特異面・線の間隔や強さの分布によって異るが，高波数領域では特異性の種類のみに依存し，その種類を指定することによって決ってしまう。

Burgers乱流，2次元，および3次元 Navier–Stokes乱流の3つの場合につき，$R\to\infty$，$k\to\infty$ に対するスペクトルの漸近形を，途中の計算を抜きにして，結

果だけ列挙すればつぎのようになる.

4.1 Burgers乱流

乱れの場が，不規則な強さと間隔をもつ渦面（あるいは衝撃波）の集団であると考えると，スペクトルは，

$$k \to \infty \text{ で，} \quad E(k) \propto k^{-2}. \tag{20}$$

この結果は，(5) と完全に一致し，(10) とはすくなくとも矛盾はしていない．(10) の結果はしかし，数値計算から導かれたもので，Reynolds数の値によりまだまだ変る可能性があるものと考えられる。Malfliet の計算よりさらに大きな R の値に対して計算を行うことによって，(20) ともっと良く一致するような結果が得られることを期待したい。

4.2 2次元乱流

この場合，流れの特異性としては渦面と渦糸との2通りが考えられ，一般に有限の Reynolds 数のもとでは両者は混在しているものと考えられる．しかし，ここでは簡単のために，乱れの場は両者のどちらか一方の種類だけから構成されている場合を考える．

乱流を不規則な強さ，方向，間隔をもつ渦面の集団と見なすとき，スペクトルは，

$$k \to \infty \text{ で，} \quad E(k) \propto k^{-2}. \tag{21}$$

また，乱流を同様な渦糸の集団と見なすとき，

$k \to \infty$ で, $E(k) \propto k^{-1}$. (22)

これらの結果と比較すべき準正規分布理論による計算結果は, 残念ながらまだ得られていない。

4. 3 3次元乱流

4. 2 と同様, この場合にも特異性は渦面と渦糸の2通りがある.

乱れの場を不規則な強さ, 方向, 向きをもつ渦面の集団と考えるとき, スペクトルは,

$k \to \infty$ で, $E(k) \propto k^{-2}$. (23)

また, 乱れを同様な渦糸の集団と見なすとき,

$k \to \infty$ で, $E(k) \propto k^{-1}$. (24)

§3 の (19) の結果はまさに (24) と一致しており, 乱れの場の渦糸集団としての極限に対応している。有限の Reynolds 数においては, 乱れの場は渦面と渦糸という2種の特異性の混合と考えるのが自然であろうが (Saffman[2] 参照), $R \to \infty$ の極限では, 渦面の不安定性と渦糸の安定性から見て, 乱れの場は渦糸だけから構成されていると考えられる。もしこの推測が正しければ, 準正規分布・多時間展開による近似理論は $R \to \infty$ の極限においても"正しい"結果を与えるということになり, 理論の将来に期待を抱かせるに足る。しかし, そのことを確めるには, まだまだ多くの解析的・数

値的な検討が必要であるように思われる.

引用文献

1) I. Proudman and W. H. Reid: Trans. Roy. Soc. A 247, 163 (1954).
T. Tatsumi: Proc. Roy. Soc. A 239 16 (1957).

2) Y. Ogura: J. Fluid Mech. 16, 33 (1963).
P. G. Saffman: Topics in Nonlinear Physics, ed. N, J. Zabusky, (Springer Verlag) 485 (1968).

3) W. P. M. Malfliet: Physica 45, 257 (1969).

4) W. H. Reid: Appl. Sci. Res. A 6, 86 (1956).

5) D. T. Jeng, R. Förster, S. Haaland and W. C. Meecham: Phys. Fluids, 9, 2114 (1966).

6) T. Kawahara: J. Phys. Soc. Japan, 25, 892 (1968).

7) W. C. Meecham and A. Siegel: Phys. Fluids, 7, 1178 (1964).

8) T. Tatsumi: Rev. Mod. Phys. 32, 807 (1960).