数理解析研究所講究録
185巻 1973年 66-78

K.d.V および Modified K.d.V 方程式の相似解

東大宇宙研　橋本 英典・篠原 勝

概要

Korteweg-de Vries (K.d.V) 方程式

$$u_t + u u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

および修正 K.d.V 方程式

$$v_t + v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (2)$$

の相似解が共に、可動かわり点を持つ標準型の非線型方程式

$$w'' - \xi w = \pm w^3$$

の解から導かれることを示し、$\xi \ll -w^2$ における振動部の漸近解が非線型のためにいちじるしい位相のずれをおこすことを明らかにした。また数値計算の実行によって、かわり点の移動による複雑な挙動を明らかにした。なお(1)の相似解につき、3階の方程式の数値積分によって得られる Berezin & Karpman (1964) の数値解に別の分枝が存在することを示した。

§1. まえがき

非線型媒質中の長波長伝播波を支配する典型的な方程式である Korteweg-de Vries の方程式が浅水波に対して導かれ[1] その厳密解である孤立波(Soliton)や定常波列が求められたのは古いが、近時、成層流体[2)-4)]、回転流体[2)5)6)]、混相流体[7)]、プラズマ[8)-10)]の内

題にも同様な方程式があらわれることが明らかにされ、Soliton の集合や定常波列の性質が最近多くの人によって論じられている。

しかし一般の非定常波については、Gardner, Green, Kruskal & Miura[11] によって初期値問題が Gelfand-Levitan 型の積分方程式に帰着されることが示されてはいるものの、純数値計算をのぞいては研究が少ない。

筆者らは非定常解の中でも、その形が時間と長さのスケールの変換に対して相似に保たれるもの、すなわち相似解についてしらべているので、その一端をここに述べておきたい。この種の相似解はすでに Berezin Karpman[12], らにより、3階の常微分方程式の数値積分にもとづいて若干論じられているが、筆者はそれが2階のある標準型の非線型常微分方程式（Painlevé の方程式[15] の一種）の解から導かれることを示す。これはまた非線型のアルフベン波[13]や格子振動のあるものを支配する Modified K.d.V 方程式の相似解とも密接な関連を持ち、方程式の解が波動型から指数型に移行する。変わり点が振動によって移動する典型的な常微分方程式であり、その解を求めておくことは数学的にも興味あることであろう。

§2. K.d.V および Modified K.d.V 方程式の相似解

K.d.V 方程式(1)と Modified K.d.V 方程式(2)とを同時に考えよう。(1)と(2)が

$$u(x,t)=\tau^{-2/3}f(\xi),\quad v(x,t)=\tau^{-1/3}g(\xi) \qquad (3),(4)$$

ただし、

$$\tau = t/\sqrt{3}\ ,\quad \xi = x/(3t)^{1/3} \qquad (5),(6)$$

の形の相似解を持つことは次元解析によってただちにわかる。

実際直接代入によって、f, g に対する常微分方程式

$$L_2[f]\equiv f'''-\xi f'-2f=-3ff' \qquad (7)$$

$$L_1[g]\equiv g'''-\xi g'-g=-3g^2g' \qquad (8)$$

が得られる。特に

$$\xi\to\infty \text{ で } f\to 0,\quad g\to 0 \qquad (9)$$

となるものを問題にしよう。このとき(8)は積分によって

$$L[g]\equiv g''-\xi g=-g^3 \qquad (10)$$

を与えるが(1),(2)に対する Miura の変換[4]を想起すれば、条件(9)を満足する(7)の解が g を用いて

$$f=g^2\pm i\sqrt{2}\,g' \qquad (11)$$

となることは、

$$L_2[f]+3ff'=\left(\pm i\sqrt{2}\frac{d}{d\xi}+g\right)\{L_1[g]+3g^2g'\} \qquad (12)$$

となることからも確められる。あるいは(10),(11)で

$$g=ih \qquad (13)$$

とおけば

$$f=-h^2\mp\sqrt{2}\,h',$$

$$L[h]\equiv h''-\xi h=h^3 \qquad (14)$$

となり、h, g に対して右辺の符号に±のちがいしかない2階の非線型の常微分方程式

$$L[w] \equiv w'' - \xi w = \pm w^3 \qquad (15)$$

を解けばよいことになる。(15)は可動分岐点を持たぬ2階の非線型常微分方程式の標準形としてPainlevéが見いだした型の一つになっている[15].

$L[w]=0$ の解がAiryの関数として $\xi>0$ で指数型、$\xi<0$ で振動型となる固定変わり点 $\xi=0$ を持つのに対して、かわり点が振幅とともに変化する($\xi=\mp w^2$)ことは著しい特長である。

§3. 解の具体形

方程式(15)の解の具体的な形はあまり知られていないようなので、その近似解と数値解をしらべた。

i) $\xi \to -\infty$ の漸近解

$|\xi| \gg w^2$ では右辺が無視され、一般に振動型のAiry関数で近似されそうであるが、位相のずれが大きいので特異摂動法に訴える必要がある。そのためWKB式の変数変換[16]

$$\zeta = \frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}, \quad w = (-\xi)^{1/2}\zeta^{-1/2}\phi(\zeta) \qquad (16)$$

によって ϕ に対する方程式

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\phi + \left(1 + \frac{5}{36}\frac{1}{\zeta^2}\right)\phi = \pm\frac{1}{\zeta}\phi^3 \qquad (17)$$

に書き直し

$$\phi = C_0 e^{iQ} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{inQ} \qquad (18)$$

の形の解を、$dQ/d\zeta$, b_n が ζ の逆べキ(定数から始まる)に展開できるとして、逐次近似によって見いだした。

すなわち

$$Q = P \pm \frac{3}{4} i C_0^2, \quad P = \zeta \mp \frac{3}{2} C_0^2 \log\zeta + \left(-\frac{5}{72} + \frac{15}{16} C_0^4\right)\frac{1}{\zeta} + \alpha + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \qquad (19)$$

$$\phi = \left(C_0 \mp \frac{3}{4}\frac{C_0^3}{\zeta}\right) e^{iP} - \frac{C_0^3}{8\zeta} e^{3iP} + c.c. + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right). \qquad (20)$$

C_0 によらぬ項は Airy の関数の漸近展開と一致するが、位相が非線型効果によって $\mp 3/2\, C_0^2 \log\zeta$ と、大きくずれるのは特筆すべきところであろう。こゝで c.c. は複素共役をあらわす。

ii) 数値積分

数値積分は次のように行なわれた。

i) $\xi = 0$ における初期値 w_0 と w_0' を与え、$\xi \to \infty$ で $w \to +0$ となるように w_0' を調整。-0 となるものは対称性から単に w の符号を変えればよい。(図 1, 2)

ii) $\xi_0 \gg w^2$ の点で $w = \alpha A_i(\xi_0)$, $w' = \alpha A_i'(\xi_0)$ を与え ξ の小さい方に積分する。たゞし A_i は Airy の関数。

iii) 特に g については i) の w_0' が w_0 の多価関数となるが、これは $\xi = 0$ が、$w - \xi$ 面の振動域 $\xi < w^2$ にあるためで、このときは $w = \xi^{1/2}$ に沿って $w(\xi_0) = \xi_0^{1/2}$, $w'(\xi_0)$ を与える方が好都

合であり、そこではξ_0が大きいと$w'(\xi_0) \fallingdotseq -\xi_0/\sqrt{2}$ + 定数の関係が示される。(図3).

iv) $\xi < -2.25$に対しては式(17)を用いて積分した。

図4は$\xi \to \infty$での初期値g_0, g_0'を与えてgを数値積分した結果を示す. $\xi \to +\infty$での初期値g_0は下からそれぞれAi, $15Ai$,

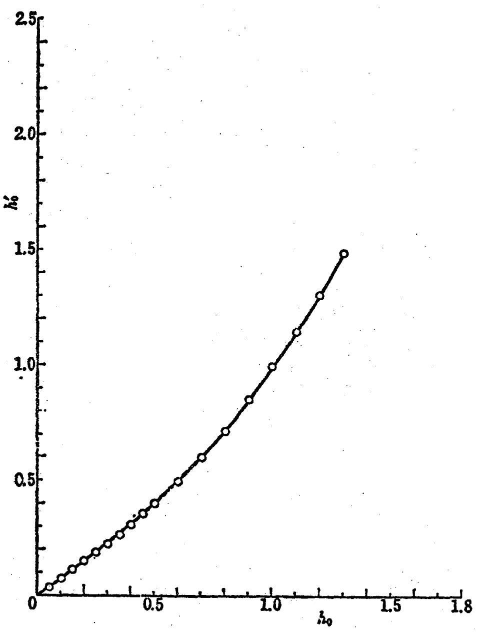

図 1

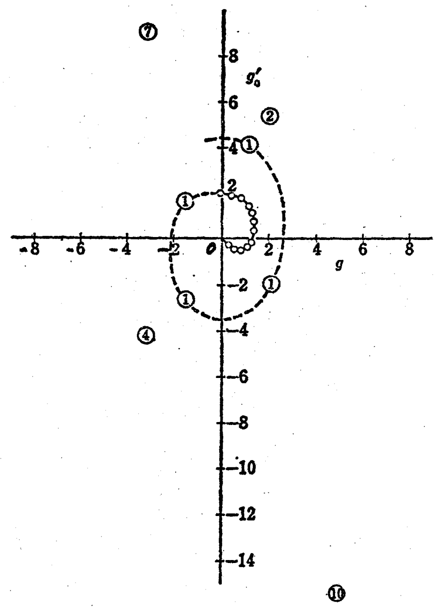

図 2

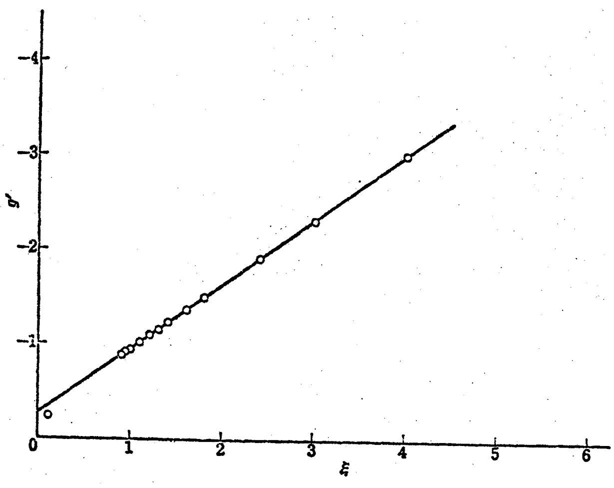

図 3

$10^4 Ai$にとつてある。非線形項がないと、wはAiry関数となり, $\xi = 0$が指数型と振動型の解をわけるturning pointであるが. 非線形項の影響でそれが移

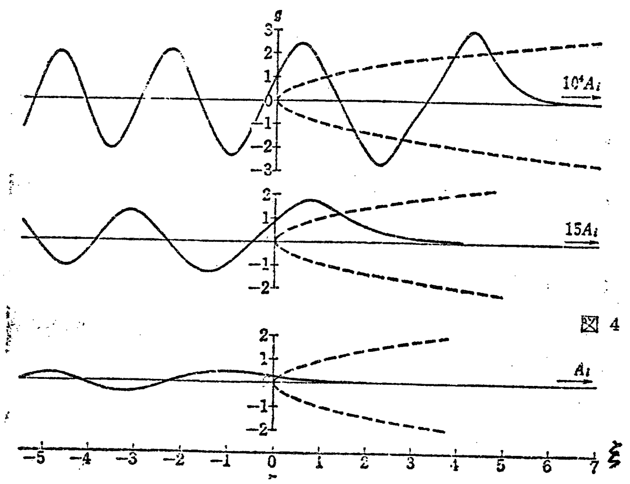

図 4

動し、ξ−g 面では放物線が二つの型を区別することになる。したがつて振幅が小さいときにはξの全領域にわたつてAiry関数に近かつたものが、振幅が大きくなるにつれて$\xi=0$ 付近を中心にAiry関数からずれて放物線の外側にくる部分が増大して複雑な形を示す。特に$\xi=0$ でのg_0が1.5より大きくなると傾きg_0'が正となり、$\xi<0$ の部分だけにあつた振動が振幅の増大につれて$\xi\to\infty$方向に伸びていく。これは図示したように$g''(=(\xi-g^2)g)$ の符号の変化が$g=0$ と $\xi=g^2$ 上で起きることに注意すれば容易に理解できる。振幅が大きくなると相対的に、関数gの放物線内に入る部分が少なくなり、正で小さなξの領域では放物線内の指数関数的な振舞があまり影響しなくなる。

図5はhに関して$\xi=0$での初期値h_0とh_0'を与えて数値積分したものである。これは$\xi\to\infty$ において、hが下からそれぞれ0.56Ai 1.4142135Ai, 1.4142138Ai, 1.6Aiに近ずくもので、初期値がある臨界値をこえると$h\to+\infty$に発散する。

これはh''の符号の変化をみればわかるように、gとは逆に放物線の内部が振動部分になっているためである。

以下で$\xi<0$において放物線の外側へ発散していくものについてhが十分大きいところでの漸近解を求めてみる。

まず$\xi\sim c_0$でhが非常に大きくなるとすればh^3に比べてξhを無視できるので、hは$h''=h^3$の近似解として、

$$h=\frac{\pm\sqrt{2}}{\xi-c_0} \tag{21}$$

の形に求められる。これを主項として残りの項を$\varepsilon=\xi-c_0$のべキ級数に展開し、(14)に代入して係数を定めれば

$$h=\pm\frac{\sqrt{2}}{\xi-c_0}\left[1-\frac{c_0}{6}\varepsilon^2-\frac{1}{4}\varepsilon^3+a\varepsilon^4+\frac{1}{72}c_0\varepsilon^5+O(\varepsilon^6)\right] \tag{22}$$

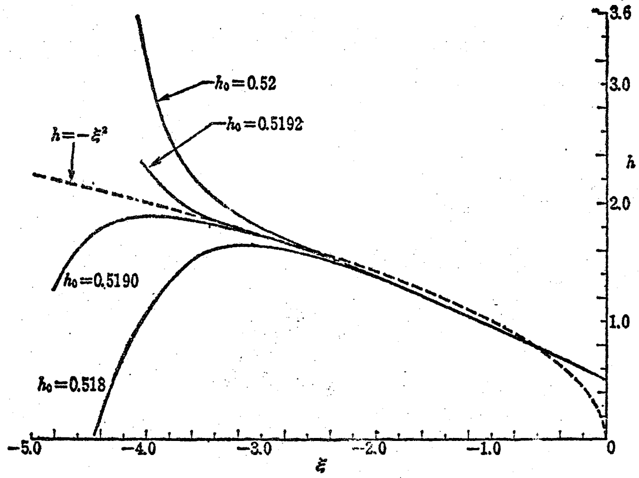

図 5

の形に求められる。ただし、ε^4の係数aは不定である。したがって$\xi=0$でhが双曲線的に発散することを示す。$\xi\to\infty$で$h\to+0$になる条件を満たすものについては初期微分h_0'が負であり、$\xi<0$での分岐は放物線の外側にある限り$h''>0$なので発散することになる。したがって図4において放物線に漸近するものは放物線の内部($h''<0$)に入って内側から近づくものでなければならない。また放物線の中にあるものでも大振幅のものはかなりの範囲にわたって、Airyの関数とは、かなり異った挙動を示す。これを見る

ために(14)式で別の変数変換

$$h = (-\xi)^{1/2} w(\zeta), \qquad \zeta = \frac{2}{3}(-\xi)^{3/2} \tag{23}$$

をすると $-1 \leqq w \leqq 1$ が放物線の内部を与え(14)式から

$$\ddot{w} + w - w^3 = -\frac{1}{\zeta}\dot{w} + \frac{1}{9\zeta^2} w \tag{24}$$

を得る。ζ が十分に大きく、左辺に比べて右辺を小として無視できるときは積分

$$\frac{1}{2}\dot{w}^2 + U(w) = E \tag{25}$$

$$U(w) = \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{4}w^4 \tag{26}$$

が得られ、運動は U というポテンシャルの中での質点の一次元運動に帰着する。

これの解は一般に楕円関数

$$w = a\,\mathrm{sn}\left(\frac{a}{\sqrt{2}k}(\zeta + C), k\right) \tag{27}$$

$$k = \frac{a}{\sqrt{2-a^2}}, \qquad E = \frac{a^2}{4}(2 - a^2) \tag{28}$$

であらわされ、$a < 1$ ならば放物線の間を振動する。(もちろん長い振動の後は無視した項の影響で振幅が減少する。)
$a \to 1$ に近づくと $k \to 1$ で波長が非常に大きくなり w は

$$w = \tanh\left(\frac{\zeta + C}{\sqrt{2}}\right) \tag{29}$$

に近づく。特に $\zeta \to \infty$ では

$$w = 1 - 2e^{-\sqrt{2}(\zeta + C)} \sim 1 - C_0 e^{-\sqrt{2}\zeta} \tag{30}$$

の形をとり、元の変数にもどすと

$$h = (-\xi)^{1/2}\left\{1 - C_0 e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}(-\xi)^{3/2}}\right\} \tag{31}$$

で放物線に漸近する分枝の漸近形を与える。

図6は$\xi\to\infty$でのAiry関数Aiの振幅を単位として計ったg, hの振幅a_+と、同様にして計った$\xi\to-\infty$での振幅a_-との関係を示すもので、振幅が小さくAiry関数に近いときは、$a_+\approx a_-$であるけれども振幅が大きく、非線型項の影響が大きくなるにつれてa_-はa_+からずれてくる。(15)式をみればわかるように、gとhとでは非線形項の符号が逆で、$\xi<0$の領域においてAiry関数$w''=\xi w$に比べて$|w''|$をgでは大きく、hでは小さくしている。だから同じa_+の値に対しgは振幅が減りhは増加している。ただ、hの方は臨界値を持つためにa_+が$\sqrt{2}$に近ずくにつれ無限大に発散する。図7は振幅a_+と位相の定数部分αの関係を示すもので、図6と同様に振幅が増

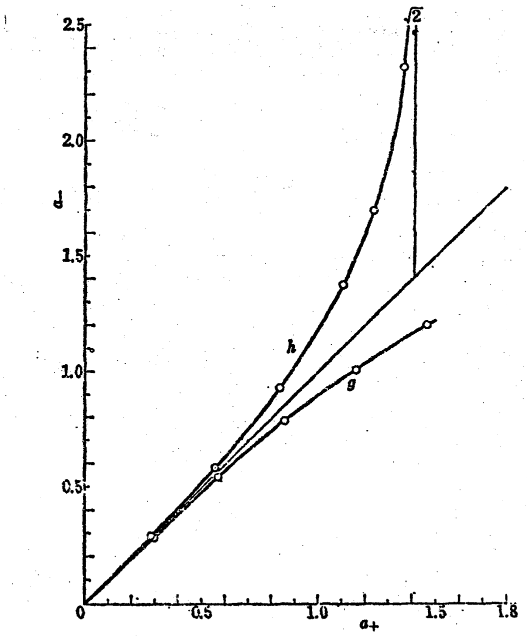

図6

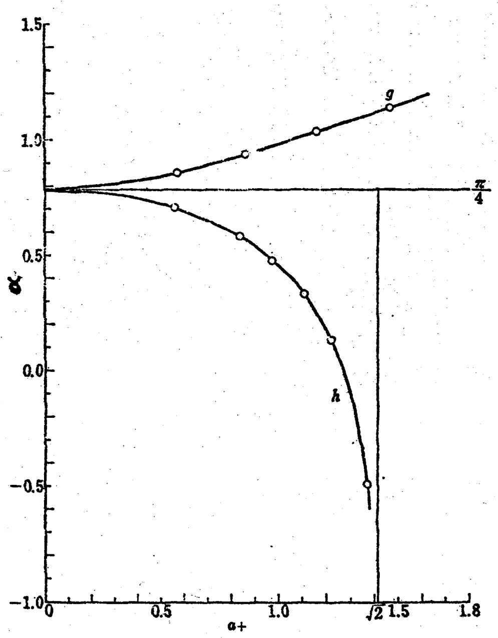

図7

すにつれてAiry関数での値($\alpha=\pi/4$)からg, hそれぞれに反対方向にずれ，hは$a_+ = \sqrt{2}$で発散していく。

hに対応するfには(14)式のように二つの分枝

$$f_1 = -h^2 - \sqrt{2}\,h' \quad , f_2 = -h^2 + \sqrt{2}\,h' \qquad (32),(33)$$

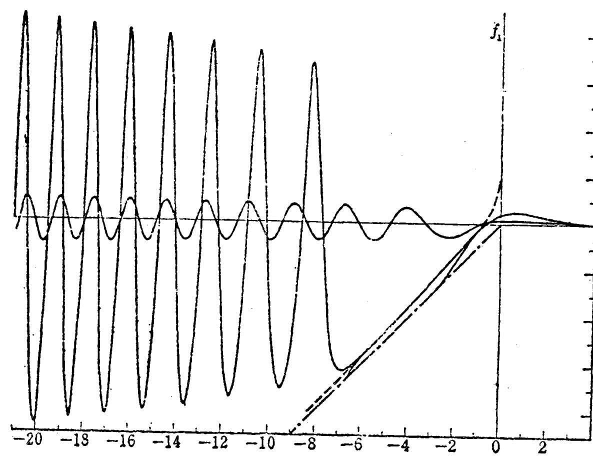

図 8

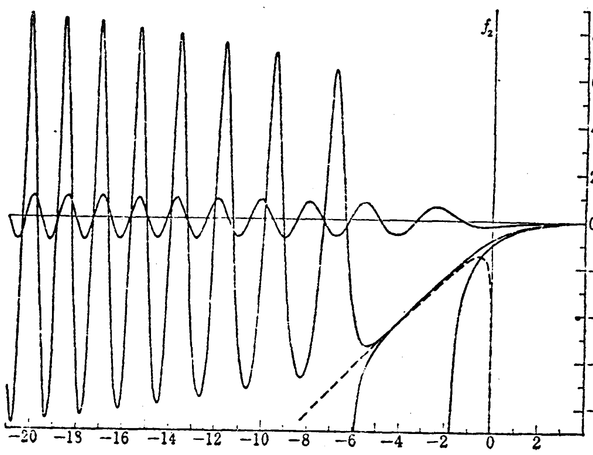

図 9

がある。Berezin, Karpmanは$\xi \fallingdotseq +\infty$から数値積分を行ない。この場合に換算して$\xi \to +\infty$での$f$が$0.78 A_i$と$0.88 A_i$となる間に臨界値があるといっているけれど、ここでの数値計算では$\sqrt{2} A_i$となっている。臨界値に近づくときのhの漸近線は$h = \sqrt{-\xi}$であるから、これの1回微分、$h' = -1/2\,(-\xi)^{-1/2}$を(14)式に代入するとfの漸近線が得られる。

$$f = \xi \mp \frac{1}{\sqrt{-2\xi}} \qquad (34)$$

これはf_1, f_2を示した図8.9に点線で示されている。

f の $h \to \infty$ に相当する近似解は(22)を(14)に代入して求めることが出来る。

$$f_1 \sim c_0 + 2(\xi - c_0),$$

$$f_2 \sim -\frac{4}{(\xi - c_0)^2}.$$

参考文献

(1) D. J. Korteweg and G. de Vries : Phil. Mag. 5 39 (1895) 422.

(2) D. J. Benney : J. Math. & Phys. 45 (1966) 52.

(3) R. R. Long : Tellus 8 (1956) 460.

(4) T. B. Benjamin : J. Fluid Mech. 26 (1966) 241.

(5) T. B. Benjamin : J. Fluid Mech. 28 (1967) 66.

(6) S. Leibovich : Phys. of Fluids 12 (1969) 1124.

(7) I. V. Wijngaardn : J. Fluid Mech. 33 (1968) 465.

(8) G. S. Gardner & G. K. Morikawa : Courant Institute of Math, Science Rep. NYO 9082 (1960)

(9) R. W. Morton : Phys. of Fluids 7 (1964) 1800.

(10) H. Washimi & T. Taniuti : Phys. Rev. Letters 17 (1966) 996.

(11) C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal & R. M. Miura : Phys. Rev. Letter 6 (1967) 6.

(12) Yu. A. Berezin & V. I. Karpman : Soviet Physics JETP 19 (1964) 1265.

(13) T. Kakutani & H. Ono : J. phys. Soc. Japan 26 (1969) 1305.

(14) R. M. Miura : J. math. Phys. 9 (1968) 1202.

(15) P. Painlevé : Bull Soc. Math. France 28 (1900) 201.

(16) I. Imai : Phys. Rev. 74 (1948) 113.

(17) 寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論 応用編 p.216

(18) 橋本英典，篠原勝：東京大学宇宙航空研究所報告 9.2C (1973)