数理解析研究所講究録
185巻 1973年 47-57

分散波動の非線形相互作用

京大 工　　及川正行，薩摩順吉，矢島信男

§1. Introduction

非線形分散系に於て，いくつかの波が相互作用している場合を考える。相互作用項を逐次的に処理すると，相互作用は個々の波の自己相互作用（self-interaction）の部分と，それらの間の相互作用（mutual interaction）の部分とから成っていることが判る。自己相互作用は他の波の存在によっては左右されない，いわば系自体が非線形性を含むことに由来するものであって，波動伝播の性質の中にくりこまれるべき性格のものである。一方，mutual interaction こそが，波動が複数個存在することによって生じる波動伝播の性質の変化をあらわすものである。したがって，相互作用を摂動によって処理すべき場合，self-interaction と mutual interaction との分離が不可避的に必要となってくる。実際，self-interactionは，1つの波動の内部相互作用とでも言うべきもので

，これを通常の摂動論の処法に頼るときには secular term を生ずる。したがって，secular term を消去するという手続きによって，相互作用から mutual interaction をとりだし，self-interaction の影響をくりこむことが可能となる。これらの非線形波動が分散あるいは散逸を伴う音波であるときには，すでに Oikawa-Yajima (J. Phys. Soc. Japan (73-April)). によってその処法が示され，くりこまれた波動は generalized KdV or Burgers Eq. によって記述されることが判っている。§2. に於て，この非線形波動が強い分散を伴う平面波である場合にも，この Oikawa-Yajima の処法が拡張される (Oikawa-Yajima)。自己相互作用をくりこんだ波動は非線形 Schrödinger Eq. で与えられる。§3. では，以上と全く異る現象であるが，強い分散性の短波長波動の乱れた場と長波長音波との間の相互作用を考える。この場合，短波長の乱れた場は，あたかも準粒子の如く振舞うことが示される。(Sakai-Satsuma-Yajima)

§2. 平面波の相互作用

こゝでは，非常に簡単な例について考えておこう。すなわち，非線形 Klein-Gordon (Schiff 型方程式)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \kappa^2\phi - g\phi^3 = 0$$

から出発する。平面波の波数をk，振動数をωとし，今(k_1,ω_1)，(k_2,ω_2) の二つの波の相互作用を考える。非摂動系の解として，

$$\phi_1 = \epsilon\{a_1 e^{i(k_1x-\omega_1t)} + a_2 e^{i(k_2x-\omega_2t)} + c.c.\}$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 + \kappa^2}$$

を採用しよう。単純な摂動論を適用すると，次の order で

$$\phi = \phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \epsilon^3\phi_3 + \cdots ,$$

$$\phi_2 = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \kappa^2\right)\phi_3 = {} & g(3|a_1|^2a_1 + 6|a_2|^2a_1)e^{i(k_1x-\omega_1t)} \\
& + g(3|a_2|^2a_2 + 6|a_1|^2a_2)e^{i(k_2x-\omega_2t)} \\
& + ga_1^3e^{3i(k_1x-\omega_1t)} + ga_2^3e^{3i(k_2x-\omega_2t)} \\
& + 3ga_1^2a_2e^{i\{(2k_1+k_2)x-(2\omega_1+\omega_2)t\}} \\
& + 3ga_1^2a_2^*e^{i\{(2k_1-k_2)x-(2\omega_1-\omega_2)t\}} \\
& + 3ga_1a_2^2e^{i\{(k_1+2k_2)x-(\omega_1+2\omega_2)t\}} \\
& + 3ga_1^*a_2^2e^{i\{(-k_1+2k_2)x-(-\omega_1+2\omega_2)t\}} \\
& + \text{complex conjugate}
\end{aligned}$$

を得る。ϕ_3を決める場合，右辺の第１行と第２行はいわゆる secular term となる。この secular な部分は，いわば self-interaction と mutual interaction による frequency shift から成っているので，この部分を最初からくりこんでおけば，non-secular な摂動論をつくりあげることが可能となる。

分散が利いているので，self-interactionによるfrequency shiftは分散とバランスして，いわゆるself-modulated plane waveを構成する可能性がある。そこで，次のようにcoordinate stretchingを導入しておく。

$$\xi_1 = \epsilon\left(x - \lambda_1 t - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_1^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \tau)\right)$$

$$\xi_2 = \epsilon\left(x - \lambda_2 t - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_2^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \tau)\right)$$

$$\tau = \epsilon^2 t$$

ここで，λ_1, λ_1はself-modulated plane waveのspeedであるから，$\lambda_1 = [d\omega/dk]_{k=k_1}$，$\lambda_2 = [d\omega/dk]_{k=k_2}$であることが予想される。

$$\phi = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \epsilon^{\alpha} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \phi_{l,m}^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \tau)\, e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^n \Omega_{l,m}^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\tau)}\, e^{i[(lk_1+mk_2)x-(l\omega_1+m\omega_2)t]}$$

こゝで，ϕのrealityのために

$$\phi_{-l,-m}^{(n)} = \phi_{l,m}^{(n)*}, \quad \Omega_{-l,-m}^{(n)} = -\Omega_{l,m}^{(n)} \quad (\Omega : \text{real と仮定})$$

を要請しておく。これらを元の方程式に代入すると，1st orderで，

$$\{(l\omega_1 + m\omega_2)^2 - (lk_1 + mk_2)^2 - \kappa^2\}\phi_{l,m}^{(1)} = 0$$

$$\phi_{\pm 1,0}^{(1)} \neq 0, \quad \phi_{0,\pm 1}^{(1)} \neq 0$$

$$\phi_{l,m}^{(1)} = 0 \qquad \text{for } |l| + |m| \neq 1$$

を得る。更に，次のorderでは

$$\phi_{l,m}^{(2)} = 0 \qquad (|l| + |m| \neq 1)$$

$$\partial\phi_{1,0}^{(1)}/\partial\xi_2 = 0, \quad \partial\phi_{0,1}^{(1)}/\partial\xi_1 = 0$$

これから，$\phi_{10}^{(1)}, \phi_{01}^{(1)}$ はそれぞれ ξ_1, τ ; ξ_2, τ のみの関数であることが判る。third order の方程式から，$\phi_{10}^{(1)}, \phi_{01}^{(1)}$ の従うべき方程式

$$i\frac{\partial\phi_{10}^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_1}{dk_1^2}\frac{\partial^2\phi_{10}^{(1)}}{\partial\xi_1^2}+\frac{3g}{2\omega_1}|\phi_{10}^{(1)}|^2\phi_{10}^{(1)}=0,\quad i\frac{\partial\phi_{01}^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_2}{dk_2^2}\frac{\partial^2\phi_{01}^{(1)}}{\partial\xi_2^2}+\frac{3g}{2\omega_2}|\phi_{01}^{(1)}|^2\phi_{01}^{(1)}=0$$

$$\Omega_{10}^{(1)}=\frac{3g}{\omega_1(\lambda_1-\lambda_2)}\int^{\xi_2}|\phi_{01}^{(1)}|^2d\xi+\tilde{\Omega}_{10}^{(1)}(\xi_1,\tau)\ ,\quad \frac{\partial\psi_1^{(0)}}{\partial\xi_2}=0,\quad \frac{\partial\phi_{10}^{(2)}}{\partial\xi_2}=0$$

$$\Omega_{01}^{(1)}=\frac{3g}{\omega_2(\lambda_2-\lambda_1)}\int^{\xi_1}|\phi_{10}^{(1)}|^2d\xi+\tilde{\Omega}_{01}^{(1)}(\xi_2,\tau),\quad \frac{\partial\psi_2^{(0)}}{\partial\xi_1}=0,\quad \frac{\partial\phi_{01}^{(2)}}{\partial\xi_1}=0$$

を得る。又，

$$\phi_{30}^{(3)}=-\frac{g}{8\kappa^2}\phi_{10}^{(1)3},\qquad \Omega_{30}^{(1)}=3\Omega_{10}^{(1)}$$

$$\phi_{2,1}^{(3)}=\frac{3g}{4(k_1k_2-\omega_1\omega_2-\kappa^2)}\phi_{10}^{(1)2}\phi_{01}^{(1)}\qquad \Omega_{21}^{(1)}=2\Omega_{10}^{(1)}+\Omega_{01}^{(1)}$$

$$\phi_{2,-1}^{(3)}=\frac{3g}{4(\omega_1\omega_2-k_1k_2-\kappa^2)}\phi_{10}^{(1)2}\phi_{01}^{(1)*}\qquad \Omega_{2-1}^{(1)}=2\Omega_{10}^{(1)}-\Omega_{01}^{(1)}$$

$$\cdots\cdots$$

などを得る。次の order で，$\phi_{10}^{(2)}, \psi_1^{(0)}, \tilde{\Omega}_{10}^{(1)}, \Omega_{1,0}^{(2)}$ などを決める方程式の他に

$$\psi_1^{(1)}=\frac{3g(1-\lambda_1\lambda_2)}{\omega_1^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\int^{\xi_2}|\phi_{01}^{(1)}|^2d\xi+\tilde{\psi}_1^{(1)}(\xi_1,\tau)$$

$$\psi_2^{(1)}=\frac{3g(1-\lambda_1\lambda_2)}{\omega_2^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}\int^{\xi_1}|\phi_{10}^{(1)}|^2d\xi+\tilde{\psi}_2^{(1)}(\xi_2,\tau)$$

$$\phi_{10}^{(3)}=-\frac{3g\kappa^2}{2\omega_1^2\omega_2^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\phi_{10}^{(1)}|\phi_{01}^{(1)}|^2+\tilde{\phi}_{10}^{(3)}(\xi_1,\tau)$$

$$\phi_{01}^{(3)}=\frac{-3g\kappa^2}{2\omega_1^2\omega_2^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\phi_{01}^{(1)}|\phi_{10}^{(1)}|^2+\widetilde{\phi_{01}^{(3)}}(\xi_2,\tau)$$

などを得る。

$\phi_{10}^{(1)}$(or $\phi_{01}^{(1)}$)の従う方程式はいわゆるnonlinear Schrödinger方程式であって，self-modulated wave を記述するものであることが知られている。従って，nonlinear interaction のうち，self-interaction の部分はwave modulation という形でくりこまれたことが判る。また，2つの波の間の mutual interaction でsecular termを与える部分はfrequency shift の形で$\Omega_{lm}^{(1)}$の中にとり入れられている。さらに，$\psi_1^{(1)}$(or $\psi_2^{(1)}$)の第1項，$\phi_{10}^{(3)}$(or $\phi_{01}^{(3)}$)の第1項は，それぞれmutual interaction による波束の軌道のずれ，および，振巾の変化を与えている。上式に現われる(ξ_1,τ) or (ξ_2,τ)の任意関数はself-interactionによる高次の補正を与えるものである。もし，$\phi_{10}^{(1)}$，$\phi_{01}^{(1)}$が次のようにsolitary wave であらわされると

$$\phi_{10}^{(1)}=a_1e^{i\frac{3g}{4\omega_1}a_1^2\tau}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_1}{\kappa}a_1(\xi_1-\xi_{10})\right),$$

$$\phi_{01}^{(1)}=a_2e^{i\frac{3g}{4\omega_2}a_2^2\tau}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_2}{\kappa}a_2(\xi_2-\xi_{20})\right),$$

$\Omega_{10}^{(1)}$，$\Omega_{01}^{(1)}$は

$$\Omega_{10}^{(1)}=\frac{\sqrt{6g}\,\kappa a_2}{\omega_1\omega_2(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{1+\tanh\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_2}{\kappa}a_2(\xi_2-\xi_{20})\right)\right\}$$

$$\Omega_{01}^{(1)}=\frac{\sqrt{6g}\,\kappa a_1}{\omega_1\omega_2(\lambda_2-\lambda_1)}\left\{1+\tanh\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_1}{\kappa}a_1(\xi_1-\xi_{10})\right)\right\}$$

で与えられ，$\psi_1^{(1)}$ (or $\psi_2^{(1)}$) の第1項は

$$\psi_{1mi}^{(1)}=\frac{\sqrt{6g}\,\kappa(1-\lambda_1\lambda_2)}{\omega_1^2\omega_2(\lambda_1-\lambda_2)^2}a_2\left\{1+\tanh\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_2}{\kappa}a_2(\xi_2-\xi_{20})\right)\right\}$$

$$\psi_{2mi}^{(1)}=\frac{\sqrt{6g}\,\kappa(1-\lambda_1\lambda_2)}{\omega_1\omega_2^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}a_1\left\{1+\tanh\left(\sqrt{\frac{3g}{2}}\frac{\omega_1}{\kappa}a_1(\xi_1-\xi_{10})\right)\right\}$$

で与えられる。

§3. high frequency wave field 内での有限振幅 acoustic wave の伝播

ここでは強い分散をもつ波と音波との間の相互作用を考えよう。今，高い振動数のモード（その分散関係式は $\omega=\omega(\mathbf{k})$ で与えられるとする）に属する二つの波と音波との間に共鳴条件，

$$\omega_1(\mathbf{k}_1)=\omega_2(\mathbf{k}_2)+\Omega$$
$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_2+\mathbf{q}$$

が存在するとしよう。但し，Ω は音波の振動数，$\mathbf{q}$ は音波の波数であって，C_s を音速とすれば，

$$\Omega=|\mathbf{q}|C_s$$

が成立する。このような共鳴条件が存在すると，高い振動数の分散波（$\mathbf{k}_1$，ω_1）は非線形相互作用によって（$\mathbf{k}_2$，ω_2）の波と（$\mathbf{q}$，Ω）の音波とに崩壊することができる。これはいわゆる decay instability と呼ばれている。したがって高い

振動数の波動場の中を音波が伝播する場合には波動場のスペクトルによって音波の減衰または成長が生じることになる。ここで問題にするのは有限振幅の音波がどのようにふるまうかである。上の共鳴条件は$|q|$が小さければ，

$$|q| C_s - \frac{d\omega}{dk} \cdot q = 0$$

と書ける。したがって音波の減衰あるいは成長に関与する高い振動数のモードはその群速度が音速より大きな成分のものである。このような過程が問題となる例として；plasmonガス中でのイオン音波の伝播の場合がある。その場合，

$$\omega^2 = k^2 \frac{T_e}{m_e} + \omega_p^2$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \quad , \quad C_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$$

が成り立つ。但しm_eは電子質量，m_iはイオン質量，T_eは電子温度，eは電荷，n_0は平均密度である。この時には群速度は音速より大きいことが期待される。この他固体中のoptical phononとlong wave acoustical phononの問題などでもこのような事情はみたされている。

plasmaの場合を例にとって，方程式系は，

$$\frac{\partial}{\partial t} n_i + \nabla (n_i u_i) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + (u_i \cdot \nabla) u_i = \frac{e}{m_i} E$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \nabla (n_e u_e) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_e + (u_e \cdot \nabla) u_e = -\frac{e}{m_e} E - \frac{T_e}{m_e} \nabla n_e$$

$$\nabla \mathbb{E} - 4\pi e(n_i - n_e) = 0$$

ここでn_i，n_eはそれぞれイオンと電子のnumber density，u_i，u_eはイオンと電子の速度，$\mathbb{E}$は電場ベクトルである。今物理量を，

$$Q = Q_0(\xi,\tau) + \frac{1}{2}\sum_n \{ Q_n(\xi,\tau) e^{i\theta_n} + c.c. \}$$

$$\nabla \theta_n = \mathbb{k}_n(\xi,\tau)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} = -\omega_n(\xi,\tau)$$

$$\xi = \epsilon x, \quad \tau = \epsilon t$$

としこれを上の方程式に代入して速い変数について平均する。但し今(ξ,τ)が長波長のイオン音波を記述するものとし，θ_nが高い振動数のplasmonを記述するものと考えている。このようにすると，

$$\frac{\partial}{\partial \tau} n_{i0} + \nabla_\xi (n_{i0} u_{i0}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n_{i0} u_{i0}) + \nabla_\xi (n_{i0} u_{i0} u_{i0}) - \frac{e}{m_i} n_{i0} \mathbb{E}_0 = 0$$

$$T_e \nabla_\xi n_{e0} + e n_{e0} \mathbb{E}_0 + \nabla_\xi \left(\frac{1}{2} \sum_n U_n \right) = 0$$

$$\epsilon^2 \nabla_\xi \mathbb{E}_0 - 4\pi e (n_{i0} - n_{e0}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n_{e0} U_n) + \frac{T_e}{m_e} \nabla_\xi \left(\frac{\mathbb{k}_n}{\omega_n} n_{e0} U_n \right) = \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{2 m_e \omega_n^2} U_n \frac{\partial n_{e0}}{\partial \tau} - \frac{e n_0 U_n}{m_e \omega_n} (\mathbb{k}_n \cdot \mathbb{E}_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{k}_n + \frac{T_e}{m_e} \frac{\mathbb{k}_n}{\omega_n} \nabla_\xi \mathbb{k}_n = -\frac{4\pi e^2}{2 m_e \omega_n} \nabla_\xi n_{e0}$$

なる方程式を得る。ここでU_nはnモードへのもつエネルギーに比例していて，

$$U_n = \frac{1}{n_{e0}} \frac{k_n^2}{\omega_n^2} |n_{en}|^2 \propto \frac{1}{8\pi} \omega_n \frac{d\varepsilon}{d\omega} |E_n|^2$$

である。これはいわば系の内部エネルギーに相当している。これを線形化するとイオン音波の分散式として，

$$\Omega = \pm C_s |q| + i\gamma$$

$$\gamma = \frac{\pi C_s |q| \omega_p^2}{8 n_0 T_e} \sum_n \left(\frac{2\Omega \omega_{n0}}{\omega_p^2} N_n + q \cdot \frac{dN_n}{dk_{n0}} \right) \delta\left(\Omega - \frac{d\omega_{n0}}{dk_{n0}} \cdot q \right)$$

$$N_n = U_{n0} / \omega_{n0}$$

を得る。この γ は decay instability による成長率を与えている。

さらに大振幅一次元波動をしらべてみよう。この場合，plasmon ガスを無視するとイオン音波は KdV 方程式で記述されるが，plasmon ガスの存在によって，

$$\xi - C_s \tau \equiv \eta, \quad \epsilon^2 \tau \equiv \sigma$$

$$n_{i0} = n_0 + \epsilon^2 \tilde{n}^{(1)} + \cdots$$

とした時，

$$\frac{1}{C_s} \frac{\partial \tilde{n}^{(1)}}{\partial \sigma} + \frac{\tilde{n}^{(1)}}{n_0} \frac{\partial \tilde{n}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{T_e}{2 m_e \omega_p^2} \frac{\partial^3 \tilde{n}^{(1)}}{\partial \eta^3} + K \frac{\partial \tilde{n}^{(1)}}{\partial \eta} - L \int \frac{P}{\eta - \eta'} \frac{\partial \tilde{n}^{(1)}}{\partial \eta'}(\eta', \sigma) d\eta' = 0$$

$$K = \frac{1}{8 n_0 T_e} \sum_n \left\{ \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_{n0}^2} - 2 \right) \omega_{n0} N_n + \left(2 \frac{d\omega_{n0}}{dk_{n0}} \omega_{n0} N_n + \omega_p^2 \frac{d}{dk_{n0}} N_n \right) \frac{P}{\frac{d\omega_{n0}}{dk_{n0}} - C_s} \right]$$

$$L = \frac{1}{8 n_0 T_e} \sum_n \left(2 C_s \omega_{n0} N_n + \omega_p^2 \frac{d}{dk_{n0}} N_n \right) \delta\left(\frac{d\omega_{n0}}{dk_{n0}} - C_s \right)$$

の如く，散逸項があらわれる。これは L の符号によって減衰か成長の作用をする。この方程式は既にイオン音波の電子による Landau damping の考察において Ott - Sudan によって考慮されたものと同じである。これから plasmon ガスはあたか

もその速度が群速度で与えられるような準粒子とみなされ得ることを示している。