数理解析研究所講究録
186巻 1973年 27-32

非柱状領域における $\Box u+u^3=f$ の解について

東大 理　井上 淳

§1 序

$\Omega(t)$ を $\mathbb{R}^3$ の中の領域（t と共に変わる）とし そこで次の問題を考えてみよう

$$(*)\quad \begin{cases} \Box u+u^3=f & (x,t)\in \Omega_T=\bigcup_{0\le t\le T}\Omega(t) \\ u(x,0)=u_0(x) & \\ u_t(x,0)=u_1(x) & \\ u(x,t)=0 & (x,t)\in \partial\Omega_T=\bigcup_{0<t<T}\partial\Omega(t) \end{cases}$$

ここで、$\partial\Omega(t)$ は $\Omega(t)$ の境界、$\Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$

これは いわゆる 'moving boundary' の問題であるが、もう少し詳しく '問題' を書き上げてみよう。

(I) $\Omega(t)$ が時間 t と共に どのように変わるとき、初期 data $[u_0, u_1]$ 及び外力 f がいかなるものであるとき '解' は存在するのか？

(II) いかなる函数空間で 'well posed' になるのか？

(III) $\Omega(t)$ が $t\to\pm\infty$ と共に ある極限 $\Omega^\pm$ に '近づく'

と　その'定常状態 $\Omega^{\pm}$ における解 $u^{\pm}(t)$' と 非定常状態における解 $u(t)$ とにどのような関係が生じうるか？
(或いは そういう'関係'が生じうる $\{\Omega(t)\}$, $\Omega^{\pm}$ を特徴付けできるか？)

ここでは (I)(II) についての一つの肯定的解答を与えよう。(III) については別の機会にゆずろう（但し 非線型項 u^3 がない場合）

以下 $\Omega(t)$ の変化について 次の仮定をしよう。

(H) (i) $\Omega(t)$ の境界 $\partial\Omega(t)$ は滑らか，かつ $\Omega(t)$ は互いに微分同型

(ii) $\partial_L\Omega_T$ は滑らかな多様体で，その変化は 光速1を越えないとする。

我々の結果は以下の如し：

<u>定理A</u>；(*) の解で $\mathcal{E}^2(\Omega_T)$ なるものは一意

<u>定理B</u>．data $[u_0(x), u_1(x), f(x,t)] \in \mathcal{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathcal{E}^\infty(\Omega(0)) \times \mathcal{E}^\infty(\Omega_T)$ が'無限に両立'しているならば $\mathcal{E}^\infty(\Omega_T)$ に属する解が存在する。

<u>系</u>．$\Omega(t) = \Omega$ としよう．$[u_0, u_1, f(t)] \in H^{l+2}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega) \times H^{l+1}(\Omega \times (0,T))$ が l 次の両立条件をみたすならば，

$\exists\, u(t) \in \bigcap_{k=0}^{l+2} \mathcal{E}_t^k(H^{l+2-k}(\Omega))$ なる (*) の解

(但し $\partial\Omega$ がコンパクトでないときには，F. E. Browder

の意味で 無限遠方で妙ではないと仮定する. i.e uniformly regular of class C^∞ とする)

<u>定理C</u>. (*) は $\mathcal{E}^\infty$ で well-posed である. i.e

$u(x,t)$ と $v(x,t)$ を data $[u_0, u_1, f]$, $[v_0, v_1, g]$ に対応する解とする. Ω_T の中の任意のコンパクト集合 K, 任意の整数 m, 任意の定数 C, $\varepsilon > 0$ に対し, コンパクト集合 $\tilde{K}$, 整数 N, 及び定数 $\delta > 0$ が存在して data が次の条件をみたすならば $|u(x,t) - v(x,t)|_{\mathcal{E}^m(K)} \leq \varepsilon$ となる.

data の満たすべき条件は ($\tilde{K}_0 = \tilde{K} \cap \{t=0\}$)

$$\begin{cases} |u_0(x)|_{\mathcal{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} + |u_1(x)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |f(x,t)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K})} + |v_0(x)|_{\mathcal{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} \\ \qquad + |v_1(x)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |g(x,t)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K})} \leq C \\ \\ |u_0(x) - v_0(x)|_{\mathcal{E}^{N+2}(\tilde{K}_0)} + |u_1(x) - v_1(x)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K}_0)} + |f(x,t) - g(x,t)|_{\mathcal{E}^{N+1}(\tilde{K})} \leq \delta \end{cases}$$

<u>注</u> (1) 用いられた函数空間は 極く通常に用いられているものである.

(2) <u>両立条件</u>とは; もし $u(x,t) \in \mathcal{E}^m(\Omega_T)$, $u(x,t) = 0$ $(x,t) \in \partial_L \Omega_T$ とすると $X(x,t)^l u(x,t) = 0$, $(x,t) \in \partial_L \Omega_T$, $l \leq m$ 但し $X(x,t)$ は $\partial_L \Omega_T$ に接するベクトル場. 故に もし $u(x,t)$ が (*) の解で $\mathcal{E}^m(\Omega_T)$ に属するならば, $X(x,0)^l u(x,0) = 0$ $x \in \partial \Omega(0)$, $l \leq m$ とならなければならな

い．この関係を(*)を用いて表現したものが，m次の両立条件である．

§2. 証明概略

まず，$\partial_2\Omega_T$上の任意の点(x,t)に対し近傍$V_{(x,t)}$及び変数変換Φがあって，$V_{(x,t)}$の中の問題(*)は，Φによって以下の問題に変換される．

$$(**)\begin{cases} \tilde{u}_{ss}(y,s)+a_1(y,s,D)\tilde{u}_s(y,s)+a_2(y,s,D)\tilde{u}(y,s)+\tilde{u}(y,s)^3=\tilde{f}(y,s) \\ \tilde{u}(y,0)=\tilde{u}_0(y),\quad \tilde{u}_s(y,0)=\tilde{u}_1(y), \\ \tilde{u}(y,s)=0 \qquad\qquad \text{for } (y,s)\in\Phi(\partial_2\Omega_T\cap V_{(x,t)}) \end{cases}$$

ここで，$\partial_2\Omega_T$が光速より速く変化しないことより，$a_2(y,s;D)$が$\Phi(V_{(x,t)}\cap\Omega_T)$の中でelliptiqueにとれることに注意しよう．問題(**)に対し，J. Sather, K. Jörgens, F. E. Browder等の方法を組合わせて次の定理をうる．

<u>定理2.1</u>　(**)を$\mathbb{R}^3$の中の有界領域ω，$\tilde{u}(y,s)=0$ $y\in\partial\omega$で考える．lを任意の整数≥ 0とし，初期data及び外力$f(\cdot)$

$$[\tilde{u}_0,\tilde{u}_1,\tilde{f}(\cdot)]\in(\overset{\circ}{H}{}^1(\omega)\cap H^{l+2}(\omega))\times(\overset{\circ}{H}{}^1(\omega)\cap H^{l+1}(\omega))\times\bigcap_{k=0}^{l+1}\mathcal{E}_s^k(H^{l+1-k}(\omega))$$

がl次の両立条件をみたすとする．このとき(**)の一意解

$$\tilde{u}(\cdot)\in\bigcap_{k=0}^{l+2}\mathcal{E}_s^k(H^{l+2-k}(\omega))$$

が存在し，かつ有限伝播速度は非線型項$\tilde{u}^3$がない場合と同じである．

定理Aの証明　$u(x,t)$, $v(x,t)$ を (*) の二つの解とする。
$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$ とおくと $w(x,t)$ は

$$
\text{(i)}\quad
\begin{cases}
\Box w(x,t)+\alpha(x,t)w(x,t)=0 \\
w(x,0)=w_t(x,0)=0 \\
w(x,t)=0 \qquad \text{for } x\in\partial\Omega(t)
\end{cases}
$$

を満足する。但し $\alpha(x,t)=u(x,t)^2+u(x,t)v(x,t)+v^2(x,t)$

1°. $(x^0,t^0)\in\Omega_T$ が $\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T=\phi$ を満足するならば $w(x,t)=0$ in $\Lambda(x^0,t^0)$ なることは明らか。但し

$$\Lambda(x^0,t^0)=\{(x,t);\ |x-x^0|<t^0-t,\ t>0\}$$

2° $(x^0,t^0)\in\Omega_T$ は $\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T\neq\phi$ を満足するとする。

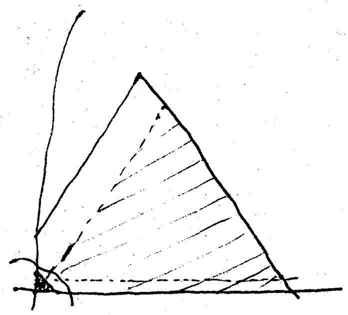
補題 2.2　任意の $(x^1,0)\in\Lambda(x^0,t^0)\cap(\partial\Omega(0)\times\{0\})$ に対し、(i) の解 $w(x,t)$ が消える近傍 $V(x^1,0)$ が存在する。

この補題及び $\overline{\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T}$ が compact なことより定理A は証明される。

定理Bの証明　まず次の補題に注意しよう。

補題 2.3　任意の点 $(x^1,t^1)\in\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T$ に対し近傍 $V(x^1,t^1)$ があって、そこでは次の問題の一意解が存在する

$$
\text{(ii)}\quad
\begin{cases}
\Box u(x,t)+u(x,t)^3=f(x,t) \qquad \text{in } V(x^1,t^1) \\
u(x,t^1)=u_0(x),\quad u_t(x,t^1)=u_1(x) \qquad \text{on } V(x^1,t^1)\cap(\Omega(t^1)\times\{t^1\}) \\
u(x,t)=0 \qquad \text{on } (x,t)\in\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T
\end{cases}
$$



(x^0,t^0) が $\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T=\phi$ のとき $\Lambda(x^0,t^0)$ の中には一意解がある。左図の如く 上の補題28を用いることより 初期面を少しあげて同じことを繰返せる。

ここで その過程が 縮んでいかない為には ある種の一様性が必要である。それは $\overline{\Lambda(x^0,t^0)\cap\partial_L\Omega_T}$ が compact のことに注意して Lebesgue の covering lemma を用いる。

<u>定理Cの証明</u> これには エネルギー不等式の定数が係数にどう依るかを調べればよい。