

成層回転流体中の球
のあそび運動

東大 生研 成瀬文雄・西島勝一

§1. あらまし

鉛直方向に x^* 軸をとり、この x^* 軸を中心として角速度 Ω で回転している非圧縮流体を考へる。いまこの流体の密度 ρ^* が x^* 方向にゆるやかに線型変化をしている、すなわち

$$\rho^* = \rho_0 (1 - \alpha x^*) \quad (1)$$

が成立するとする。いま半径 a の球が x^* 軸上をゆつくりと定常運動をするときの運動方程式を

Boussinesq 近似を用いて導き、体積力 (コリオリの力および浮力) の影響が比較的小さい場合をきりつなぎ法 (Matched Expansion 法) で解析し、球に働く力や球の回転数を決定する。

また任意物体への拡張についても議論する。

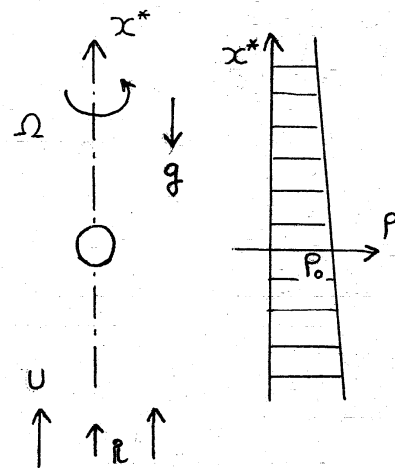


図 1.

§2. 基礎方程式

座標系として x^* 軸のまわりで Ω で回転している回転座標系をえらび、かつ原点を球の中心にとる。ここで \mathbf{v}^* を速度、 p^* を圧力、 \mathbf{r}^* を位置ベクトル、 μ を粘性率、 \mathbf{g} を重力の加速度、 \mathbf{i} を x^* 方向の単位ベクトルとすると、非圧縮流体の基礎方程式は

$$\rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* \right) = \rho^* \Omega^2 [\mathbf{r}^* - (\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}] - 2\rho^* \Omega \mathbf{i} \times \mathbf{v}^* - \nabla p^* + \mu \Delta \mathbf{v}^* - \rho^* \mathbf{g} \mathbf{i} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \rho^* = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (3)$$

のまうに存る。いま

$$aR \ll 1 \quad (4)$$

を仮定するとき、Boussinesq 近似を用いることができる。また上記の流れは時間的に密度が変化するため厳密には非定常流であるが、おそい流れでは密度の時間的変化はわかかであり、Boussinesq 近似の範囲内で定常流として取扱ってよい。

そこで

$$\Omega^2 a / 2g \ll 1 \quad (5)$$

を仮定し、かつ P' 、 p' を

$$P' = (P^* / \rho_0) - 1 + R x^* - R U t^* \quad (6)$$

$$p' = (1/\rho_0) \left[p^* - \rho_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \Omega^2 R^2 + \rho_0 g x^* (1 - R x^* + R U t^*) \right] \quad (7)$$

のように定義するとき、方程式 (2), (3) は Boussinesq 近似を用いて

$$\eta_b^* \cdot \nabla \eta_b^* = -2\Omega \mathbf{i} \times \eta_b^* - \nabla p' + \mu \Delta \eta_b^* - \rho' g \mathbf{i} \quad (8)$$

$$\eta_b^* \cdot \nabla p' + \rho (U - u^*) = 0, \quad \nabla \cdot \eta_b^* = 0 \quad (9)$$

のように変形される。ここで (6), (7) 式の ρ_0 , p_0 は物体がないときの $\eta^* = 0$, $t^* = 0$ の密度および圧力であり、

$R = [\mathbf{i}r^* - (\mathbf{i}r^* \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i}]$ である。また (9) 式の u^* は η_b^* の x^* 成分で、

U は無限遠前方における流速である。いま

$$\frac{\eta_b^*}{U} = \bar{\eta}, \quad \frac{\rho p'}{U \rho} = \bar{p}, \quad \frac{u^*}{U} = \bar{u}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \bar{p}, \quad \frac{\mathbf{i}r^*}{a} = \bar{\mathbf{i}}r \quad (10)$$

によって無次元変数を定義するとき、(8), (9) は

$$\Delta \bar{\eta} - \nabla \bar{p} = Re Ri \bar{p} \mathbf{i} + 2 Ta \mathbf{i} \times \bar{\eta} + Re \bar{\eta} \cdot \nabla \bar{\eta} \quad (11)$$

$$\bar{\eta} \cdot \nabla \bar{p} = \bar{u} - 1, \quad \nabla \cdot \bar{\eta} = 0 \quad (12)$$

のようになる。ここで

$$Re = \frac{aU}{\nu}, \quad Ri = \frac{a^2 \rho g}{U^2}, \quad Ta = \frac{\Omega a^2}{\nu} \quad (13)$$

である。境界条件は物体より遠くで「様流」であり、かつ物体

は回転座標系からみて角速度 ω で x 軸のまわりを回転して

いるとする。したがって

$$\bar{r} \rightarrow \infty : \quad \bar{\eta} \rightarrow \mathbf{i}, \quad \bar{p} = \bar{p} = 0 \quad (14)$$

$$\bar{r} = 1 : \quad \bar{\eta} = \omega \mathbf{i} \times \bar{\mathbf{i}}r \quad (15)$$

であり、 ω は方程式 (15) をとくことにより決定されるものである。以下において慣性力および体積力の影響が小さくなる場合、すなわち

$$Re \ll 1, \quad Re Ri \ll 1, \quad Ta \ll 1 \quad (16)$$

のときを承えて、これら小さいパラメータによる展開の解を求めようとする。

§3. きりつき法 (Matched Expansion 法) による解析

(i) Stokes 的展開の有効な領域

まず (16) の仮定のもとに、第 0 近似の解として承えられるのは Stokes 方程式:

$$\Delta \bar{q}_0 - \nabla p_0 = 0, \quad \nabla \cdot \bar{q}_0 = 0 \quad (17)$$

$$\bar{r} \rightarrow \infty : \bar{q}_0 \rightarrow \bar{u}, \quad p_0 \rightarrow 0; \quad r = 1 : \bar{q}_0 = 0 \quad (18)$$

の解である。この解は $\bar{r} \gg 1$ のところで

$$\bar{q}_0 \sim \bar{u} + O(1/\bar{r}), \quad p_0 \sim O(1/\bar{r}^2) \quad (19)$$

の性質をもつ。ここで Stokes 方程式を導きだすときに承えられた仮定:

$$|\Delta \bar{q}_0| \gg Re Ri |\bar{r}|, \quad |\Delta \bar{q}_0| \gg 2Ta |\bar{u} \times \bar{q}_0|, \quad |\Delta \bar{q}_0| \gg Re |\bar{q}_0 \cdot \nabla \bar{q}_0| \quad (22)$$

が \bar{r} の大きいところで満たされているかどうかを調べて見よう。

いま $\bar{r} \gg 1$ で

$$\left| \frac{Re Ri \bar{P}}{\Delta \bar{q}_b} \right| \sim O\left(\frac{Re Ri}{F^3}\right), \quad \left| \frac{Ta \bar{h} \times \bar{q}_b}{\Delta \bar{q}_b} \right| \sim O\left(\frac{Ta}{F^2}\right), \quad \left| \frac{Re \bar{q}_b \cdot \nabla \bar{q}_b}{\Delta \bar{q}_b} \right| \sim O\left(\frac{Re}{F}\right) \quad (21)$$

の関係があるから

$$\bar{r} \sim O(Ta^{-\frac{1}{2}}) \text{ 或 } \bar{r} \sim O((Re Ri)^{-\frac{1}{3}}) \text{ 或 } \bar{r} \sim O(Re^{-1}) \quad (22)$$

で (20) の仮定のどれかがみたされなくなる。したがってこの領域では Stokes 的展開は正しくなく、新しい適切な展開が必要となる。すなわちこの領域が外部領域を構成することになる。しかし $Re Ri$, Ta , Re の大きえによって、これら外部領域の展開は複雑となるから、いま $O((Re Ri)^{-\frac{1}{3}})$, $O(Ta^{-\frac{1}{2}})$, $O(Re^{-1})$ が同一の大きえに存在する特別な場合、すなわち

$$(Re Ri)^{\frac{1}{3}} \approx Ta^{\frac{1}{2}} \approx Re \quad (23)$$

の場合を考えて見よう。このとき

$$Ri = \alpha Re^2, \quad 2Ta = \beta Re^2 \quad (24)$$

とあって、 Ri , Ta の大きえは α , β の変化によって表わすことになる。

(ii) 外部展開と内部展開

仮定 (23) のもとでは、外部領域としては $O(Re^{-1})$ の領域を考えればよい。したがって外部変数 Π' は

$$\Pi' = Re \bar{\Pi} \quad (25)$$

によって定義され、この領域では浮力、コリオリの力および慣性力がバランスすると考えてよい。

外部領域における展開は、展開の初項が一様流であるような Oseen 的展開が適切な展開であり、 \bar{q} 、 \bar{p} 、 \bar{P} は

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q} + Re \bar{q}'_1(r') + Re^2 \bar{q}'_2(r') + \dots \\ \bar{p} &= Re^2 \bar{p}'_1(r') + Re^3 \bar{p}'_2(r') + \dots \\ \bar{P} &= \bar{P}'_1(r') + Re \bar{P}'_2(r') + \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

のように展開されると考えてよい。

また内部領域は Stokes 的展開が適切な展開である領域と承ておく、したがって $\bar{r} \sim O(1)$ の領域である。内部変数は

$$r = \bar{r} \quad (27)$$

でよく、また \bar{q} 、 \bar{p} 、 \bar{P} は内部領域で

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}_0(r) + Re \bar{q}'_1(r) + Re^2 \bar{q}'_2(r) + \dots \\ \bar{p} &= \bar{p}_0(r) + Re \bar{p}'_1(r) + Re^2 \bar{p}'_2(r) + \dots \\ \bar{P} &= \bar{P}_1(r) + Re \bar{P}_2(r) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

のように展開されると考えてよい。

(iii) 内部解の第 0 近似

方程式 (11)、(12) に (24)、(27)、(28) 式を代入して、内部解の第 0 近似 \bar{q}_0 、 \bar{p}_0 に対する方程式として

$$\Delta \bar{q}_0 - \nabla \bar{p}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \bar{q}_0 = 0 \quad (29)$$

すなわち Stokes 方程式がでてくる。

$r \rightarrow \infty$ での境界条件は一様流との matching を考慮して

$$r \rightarrow \infty : \quad \eta_0 \rightarrow \dot{u}, \quad p_0 \rightarrow 0 \quad (30)$$

となる。また物体上での境界条件はこの order で物体の回転が現われる理由はあることを考慮して、

$$r = 1 : \quad \eta_0 = 0 \quad (31)$$

でよい。

境界条件 (30)、(31) をみたす (29) 式の解はよく知られており、

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right) \dot{u} - \frac{3}{4} \left(\frac{x}{r^3} - \frac{x}{r^5}\right) \Omega r \\ p_0 &= \frac{3}{2} \frac{x}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

であり、またこの流れにより生ずる抵抗 D_0 は

$$D_0 = 6\pi\mu U a \dot{u} \quad (33)$$

である。

(iv) 外部解の第1近似

方程式 (11)、(12) に (24)、(25)、(26) 式を代入して、外部解の第1近似 η'_0 、 p'_0 、 ϕ'_0 に対する方程式として

$$\Delta' \eta'_0 - \nabla' \phi'_0 - \frac{\partial \eta'_0}{\partial x'} - \alpha \phi'_0 \dot{u} - \beta \dot{u} \times \eta'_0 = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \phi'_0}{\partial x'} = u_i, \quad \nabla' \cdot \eta'_0 = 0 \quad (35)$$

を得る。ここで $r' \rightarrow \infty$ での境界条件は (14) 式より

$$r' \rightarrow \infty : q'_1 = p'_1 = p'_2 = 0 \quad (36)$$

となる。また $r' \rightarrow 0$ での境界条件は、内部解 (32) との matching を考慮して、つぎのようになります。

$$r' \rightarrow 0 : q'_1 \rightarrow -\frac{3}{4r'} \mathbf{l} - \frac{3\alpha}{4r'^3} \mathbf{l} r' \quad (37)$$

境界条件 (36), (37) をみたす (34), (35) 式の解は、フーリエ変換を用いて求めることができる。 q'_1, p'_1, p'_2 のフーリエ変換を次式のように Q, P, Λ とおこう。

$$\left. \begin{aligned} Q(\mathbf{k}) &= \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} q'_1 d\mathbf{r}', & P(\mathbf{k}) &= \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} p'_1 d\mathbf{r}' \\ \Lambda(\mathbf{k}) &= \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} p'_2 d\mathbf{r}', & \text{ここで } \int d\mathbf{r}' &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \end{aligned} \right\} (38)$$

境界条件 (36), (37) をみたす解を求めるためには、(34) 式の代わりに

$$\Delta' q'_1 - \nabla' p'_1 - \frac{\partial q'_1}{\partial x'} - \alpha p'_1 \mathbf{l} - \beta \mathbf{l} \times q'_1 = 6\pi \delta(\mathbf{r}') \mathbf{l} \quad (34')$$

を用い、(34'), (35) 式のフーリエ変換を作ると、

$$\left. \begin{aligned} k^2 Q + i k_1 P + i k_1 Q + \alpha \Lambda \mathbf{l} + \beta \mathbf{l} \times Q &= -6\pi \mathbf{l} \\ i k_1 \Lambda = Q \cdot \mathbf{l}, & \quad k \cdot Q = 0 \end{aligned} \right\} (39)$$

となる。ここで $k_1 = k \cdot \mathbf{l}$ である。方程式 (39) をといて

$$Q = 6\pi \frac{\beta k_1 k \times \mathbf{l} + (k^2 + i k_1)(k_1 k - k^2 \mathbf{l})}{\beta^2 k_1^2 + k^2 (k^2 + i k_1)^2} \left[1 - \frac{i\alpha (k^2 + i k_1)(k_1^2 - k^2)}{\beta^2 k_1^3 + k^2 k_1 (k^2 + i k_1)^2 + i\alpha (k^2 + i k_1)(k_1^2 - k^2)} \right] \quad (40)$$

$$P = \frac{i}{k^2} \left[6\pi k_1 - i\alpha Q \cdot k + \beta Q \cdot (k \times k) \right] \quad (41)$$

$$\Lambda = -i(Q \cdot k) / k_1 \quad (42)$$

これらを用いて境界条件(36), (37)をみたす(34), (35)式の解として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_1 &= \frac{1}{8\pi^3} \int Q e^{ik \cdot r'} d^3k, & p'_1 &= \frac{1}{8\pi^3} \int P e^{ik \cdot r'} d^3k, & p'_1 &= \frac{1}{8\pi^3} \int \Lambda e^{ik \cdot r'} d^3k \\ \omega'_1 &= \nabla' \times \varphi'_1 = \frac{i}{8\pi^3} \int k \times Q e^{ik \cdot r'} d^3k, & \int d^3k &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \end{aligned} \right\} (43)$$

つぎに内部解の第1近似へとすすむたのには、 $r' \rightarrow 0$ における φ'_1 , p'_1 , p'_1 の展開の解を知る必要がある。また球の回転の角速度を知るためには ω'_1 の成分 ζ'_1 の $r' \rightarrow 0$ での展開の解を求めなくては都合である。逆変換の式(43)を用いて、 $r' \rightarrow 0$ のときの展開の解を計算するとき

$r' \rightarrow 0$:

$$\varphi'_1 \rightarrow -\frac{3}{4r'} k - \frac{x' r'}{4r'^3} - \frac{3}{8} \frac{x'}{r'} k + \frac{3}{16} \frac{r'}{r'} - \frac{3}{16} \frac{x'^2 r'}{r'^3} + \left(\frac{3}{8} + b\right) k + O(r') \quad (44)$$

$$b = \frac{3}{4\pi^2} \int \frac{\left\{ \beta^2 k_1^3 (k^2 - k_1^2) - i\alpha (k^2 + ik_1) (k^2 - k_1^2)^2 \right\} d^3k}{k^2 (k^2 + ik_1) \left[k_1 \left\{ \beta^2 k_1^2 + k^2 (k^2 + ik_1) \right\} - i\alpha (k^2 + ik_1) (k^2 - k_1^2) \right]} \quad (45)$$

$$p'_1 \rightarrow -\frac{3}{2} \frac{x'}{r'^3} + O(1) \quad (46)$$

$$p'_1 \rightarrow O(1) \quad (47)$$

$$\zeta'_1 \rightarrow F_0(x', y', z') + c + O(r') \quad (48)$$

ここで

$$F_0(x', y', z') = \frac{3\beta}{4\pi^2} \int \frac{r_1 (r_1^2 - r_1'^2) \{ \beta^2 r_1'^2 + r_1^2 (r_1^4 - r_1'^2) \} \sin(r_1, x') e^{i(r_2 y' + r_3 z')}}{\{ \beta^2 r_1'^2 + r_1^2 (r_1^4 - r_1'^2) \}^2 + 4 r_1^2 r_1'^8} dr_1 \quad (49)$$

$$C = \frac{3\beta}{2\pi^2} \int \frac{r_1^2 r_1^4 (r_1^2 - r_1'^2) dr_1}{\{ \beta^2 r_1'^2 + r_1^2 (r_1^4 - r_1'^2) \}^2 + 4 r_1^2 r_1'^8} + \frac{3\alpha\beta}{4\pi^2} \int \frac{r_1 (r_1^2 + i r_1) (r_1^2 - r_1'^2)^2 dr_1}{\{ \beta^2 r_1'^2 + r_1^2 (r_1^2 + i r_1) \} \{ \beta^2 r_1'^3 + r_1 r_1^2 (r_1^2 + i r_1)^2 + i\alpha (r_1^2 + i r_1) (r_1^2 - r_1'^2) \}} \quad (50)$$

このうち $F_0(x', y', z')$ は x' に関し奇関数である。したがってこれによる流れは、物体をぬけるようなトルクを生ずるが、物体の全体としての回転には影響を及ぼさざること予想される。また ζ_1' は $(\nabla' \times \mathcal{R}_1') \cdot \mathbf{e}_1$ である。いま $\mathcal{R}_1' \sim O(R_0)$, $\nabla' \sim R_0 \bar{\nabla}$ であることを考慮するとき、 ζ_1' の $r' \rightarrow 0$ での展開における $O(1)$ の項は、 $(\text{rot } \mathcal{R}_2) \cdot \mathbf{e}_1$ の $r \rightarrow \infty$ のときの展開の $O(1)$ の項と matching することになる。

(V) 内部解の第1近似と球に働く抵抗力

方程式 (11), (12) に (24), (27), (28) 式を代入して、 $\mathcal{R}_1, P_1, \rho_1$ に対する方程式が下記のようになり得る。

$$\Delta \mathcal{R}_1 - \nabla P_1 = \mathcal{R}_0 \cdot \nabla \mathcal{R}_0, \quad \nabla \cdot \mathcal{R}_1 = 0 \quad (51)$$

$$\mathcal{R}_0 \cdot \nabla P_1 = u_0 - 1 \quad (52)$$

方程式 (51) と (52) は分離してゐるから、物体に働く力を問題とする場合には (51) 式のみを考慮されればよい。この方程式に対する $r \rightarrow \infty$ での境界条件は、(44) 式および (46) 式の

q_1', p_1' との matching を考えて

$$r \rightarrow \infty: q_1 \rightarrow -\frac{3}{8} \frac{x}{r} \bar{r} + \frac{3}{16} \frac{1}{r} \bar{r} - \frac{3}{16} \frac{x^2}{r^3} \bar{r} + \left(\frac{3}{8} + b\right) \bar{r}, \quad p_1 \rightarrow 0 \quad (53)$$

のようになる。また $r \rightarrow 0$ での境界条件は \bar{r}' が $O(R_0^2)$ であること（回転が $O(R_0^2)$ で現われること）を考慮して

$$r=1: q_1 = 0 \quad (54)$$

であり。ここで q_1, p_1 を \bar{r} のまわりの 2 つの流れに分解する。

$$q_1 = q_{11} + q_{12}, \quad p_1 = p_{11} + p_{12} \quad (55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta q_{11} - \nabla p_{11} = 0, \quad \nabla \cdot q_{11} = 0 \end{array} \right. \quad (56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty: q_{11} \rightarrow \left(\frac{3}{8} + b\right) \bar{r}, \quad p_{11} \rightarrow 0; \quad r=1: q_{11} = 0 \end{array} \right. \quad (57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta q_{12} - \nabla p_{12} = \bar{r}_0 \cdot \nabla q_0, \quad \nabla \cdot q_{12} = 0 \end{array} \right. \quad (58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty: q_{12} \rightarrow -\frac{3x}{8r} \bar{r} + \frac{3}{16} \frac{1}{r} \bar{r} - \frac{3x^2}{16r^3} \bar{r}, \quad p_{12} \rightarrow 0; \quad r=1: q_{12} = 0 \end{array} \right. \quad (59)$$

いま q_{11}, p_{11} と q_{12}, p_{12} に対する方程式および境界条件の性質を調べることにより、 q_{11}, p_{11} は流れの逆転によって逆転する部分であり、 q_{12}, p_{12} は流れの逆転によって全然変化しない部分であることが分る。いま物体に働く全体としての力を問題にしよう。このとき物体の形の対称性から、 q_{11}, p_{11} による流れのみを考慮すればよく、 q_{12}, p_{12} による流れはこの力に影響を受けないことが分る。方程式 (56) は Stokes

の方程式であるから、(57)をみたす(56)の解 q_{11} , p_{11} は

$$q_{11} = \left(\frac{3}{\rho} + b\right) q_0, \quad p_{11} = \left(\frac{3}{\rho} + b\right) p_0 \quad (60)$$

で与えられ、またこの流れによって物体に与えられる抵抗 ID_1 は

$$ID_1 = \left(\frac{3}{\rho} + b\right) Re ID_0 \quad (61)$$

のように決定される。

(vi) 内部解の第2近似と球の回転

方程式(11), (12)に(24), (27), (28)式を代入して、 q_2 , p_2 , P_2 に対する方程式として

$$\Delta q_2 - \nabla p_2 = q_1 \cdot \nabla q_0 + q_0 \cdot \nabla q_1 + \beta \mathbf{r} \times q_0, \quad \nabla \cdot q_2 = 0 \quad (62)$$

$$q_0 \cdot \nabla p_2 = u_1 - q_1 \cdot \nabla p_1 \quad (63)$$

が得られる。以下において、 $O(R_0^2)$ で初めて現われる、回転座標系からみた球の回転のつれを問題としよう。このとき再び(62)式だけを分離して与えればよい。いま

$$\text{rot } q_2 = \omega_2, \quad \omega_2 \cdot \mathbf{r} = J_2$$

と置いて、 J_2 に対する方程式を(62)式より導くとき

$$\Delta J_2 = \beta \mathbf{r} \cdot \frac{\partial q_0}{\partial x} \quad (64)$$

が得られる。 $r \rightarrow \infty$ での境界条件は(48)式で表わされる

J_2 との matching を考慮して

$$r \rightarrow \infty : J_2 \rightarrow C + [F_0], \quad (65)$$

であり。ここで $[F_0]$ は F_0 の $r' \rightarrow 0$ のときの展開の

$O(1)$ の項を意味し、 F_0 の形から予想されるように x に

は奇関数である。また $r=1$ での境界条件は、物体が角速度 $\omega = \omega_2 R_e^2$ で剛体回転をしていることを予想して、

$$r=1 : \quad \mathcal{P}_2 = \omega_2 \mathbf{e} \times \mathbf{r} \quad (66)$$

となる。ここで ω_2 は J_2 の方程式を $r \rightarrow \infty$ として決定される定数である。

$$\text{再び} \quad J_2 = J_{21} + J_{22} \quad \text{とおいて}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta J_{21} = 0 \\ r \rightarrow \infty : J_{21} = C ; \quad r=1 : \mathcal{P}_2 = \omega_2 \mathbf{e} \times \mathbf{r} \end{array} \right. \quad (67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta J_{22} = \beta \mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{P}_0 / \partial x \\ r \rightarrow \infty : J_{22} = [F_0]_1 ; \quad r=1 : \mathcal{P}_2 = 0 \end{array} \right. \quad (69)$$

のように J_2 を分解する。方程式 (69) の右辺の $\nabla \mathcal{P}_0 / \partial x$ および境界条件 (70) の $[F_0]_1$ はともに x の奇関数であるから、 J_{22} は x の奇関数であり、物体の全体としての回転には影響を及ぼさない。球の回転数は J_{21} により決定される。(68) をみたす (67) の解は

$$J_{21} = C \quad (71)$$

である。この解は角速度 $C/2$ で内部領域全体が剛体回転をしていることを表わし、物体もこの回転数で回転することになる。したがって回転座標系から見た物体の回転の角速度 ω^* は

$$\omega^* = \frac{U}{a} \frac{C}{2} R_e^2 = \frac{C}{\beta} \Omega R_e \quad (72)$$

で表えられる。

§ 4. 球に働く抵抗力および球の回転の角速度

(i) 球に働く抵抗力: D

式 (33) および (61) より、球に働く抵抗力 D は

$$D = 6\pi\mu U a R \left[1 + \left(\frac{3}{8} + b(\alpha, \beta) \right) Re + \dots \right] \quad (73)$$

となる。ここで $b(\alpha, \beta)$ は (45) 式で表えられる 3 重積分であるが、複素積分を用いてつきのような 1 重積分に変形される。

$$b(\alpha, \beta) = R \int_0^1 \frac{6(z_1 + \frac{t}{2}) \{ \beta^2 t^2 (1-t^2) + \alpha (1-t^2)^2 - \frac{\alpha}{t} (z_1 + \frac{t}{2}) (1-t^2)^2 \}}{(z_1 - \frac{t}{2}) (4z_1^3 - t^2 z_1 - \alpha \frac{1-t^2}{t})} dt \quad (74)$$

ここで z_1 は $z^4 - t^2 z^2/2 - \alpha(1-t^2)z/t + t^4/16 + \beta^2 t^2 + \alpha(1-t^2)/2 = 0$ の根で $Rz_1 < 0$, $\text{Im} z_1 > 0$ のものである。(74) 式を数値計算して、 $\beta = 0, 5, 10$ のときの $b(\alpha, \beta)$ の値が図 2. に示されている。 $\beta < 0.3$, $\alpha \ll 1$ のときのごく僅かな範囲を除いて、 $b(\alpha, \beta)$ の値は正で、また

$$b(\alpha, \beta) < b(\alpha, 0) + b(0, \beta) \quad (75)$$

が成立するものと思われる。ここで $b(\alpha, 0)$ は回転しない成層流体中に球がおかれたときの抵抗力の増加分であり、 $b(0, \beta)$ は密度が一様な回転流体中に球がおかれたときの抵抗力の増加分である。

$\alpha \gg 1$ または $\beta \gg 1$ のとき:

式(74)からつぎのような展開の解が得られる。

$$b(\alpha, \beta) = \bar{b}(\gamma) \alpha^{\frac{1}{3}} [1 + O(\alpha^{-\frac{1}{3}} \text{ or } \beta^{-\frac{1}{2}})] \quad (76)$$

ただし

$$\gamma = \beta \alpha^{-\frac{2}{3}} = \frac{2Ta}{(R_i R_e)^{2/3}}, \quad (77)$$

$$\bar{b}(\gamma) = 6R \int_0^1 \frac{(1+t^2)^2 z_1 - \gamma^2 t^3 (1-t^2)}{4t z_1^3 - 1 + t^2} dt \quad (78)$$

ここで z_1 は $z^4 - \frac{1-t^2}{t} z + \gamma^2 t^2 = 0$ の根で $Rz > 0$ をみたすものである。このとき抵抗式(73)は

$$D = 6\pi\mu U a R [1 + \bar{b}(\gamma) (R_e R_i)^{\frac{1}{3}} + \dots] \quad (79)$$

となり、 $\bar{b}(\gamma)$ の γ による変化は図3. に示す。また $\gamma \ll 1$ のときおおよそ $\gamma \gg 1$ のとき $\bar{b}(\gamma)$ はつぎのような性質を示す。

$$\left. \begin{aligned} \gamma \ll 1: \quad \bar{b}(\gamma) &\sim \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{2}{3}) / \Gamma(\frac{8}{3}) + O(\gamma^n) \\ \gamma \gg 1: \quad \bar{b}(\gamma) &\sim \frac{2\sqrt{2}}{7} \sqrt{\gamma} + \dots \end{aligned} \right\} (80)$$

ここで、仮定(23)をもとにして $\alpha \gg 1$ or $\beta \gg 1$ とおいて導出した公式(73)は

$$1 \gg Ta \gg Re^2, \quad \frac{1}{Re} \gg Ri \gg Re^2 \quad (81)$$

のときには有効な式であることを注意しておく。

(ii) 球の回転の角速度: ω^*

回転座標系から見た球の回転の角速度は (72) 式で表される。

$$\omega^* = \frac{C(\alpha, \beta)}{\beta} \Omega R_e \quad (72)$$

ここで $C(\alpha, \beta)$ は (50) 式で与えられている 3 重積分であるが、複素積分を用いてつぎのようなる 1 重積分に変形される。

$$C(\alpha, \beta) = R \int_0^1 \frac{6\beta t(1-t^2) \left\{ \frac{3}{2} t z_1^2 + t^2 z_1 + \frac{t^3}{8} + \frac{\alpha}{4} \frac{(1-t^2)}{t} \right\}}{4 z_1^3 - t^2 z_1 - \alpha (1-t^2)/t} dt \quad (82)$$

ここで z_1 は (74) 式の z_1 と同様である。 $C(\alpha, \beta)$ の α, β による変化は図 4. に示される。 $\alpha < \alpha_c(\beta)$ 以下では回転の角速度は回転座標系から見て負である。この領域では主として慣性力の効果が大きく、角運動量保存の効果がまいてきて回転がおそくなるものと思われる。また $\alpha > \alpha_c(\beta)$ 以上では回転の角速度は回転座標系から見て正である。この領域では浮力の効果が大きく、このたの球の後半における流速がいちぢるしく増加し回転がはやくなるものと思われる。 $\alpha_c(\beta)$ は (82) 式の計算からつぎのようなる値を持つ。

$$\begin{aligned} \beta \leq 1 & : \alpha_c \sim 12 \\ \beta \gg 1 & : \alpha_c \sim 0.4 \beta^{\frac{7}{8}} \end{aligned} \quad (83)$$

$\alpha \gg 1$ のとき:

式 (82) から、つぎのようなる展開の解が得られる。

$$c(\alpha, \beta) = \alpha^{\frac{2}{3}} \bar{c}(\delta) \left[1 + O(\alpha^{-\frac{1}{3}}) \right] \quad (84)$$

ただし δ は (77) 式で表す α の関数、

$$\bar{c}(\delta) = -\frac{3}{2} \delta R \int_0^1 \frac{t(1-t^2)^2}{4z_1^3 t - 1 + t^2} dt \quad (85)$$

であり、 z_1 は (78) 式の z_1 と同じである。このとき回転の角速度 (72) は

$$\omega^* = \frac{\bar{c}(\delta)}{\delta} \Omega R e \quad (86)$$

となる。 $\bar{c}(\delta)$ の δ による変化は図 5 に示される。また

$\delta \ll 1$ のときおよび $\delta \gg 1$ のとき、 $\bar{c}(\delta)$ はつきのような性質を示す。

$$\left. \begin{aligned} \delta \ll 1 : \quad \bar{c}(\delta) &= \frac{\delta}{8} - \frac{\delta^3}{6} \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) + \dots \\ \delta \gg 1 : \quad \bar{c}(\delta) &\sim 0.713 \delta^{-\frac{1}{5}} + \dots \end{aligned} \right\} (87)$$

公式 (73) のときと同様に (86) 式は (81) の仮定のもとで有効な式であることを注意しておく。

§5. おそひ

成層回転流体中の回転軸上のおそひ定常運動を解析し、

(i) 球に働く抵抗について

(73) 式および図 2 で示されるように抵抗は増加する。しか

し (75) 式で示されるように成層流体による抵抗の増加と回転

流体による拮抗の増加を加えたものよりは小さい。

(ii) 球の回転の角速度について

球の回転の角速度は(72)式および図4. で示されるように、浮力の効果が小さい間は流体の一樣回転より小さいが、浮力の影響が大きくなるとともに流体の一樣回転よりはやくなる。この結果が得られた。また流れの方向を逆にしても、球の拮抗および回転数は変らなることが容易に証明される。

つぎに物体を球に限定しないうち、前後・左右・上下対称な物体(例えば楕円体)が対称な軸を流体の回転軸と一致させて、一定速度ですすむときに上記の解析を拡張することができる。

いま普通の流体($\rho = \text{一定}$, $\Omega = 0$)中に上記物体が対称軸方向に定常運動をしているときの Stokes 方程式の解が既知であると、この解による拮抗を F_1 としよう。つぎに §1. のべられた仮定のもとにこの物体が運動するときの拮抗および回転の角速度は(73), (79), (72), (86)の代わりに

$$D = F_1 R \left[1 + \frac{F_1}{6\pi\mu U a} \left(\frac{3}{8} + b \right) Re + \dots \right] \quad (73')$$

$$D = F_1 R \left[1 + \frac{F_1}{6\pi\mu U a} \bar{b} (Re Ri)^{\frac{1}{3}} + \dots \right] \quad (79')$$

$$\omega^* = \frac{F_1}{6\pi\mu U a} \frac{c(\alpha, \beta)}{\beta} \Omega Re + \dots \quad (72')$$

$$\omega^* = \frac{F_1}{6\pi\mu U a} \frac{c(\alpha)}{\beta} \Omega Re + \dots \quad (86')$$

を用いられはすく、 $b(\alpha, \beta)$, $\bar{b}(\sigma)$, $c(\alpha, \beta)$, $\bar{c}(\sigma)$ については球の場合と同一のものを用以てす。また R_e, \dots を定義するときは必要な物体の特徴的長さ (球のときは半径) を a で表わした。

本研究に之りし、とくに数値計算にりて、金子幸臣氏からりりり有益な御助言をりたがりたことと感謝しす。

なお本研究を遂行中、著者 (成瀬) は文部省の科学研究費補助金を受け取った。

文 献

- 1) M. Van Dyke : Perturbation Methods in Fluid Mechanics (Academic Press, 1964), 149.
- 2) S. Childress : J.F.M. 20 (1964), 305.
- 3) 成瀬貞文雄 : 数理解析研究所講究録 163 (1972), 146.

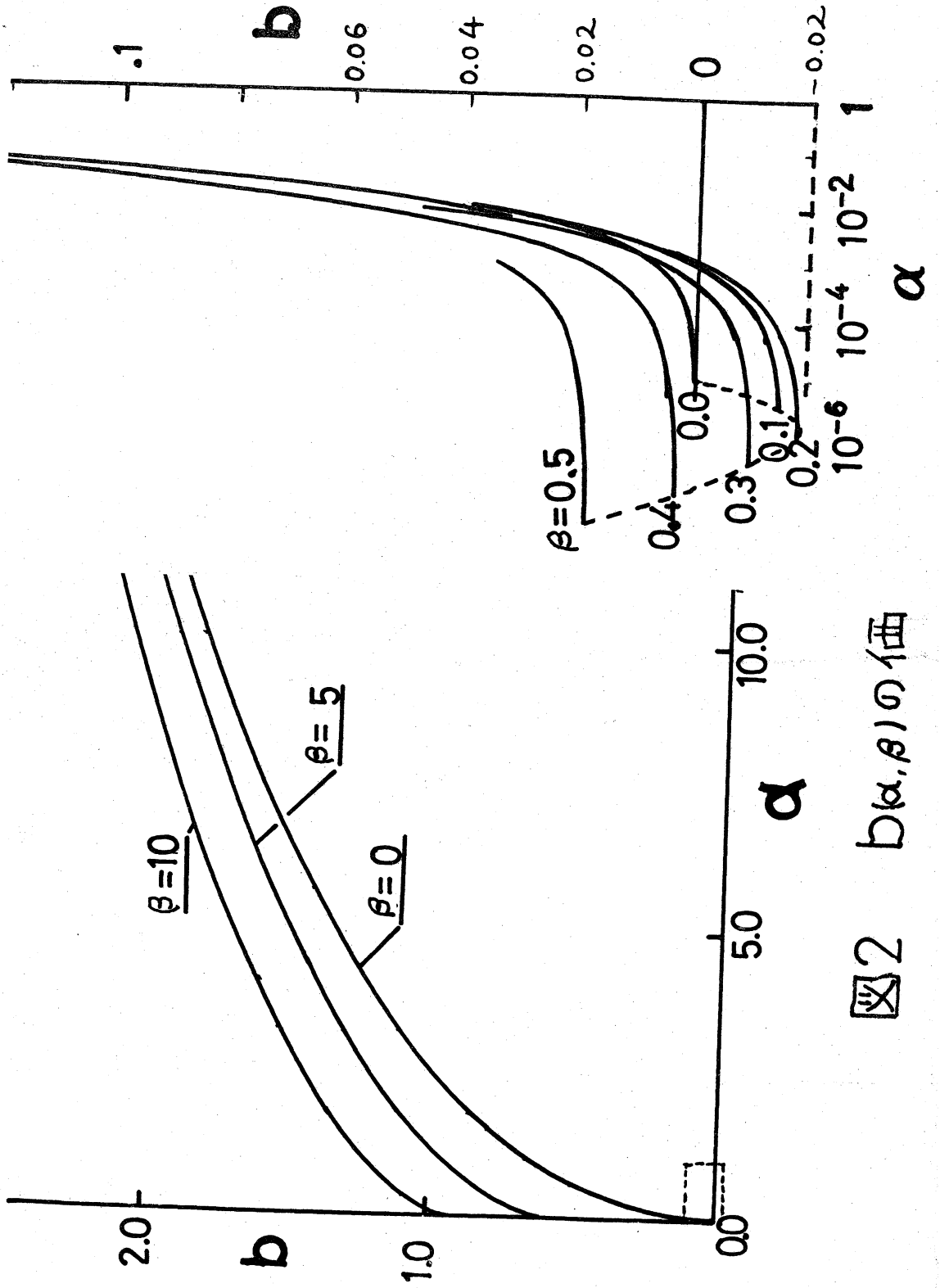


図2 $b(\alpha, \beta)$ の値

$\delta \gg 1$

$$\bar{b}(\delta) \sim \frac{2\sqrt{2}}{7} \sqrt{\delta}$$

$\bar{b}(\delta)$

2.0

1.0 0

10.0

δ

20.0

図3 $\bar{b}(\delta)$ の値

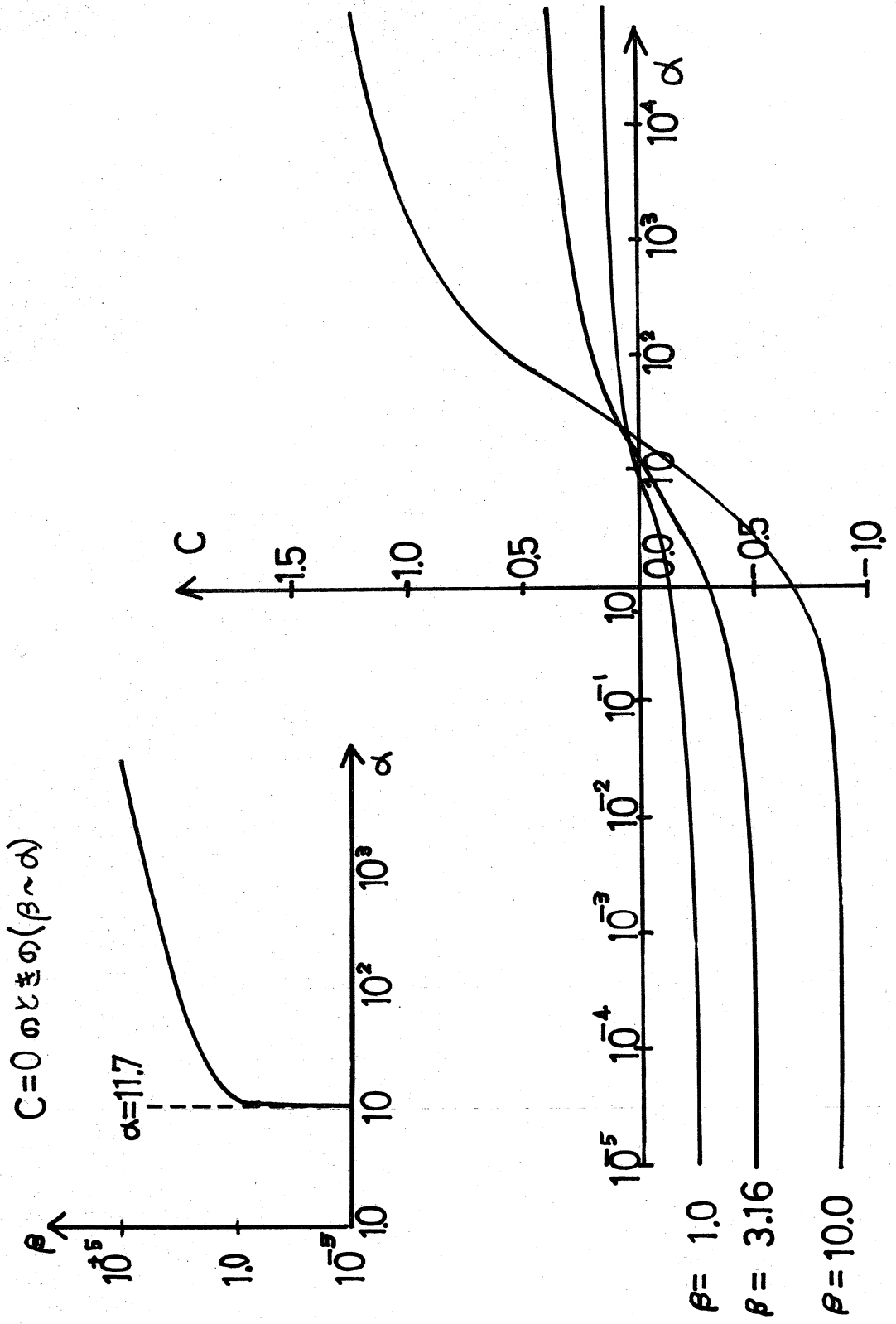


図4 $C(\alpha, \beta)$ の値

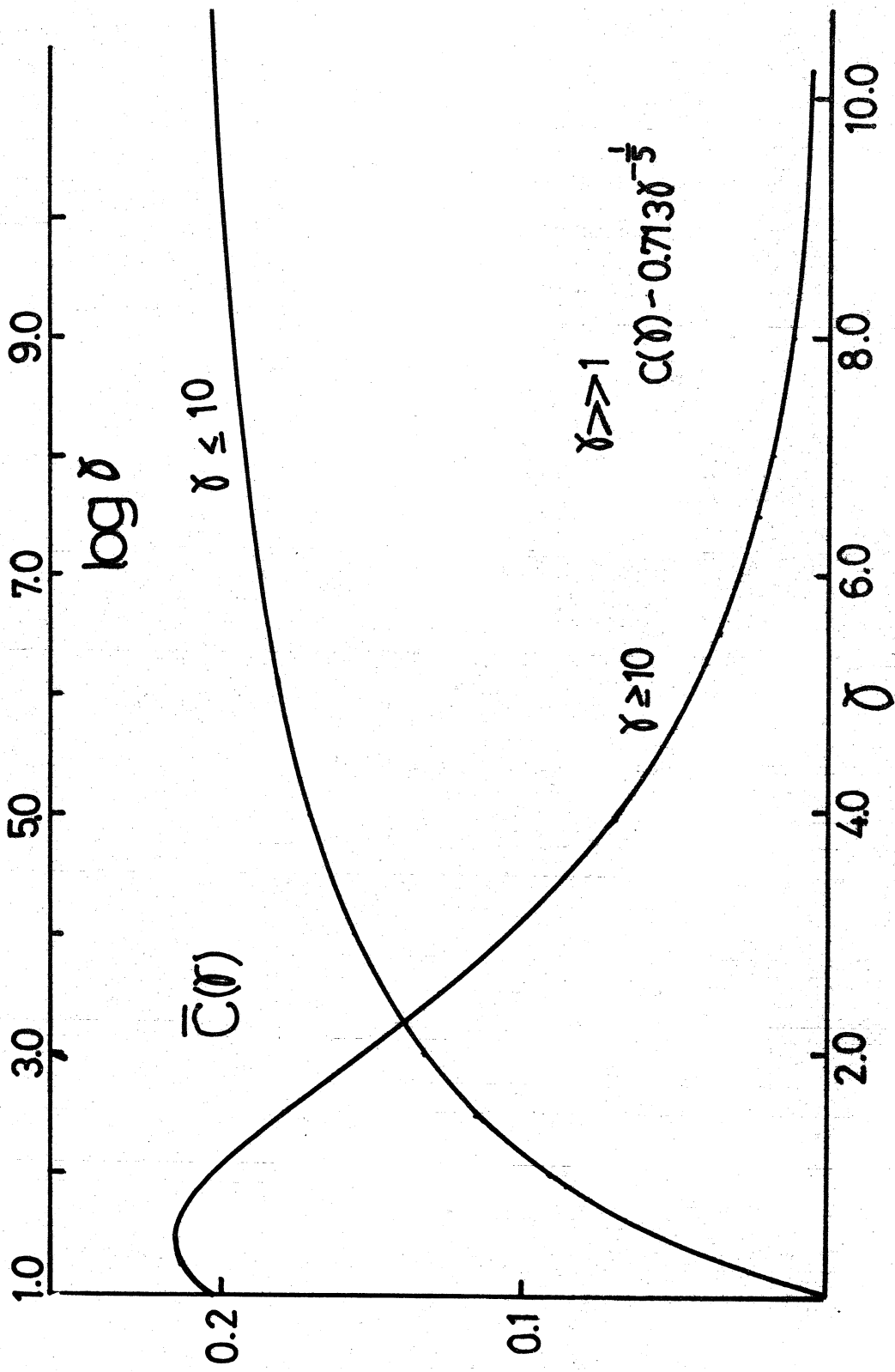


図5 $\bar{C}(\delta)$ の値