

## 多角形領域の Stokes 問題の数値解法

東大 生研 金子幸臣

## § 1 序

数値計算を労力の点からみると、差分法（定差法，有限要素法など）は，その精度が  $O(h^k)$  の形になる。（ここに  $h$  は Mesh の大きさの代表）。取り扱う Mesh 数を  $N$  とすると， $m$  次元で， $N = O(h^{-m})$ ，従って，精度は  $O(N^{-\frac{k}{m}})$  ということになる。さらに，問題は  $N$  個の変数の連立方程式となるので計算量  $Q = N^\alpha$ ，（ $\alpha$  は一次方程式の消去法なら  $\alpha=3$ ，2次元 Laplace 方程式の定差法に対する SOR なら， $\alpha=1.5$  etc.）精度は  $O(Q^{-\frac{k}{m\alpha}})$  となる。（2次元 Laplace 方程式の中心差分化で SOR によるとすると， $K=2$ ， $m=2$ ， $\alpha=1.5$ ，打ち切り誤差  $E = O(Q^{-\frac{2}{3}})$ ）即ち，1桁改良するには，30倍の労力が必要。これは打ち切り誤差であって，Global な真の誤差は，一般的な見通しのよき結果はないので，要するに数値計算では，何が得られたか分からないとか，桁数が多い計算は非常に無駄で

あるとかの“哲学”を生じた。もともと差分法は、非常に一般的な問題 ( $L_2$  理論と同じくらい) に対して考えられたもので、そこでは、精度と労力の関係はあまり改善されることは望めないのはやむを得ない。実用家の立場からは、(2次元で) 長さのあるかどうかわからない境界などは論外として、いたるところ解析的でない境界条件や外力といった問題は、かえって珍しい、というよりは、無理して解かなくてもよい問題であって、境界も、境界値も、外力も、断片的に解析的な問題にかぎって、問題の本質を失うことのないのが普通である。そのようなときには、精度と労力の関係が、各段により方法があり得るのであって、実際、Navier Stokes 方程式や、その漸近方程式である Stokes 方程式に対する、粘着条件での問題などについてはこれができる。

ここでは考え方の説明のため、簡単な多角形領域内の Stokes 問題をとりあげる。定差方程式の理論によると、楕円型方程式の性質から、境界条件は、任意の精度の計算に付しても、それに応じた適当に並んだ有限個の境界上の点での値を指定することでおきかえ得る。数値計算でも、境界上の値を適当な関数系での展開の係数の列を与えるなどのほか、境界上の同じ等間隔に並んだ代表点の上での値を指定することでもよい。この場合、目的とする値の計算に対して、代表

点の選ひ方が適当であると、点の数の2倍の数の展開係数を指定したのと同じ効果さえ出せるというのは、Gaußの数値積分公式の例にもある。さらに、外力が解析的(外力なしならよい)のとき、解は任意の点で解析的、即ち十分速く収束する級数に展開される。またたとえば、ある点 $\zeta$ を中心に円板を考へ、その中に特異点(あるとすれば当然境界上又は $\infty$ と外)がないとき、円内で収束する整<sup>べき</sup>級数で表わされる。従つて最も近い特異点より十分小さな半径の円内では非常に速く収束する。明らかに精度は $O(\rho^N)$ 形で与えられ、項数したかつて $\rho$ の指数関数的である。同様に、境界が円と円の接点目めるときは比較的簡単な関数系による急速に収束する展開が可能である。特に直線と直線の交点に関しては、非整数べき級数展開でそのようなものが作れる。そこに現われる関数系を仮にMoffatt関数などと呼ぶことにする。

さて、与えられた領域が上のような、急速に収束する展開可能な部分領域によつて覆われたものとする。たとえば、多角形領域では、展開の中心が内点または直線境界上にあるときは、整べき展開、角上にあるときはMoffatt展開でよい。そのとき、適当な有限個を選んで固定すればよい。つまり、精度を上げるのは、各部分領域内での展開係数を増加するだけで、分割の(直しをしない、従つて、いわゆる有限要素法

のように、結局無限個の要素に分割するものと本質的に違  
 ちしろ、も、と対称性のよい問題の、いわゆる Matching 法と  
 近い。各部分領域では、その境界(部分領域の)上に、精度に充  
 じた数  $N$  個だけ、ほぼ等間隔に代表点をとる。境界条件に現  
 われる関係式に解の展開形の  $2N$  項で打ち切ったものを代入し、  
 代表点の座標と、そこにおける(流れの関数と渦度の)値を代入す  
 る。これを展開係数に関する連立方程式と考えると、代表点  
 がほぼ等間隔にとってあることにより、この方程式は常に  
 解けて、 $N \rightarrow \infty$  のとき、もとの境界値問題の解になるのは、  
 差分方程式の理論の示唆するところである。与えられた領域  
 がこのように簡単な部分領域によつて覆われていて、各部分  
 領域の境界はすべて、互いに隣る領域のどれかの十分内部にあ  
 るようになっているとき、今の場合、最大値の原理より強い  
 強い性質があり、いわゆる Schwarz の方法が使えて、繰り返  
 し法により global な問題の解が得られる。(Nonlinear のとき  
 は少しむずかしくなるが、十分よい初値からはじまれば可  
 能であろう) それは一種の逐次代入法で、部分領域に  
 cyclic な番号をつけ、次に各部分領域の境界値を、番号の若  
 い向きに一番近い領域内の点として定め、境界値問題を解く。  
 これと番号順に行う。番号のつけ方は、強く重り合、互領域  
 はなるべく近い番号になるようにするのがよい。この逐次代

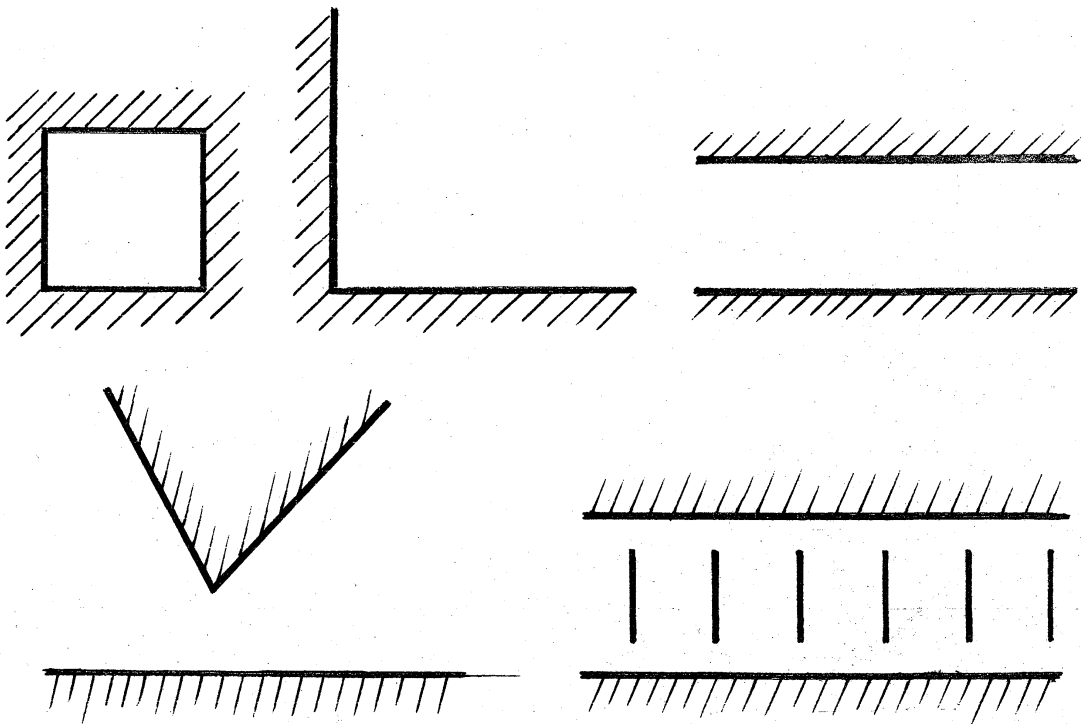
入法の収束の速さは、主に各部分領域における~~係数の~~展開関数系の低次の関数の性質によ、つまり、部分領域の重なり~~の~~の深さほど速い。また分割の細かいほど速い。しかし、展開級数そのものの収束は細かいほど速い。

注意 展開係数そのものは、もちろん、各々は収束するが、収束半径で規格化しないと  $N \rightarrow \infty$  のときを考えたのはまじまらないが、部分領域内の点(隣というより後の番号の領域の境界値として必要な)での値を考えれば、期待通り、 $N$ の指数関数的に収束する。また、部分~~領域~~領域の境界上の点での値の組みから内部の必要な点での他の組みと与える行列は性質のよいものであって、 $N \rightarrow \infty$  に対して悪くならない。その行列を作るときも、上の展開係数を通じて作ると、特に問題なく作れる。

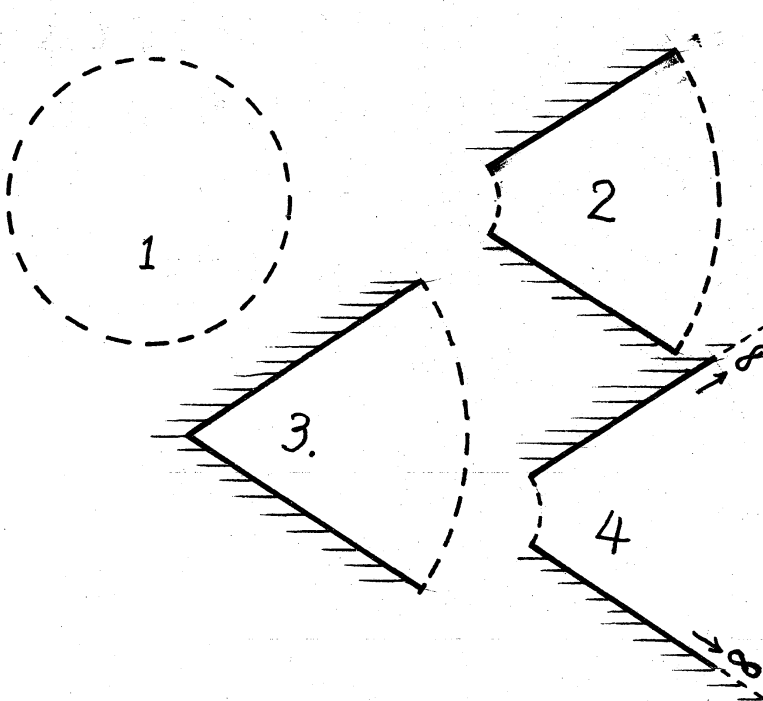
## §2 簡単な多角形とその分割

問題の基本が扇形なので、簡単な多角形とは次のようなものがある。

1. 本当に辺の数の少ないもの。その内部または外部
2. 正多角形のように対称性のよいもの。
3. 平行な壁の間の無限領域
4. (3)の中に周期的に多角形、特に線分などがあかめられたもの等々。図のようなものである。



基本領域



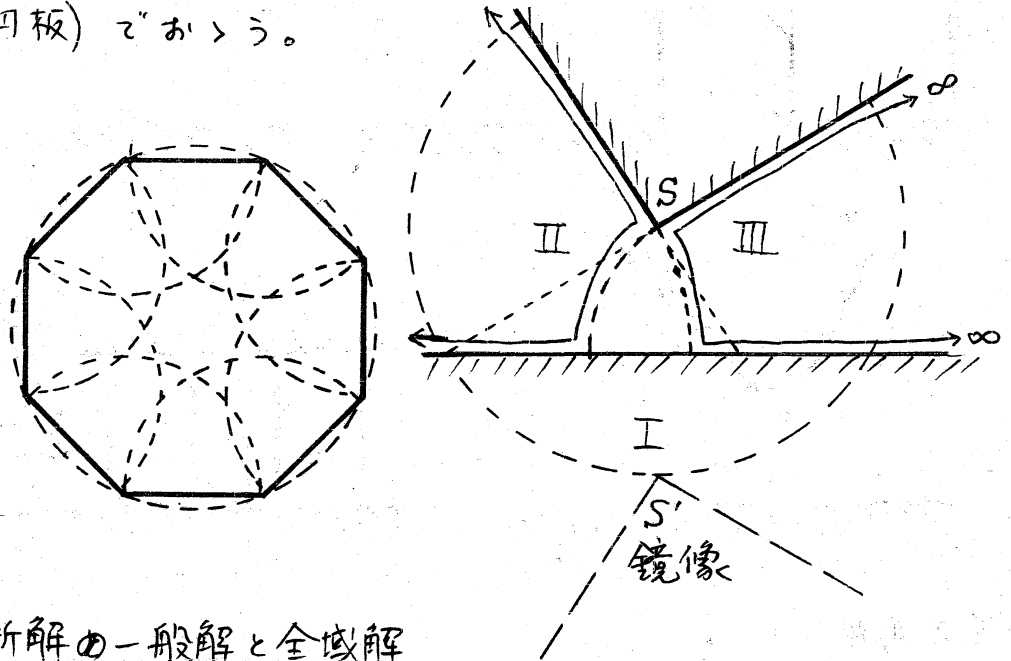
- 1. 完全な円板
- 2. 一般の扇形
- 3. 頂点を含む扇形

- 4.  $\infty$ 遠点を含む扇形

(3, 4は収束が速い。)

分割の例

(内部又は辺内)に(頂点又はその鏡像点)をもたない(扇形又は四板)であらう。



局所解の一般解と全域解

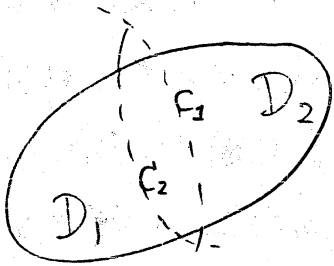
上の右図で、 $S$ を頂点とし、半径 $SS'$ の頂点を含む扇形を領域I、頂点を含まないか $\infty$ 遠点を含む領域、II、IIIで覆われるが、各領域での展開を

$$\begin{aligned} \psi_I &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^I e^{i n \rho_I} \psi_n^I(\theta_I) & \rho_I & \text{は } S \text{ からの距離の対数} \\ \psi_{II} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{II} e^{-i n \rho_{II}} \psi_n^{II}(\theta_{II}) & \theta_I & \text{は } S \text{ からの方向の角度} \\ \psi_{III} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{III} e^{-i n \rho_{III}} \psi_n^{III}(\theta_{III}) & & \text{(適当な方向を基準にとる)} \end{aligned}$$

etc.

と表わしたとき、三つの関数があるの解析延長にな、てい  
るように、 $\{a_n^I\}$ ,  $\{a_n^{II}\}$ ,  $\{a_n^{III}\}$  をきめれば、問題は解決  
ことになる。但し、 $\psi_0^I$ ,  $\psi_0^{II}$ ,  $\psi_0^{III}$  は境界条件を満たすもの、  
 $\psi_1^I$ ,  $\psi_2^I, \dots$   $\psi_1^{II}$ ,  $\psi_2^{II}, \dots$  はいわゆる Moffatt の関数である。

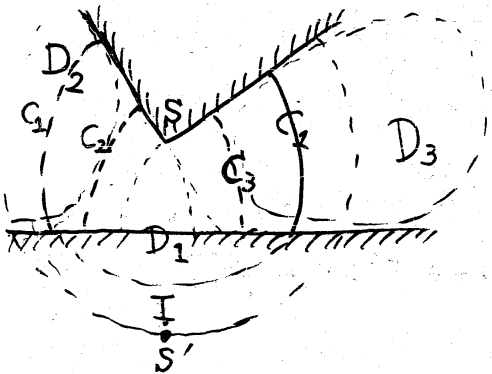
§ 3 Schwartz の方法



図のような領域  $D$  における境界値問題を考える。  $D$  が 2 つの部分領域  $D_1, D_2$  で覆われているとする、その境界  $C_1, C_2$  は夫々他の領域の充分内部にあるとする。また、  $D$  の境界

条件は満し、かつ  $C_2$  上では任意の条件を満す解がいつでも作れるとし、  $D_2$  についても同様とする。方程式が、 <sup>$D_1$ での</sup>楕円型、線形であるので、  $D_2$  に対しては、  $C_2$  での値の変~~動~~の大きさ (適当な Norm を考えて) と、それによる内部の曲線  $C_2$  上での値の変~~動~~の大きさの比は 1 より小さなある値より小さくなることかわかる。  $D_2$  についても同じであるから、  $C_2$  上を勝手に他と与えて  $D_2$  について解き、その解の  $C_2$  での値を使って  $D_1$  について解いたときの解の  $C_2$  での値は、はじめの他より必ず真の値に近い。この時、誤差の減少するようすは、反復回数の幾何級数的になる。これが Schwartz の方法である。さっきの例について見れば、左図のように  $C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3$

をとればよい。





## §4. 局所解

前節の分解において基本となる要素として、特異点のない完全な円板(の内部)の場合と、扇形の場合とを考えればよいことがわかった。これを変数分離法の定石通りに解くのであるが、数値計算の手順の記述のための Notation の説明を兼ねて、簡単に解法を述べる。

2次元の直交座標を  $(x, y)$  とすると、Stokes 近似では、流れの関数  $\psi$ , ( $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$ ,  $u, v$  は流速ベクトルの  $x, y$  成分) は,

$$\Delta \Delta \psi = 0, \quad \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

を満す。複素座標  $z = x + iy$  を使うと、 $\psi = \psi(z, \bar{z})$  は

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

を満すことである。従って一般解として

$\psi = \text{Im } F$ ,  $F = f(z) + \bar{z} g(z)$ ,  $f(z), g(z)$  は正則関数を得る。 $\text{Im } F$  が与えられると、 $\text{Re } F$  も 実数 + 実数  $\times z, \bar{z}$  を除いて一意に定まるから、以下のように、物理量を表わすのに必要な関数であるので、以後  $F$  を求める問題と考えるもよい。

境界条件などに現われる物理量と  $F$  や  $f, g$  との関係は

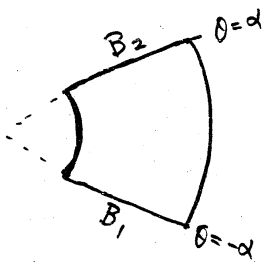
$$\begin{aligned} \text{複素速度 } W &\triangleq u + iv = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2i \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \frac{\partial (F - \bar{F})}{\partial z} = f'(z) + \bar{z} g'(z) - \overline{g(z)} \end{aligned}$$

$$\text{複素渦度 } \Omega = p - i\omega = 4 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} = 4g'(z)$$

$$p: \text{圧力/粘率}, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \text{渦度}$$

円板の場合、中心を原点として、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  とすると、要素内で数値計算に耐えうる速さで収束する。

扇形の場合、変数分離法によって解を作るのがよい。



$\Psi^B$  を  $\left\{ \begin{array}{l} \text{辺の部分での境界条件} \\ \text{内部で微分方程式} \end{array} \right\}$  を満たす任意関数 とすると、

$$\text{残余 } \psi = \Psi - \Psi^B \text{ は}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{辺の部分では斉次の境界条件} \\ \text{弧の部分では } \psi - \Psi^B \text{ の } = \\ \text{内部では微分方程式} \end{array} \right\}$  を満たす関数である。

$\Psi^B$  の構成の難しさは、問題の作り方に依存する。今は与えやすいように仮定されている。

$\psi$  の弧の部分についての条件は未知であるから、可能なあらゆる場合について解けるなければならない。

以下 辺の部分の条件として、速度が与えられているとする。このとき残余  $\psi$  に対応する複素ポテンシャルを  $F_0$  と書くと

$$F_0(z) = f(z) + \bar{z}g(z) \quad f, g \text{ は扇形内で正則}$$

$$\text{速度 } W_0(z) = f'(z) + \bar{z}g'(z) - \overline{g(z)}$$

今 辺  $B_1$  :  $z = re^{-i\alpha}$  ( $r$ : 実数) 上で

$$W_0(z) = f'(re^{-i\alpha}) + \underbrace{re^{+i\alpha}}_{ze^{+2i\alpha}} g'(re^{-i\alpha}) - \overline{g(re^{-i\alpha})} = 0$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} (f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) - g(z)) &= 0 \\ \operatorname{Im} (f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) + g(z)) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{on } z = r e^{-i\alpha} \\ r: \text{real} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって 正則関数 } F_1(z) &= i(f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) - g(z)) \\ F_2(z) &= f'(z) + z e^{2i\alpha} g'(z) + g(z) \end{aligned}$$

は夫々  $B_1$  に関して鏡像の領域まで正則に延長できる。

従って  $F_2 + iF_1 = 2g(z)$  も新しい領域で正則、  
 故ら  $f'(z) = F_2 - (z e^{2i\alpha} g'(z) + g(z))$  も正則、即ち  $f(z)$  も  
 正則。同様に他の辺  $B_2$  についても鏡像の原理を適用すると  
 $B_2$  の外側に、もとの扇形の2つ分延長される。

再び  $B_1$  について鏡像をとるとさらに2つ分延長され、以  
 下  $B_2, B_1, B_2, \dots$  と交互に鏡像をとると、毎回、もとの扇形の  
 2つ分ずつ延長される。結局 2辺の交点のまわりのラセン  
 状の Riemann 面上に正則に延長されることかわかる。つまり  
 残余  $\psi$  は極座標に関して非常によい解析性をもつことかわ  
 かる。そこで、極座標に移す。  $z = x + iy, \zeta = \rho + i\theta, z = e^\zeta$

$\rho = \log r \cong \log \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arg z, \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, -\alpha \leq \theta \leq \alpha$   
 一般解は  $F = f(\zeta) + e^\zeta g(\zeta)$  となる。典型的な  $\psi^B$  として  
 2辺 ( $\theta = \pm\alpha$ ) 上で独立に条件を与えたいものとして

i) 任意の複素数  $\mu$  (但し,  $0, \pm 1, \lambda_n (e^{i2\alpha} = \pm 1 \text{ on } 2\alpha \text{ の根})$   
 以外のもの,  $\lambda_n$  を Moffatt の固有値ということにする。) に対し

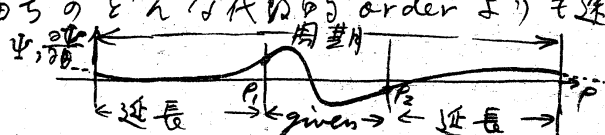
$$F = (H e^\zeta + G e^{\bar{\zeta}}) e^{\mu\zeta} \propto e^{(\mu+1)\zeta}, \quad H, G \text{ は複素数}$$

ii)  $\mu=1 : F = (H e^\zeta + (G + G_1 \zeta) e^{\bar{\zeta}}) e^\zeta \quad G_1: \text{実数}$

iii)  $\mu=-1 : F = ((H + H_1 \zeta) e^\zeta + G e^{\bar{\zeta}}) e^{-\zeta} \quad H_1: \text{実数}$

iv)  $\mu=0 : F = (H + H_1 \zeta) e^\zeta + (G + G_1 \zeta) e^{\bar{\zeta}}$

例 1.  $|P_1|, |P_2| \neq \infty$  (要し  $\infty$  遠くを合打し扇形)  $z^2$ , 边上で  
 両端を含め解析的な境界条件に對しては, (i) から十分細い  
 間隔で  $\{u_n\}$  を選んで (例えは"境界値を前後に十分長く延長  
 することにより,  $C^\infty$  の周期関数にして) Fourier 展開で  
 表わすとき, 展開係数は番号のどんな代数的 order よりも速く  
 収束させることができる。



例 2. 边上で速度一定, 壁に平行 (流量=0) (Taylor)

(iv)'  $\psi_B = (\alpha \sin \alpha \cos \theta - \theta \sin \theta \cos \alpha) e^P \quad \text{対岸}$

$\psi_A = (\alpha \cos \alpha \sin \theta - \theta \cos \theta \sin \alpha) e^P \quad \text{反対岸}$

例 3. 边上で速度=0 (Hamel)

(iii)'  $\psi = \sin 2\theta - \theta \cos 2\alpha,$

( $\tan 2\alpha = 2\alpha$   $\alpha \neq 0$  とき 流量=0 とした)

次に  $\psi$  (残差) については,

$$\Delta \Delta \psi = e^{-2P} \left[ \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + 1 \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial P} - 1 \right)^2 \right] \underbrace{\left[ \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - 1 \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial P} - 1 \right)^2 \right]}_0 \psi$$

であるから

$(T - (\frac{\partial}{\partial P} - 1)^2) \psi = 0, \quad \psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - 1)^2 & -1 \\ 0 & (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} + 1)^2 \end{bmatrix}$

変数分離  $\psi = e^{(1+i)P} \psi(\theta), \quad \psi(\theta) = \begin{bmatrix} \psi(\theta) \\ \varphi(\theta) \end{bmatrix} \quad \partial(T) = \{ \psi; \psi = \psi = 0 (\theta = \pm \alpha) \}$

とおくと,  $\psi(\theta) = \psi'(\theta) = 0 \quad (\theta = \pm \alpha) \quad \psi, \varphi \in C^2[\alpha, \alpha]$

$$\left\{ T - \left( \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right)^2 \right\} \Psi = e^{(\lambda+1)\rho} (T - \lambda^2 I) \Psi(\theta)$$

後で示すように  $\alpha$  が特別の角以外では次の完備性がわかる。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_n(\theta) &= \begin{bmatrix} \psi_n(\theta) \\ \varphi_n(\theta) \end{bmatrix}, \lambda_n^2; (T - \lambda_n^2 I) \Psi_n(\theta) = 0, \lambda_n^2: \text{複素数}, \operatorname{Re} \lambda_n > 0, |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \\ \psi_n = \varphi_n' &= 0 \quad (\theta = \pm \alpha), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\}$$

が  $L(-\alpha, \alpha)$  で完備系である。つまり、 $L(-\alpha, \alpha)$  で稠密な

集合  $\chi$  があり、 $\chi$  の任意の関数  $\Psi(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n(\theta)$

(ここに  $c_n$  は  $\{\Psi(\theta), \lambda_n^2\}_{n=1,2,\dots}$  を Moffatt の関数系と略す)

( $\chi$  とし、例えば  $\text{Space} \left\{ f_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda_n \theta} \cos \frac{\pi \theta}{2\alpha}, g_n(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda_n \theta}, \lambda_n = \frac{n\pi}{2\alpha} \right\}$

でよい。  $\lambda_n = \frac{n\pi}{2\alpha} \notin \{ \lambda_k, \lambda_k \pm 1; (\lambda_k \sin 2\alpha = \pm \sin 2\alpha \lambda_k, \lambda_k \neq 0, \pm 1) \}$  はよ。  $k=1,2,\dots$ )

したがって常に  $\Psi(\rho, \theta)$  は

$$\Psi = e^\rho \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\lambda_n \rho} + b_n e^{-\lambda_n \rho}) \Psi_n(\theta) \quad (\star)$$

と展開される。なぜなら、完備性から

$$\rho = \rho_1 \text{ の } \Psi(\rho, \rho_1) = e^{\rho_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(\theta)$$

$$\rho = \rho_2 \text{ の } \Psi(\rho, \rho_2) = e^{\rho_2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \Psi_n(\theta) \quad \leftarrow \operatorname{Re} \lambda_n > 0$$

と展開されるが、 $|e^{2\lambda_n \rho_1}| / |e^{2\lambda_n \rho_2}| = e^{2\operatorname{Re}(\lambda_n)(\rho_1 - \rho_2)} \neq 1$  なる

$$a_n = (c_n e^{\lambda_n \rho_1} - d_n e^{\lambda_n \rho_2}) / (e^{2\lambda_n \rho_1} - e^{2\lambda_n \rho_2})$$

$$b_n = (c_n e^{-\lambda_n \rho_1} - d_n e^{-\lambda_n \rho_2}) / (e^{-2\lambda_n \rho_1} - e^{-2\lambda_n \rho_2})$$

と解くことができるからである。

特に原点を含むとき  $\rho_1 \rightarrow -\infty$  で速度有界  $\Rightarrow b_n = 0$   $\Psi = e^\rho \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\lambda_n(\rho - \rho_2)} \Psi_n(\theta)$

$\infty$  点  $\rho_2 \rightarrow +\infty$  で速度有界  $\Rightarrow a_n = 0$ ,  $\Psi = e^\rho \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n(\rho - \rho_1)} \Psi_n(\theta)$

この展開  $(\star)$  の内点での収束の速さ。

$$e^{-\delta} = \min\left(\frac{r}{r_2}, \frac{r_1}{r}\right) \quad \text{即ち} \quad \rho_0 + \delta \leq \rho \leq \rho_0 - \delta$$

$$|c_n|, |d_n| < R_0 n^k \quad (\varepsilon - \varepsilon_0)^{k-1} \text{ の特異性以下}, 1$$

$$\text{よらば, } e^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n e^{\lambda_n \rho} + b_n e^{-\lambda_n \rho}) \psi(\theta) = e^{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\rho) \psi(\theta)$$

$$\text{の } |A_n| \leq R \cdot n^k |e^{-\lambda_n \delta}| = R \cdot e^{-\operatorname{Re} \lambda_n \delta} \cdot n^k$$

$$\lambda_{2n} = \overline{\lambda_{2n-1}} \quad (\text{複素共役})$$

$$\frac{\sin 2\alpha \lambda_{2n}}{2\alpha \lambda_{2n}} = (-1)^n \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \Rightarrow \operatorname{Re}(2\alpha \lambda_{2n}) \approx (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n \rightarrow \infty)$$

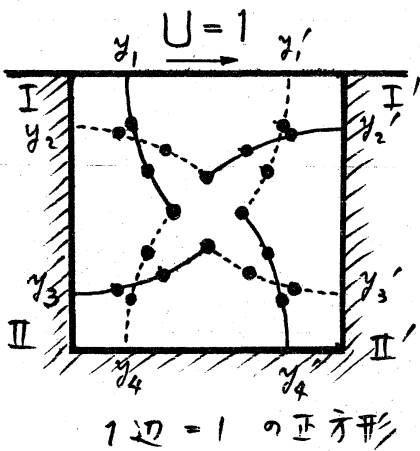
$$\operatorname{Re} \lambda_n \sim \frac{(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})\pi}{2\alpha} \sim \frac{n\pi}{2\alpha} \quad \text{よから, 収束の速さは}$$

$$|A_n| \sim R \cdot n^k e^{-\frac{n\pi\delta}{2\alpha}} = R n^k \varepsilon^n, \quad \varepsilon = \left[ \min\left(\frac{r}{r_2}, \frac{r_1}{r}\right) \right]^{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

と与えられる。これを以後よく使う。

### §5 数値実験

例1 よく使われる例題として、正方形(一辺の長さ1)の容器の三辺は固定、一辺は一定の速さで動いている問題を考える。動く辺の両端では  $\psi^B$  として、例2を使えばよい。領域の分解は 4隅から半径  $R_n = \frac{1}{2} / \sin \frac{n\pi}{2(2n+1)}$  以内の領域



をとって夫々要素 I, II, I', II' とする。実際には各要素での残存角を  $2 \cdot 2n$  個の Moffatt 角の一次結合で代用するので、要素の縁(弧)上等間隔に  $2n$  個の代表点をとる。 $R_n$  以上のようにとると、中央の4

点は2重点になる。各要素での代表点を左右の2つの組に分け、組の番号を  $j = 1, 2, 3, 4, 1', \dots, 4'$  等の土での南数値: 流れの南数  $\psi_{ij}$ , 渦度  $\omega_{ij}$  などをもとめて  $y_j = (\psi_{1j}, \psi_{2j}, \dots, \omega_{1j}, \dots, \omega_{mj})$ ;  $j = 1 \sim 4, 1' \sim 4'$  とする。すると,

要素 I に関する基本操作は  $(y_1, y_3)$  と  $(y_1, y_2)$  で決める。

〃 II 〃

$(y_2, y_4')$  と  $(y_3, y_4)$  〃

〃 I'

$(y_1, y_3')$   $\rightarrow$   $(y_1, y_2')$

〃 II'

$(y_2', y_4)$   $\rightarrow$   $(y_3', y_4')$

であるが、問題の対称性を考えると、まとめて、

はじめ、 $(y_1, y_3, y_4)$  を仮定する。

$\rightarrow$  対称性により  $y_1$  を  $y_1'$  と見なす。

要素 I に関して  $(y_1', y_3)$  から  $(y_1, y_2)$  を定める。

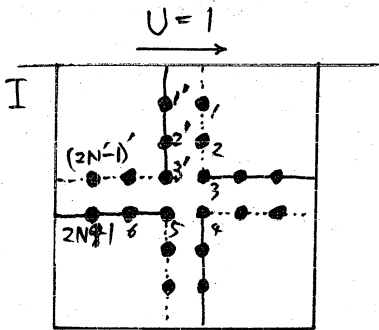
対称性により  $y_4$  を  $y_4'$  と見なす

要素 II に関して  $(y_2, y_4')$  から  $(y_3, y_4)$  を定める

以後これを繰り返すと 加速なしの Schwartz の反復法に

なる。要素 I と II における操作は、形が同じであるから同じである。ただその対象が異なるにすぎない。各要素での展開の収束の速さは  $\varepsilon = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}} = R_n^{\left(\frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2}}\right)} = \frac{1}{\left[2 \cos\left(\frac{\pi}{4} / \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right)\right]^2} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 反復法の収束の速さは  $\propto n$ , 取扱う南数の数  $\propto n$  だから、手数  $\propto n^2$  (加速なし)。また各要素における  $(y_1, y_3) \rightarrow (y_1, y_2) = A(y_1, y_3)$  の行列は、対称性から  $\begin{bmatrix} | & | & 0 \\ | & | & | \\ 0 & | & | \end{bmatrix}$  の形。

例2 同じ問題を要素のとり方を少し変えて、正方形



にとり、左図のよにする。

・代表点は、タテ、ヨコ  $2N+1$  等分の格子点上にのっている。

・各層の操作は、例えば要素 I では点  $1 \sim 2N+1$  上の回数値から

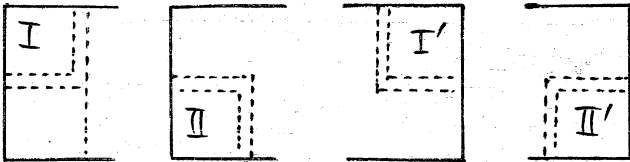
点  $1' \sim (2N-1)'$  上の回数値をきめるこ

とである。級数の収束の速さは  $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$  は例1と同じで、

切替回数番号  $n =$  点の枚  $\times 2$  (実層)  $\times 2$  ( $\psi$  と  $\omega$ )  $= 8(N+2)+4$   $\varepsilon^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8(N+2)+4}$

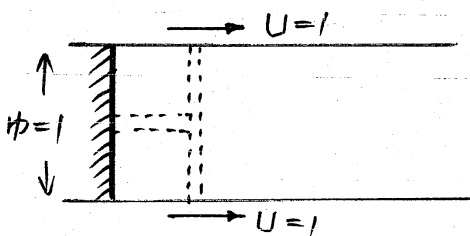
実行するのは  $N = 4, 5, \dots, 16$   $\varepsilon^N = (4^{35} \cdot 10)^{-1} = 10^{-21}$

手順



対称性から  $I'$  を  $I$ ,  $II'$  を  $II$  に帰着、与えは例1と同じ。

例3. (無限領域) ピストンの運動に伴う流れ



扇形領域の  $\angle$  ( $\infty$  領域) は開き

角:  $\alpha = 0$  で  $\frac{|p_1 - p_l|}{2\alpha} \approx \frac{1}{2}$

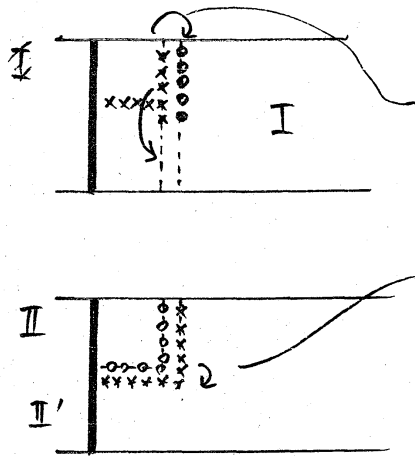
従って  $\varepsilon = e^{-\frac{|p_1 - p_l|}{2\alpha} \pi} = e^{-\frac{\pi}{4}}$

$\approx 10^{-0.22311} \dots < \frac{1}{2}$

従ってこの部分については直角部分の2倍以上速く収束する。



手順

はじめ  $\times$ 印の点での値を 0 に仮定

→ 反対側に下半分に延長

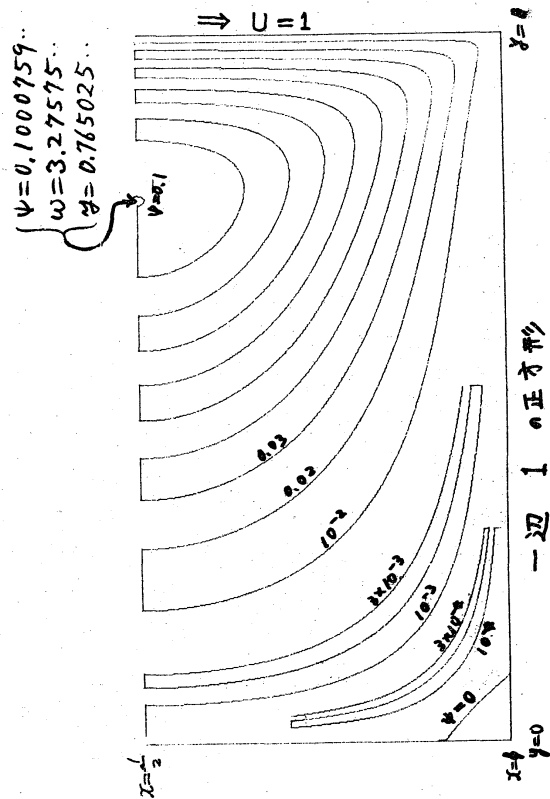
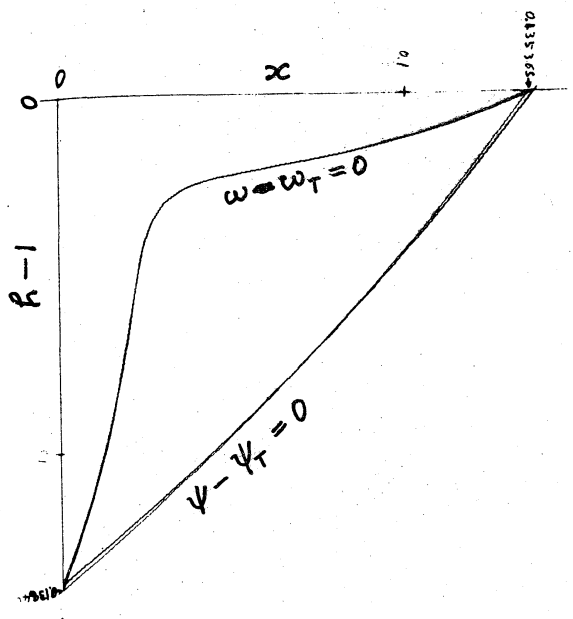
領域 I ( $\infty$ 領域) を解いて  
 $0 \leq p \leq 2\pi$  の値を決める

反対側に延長

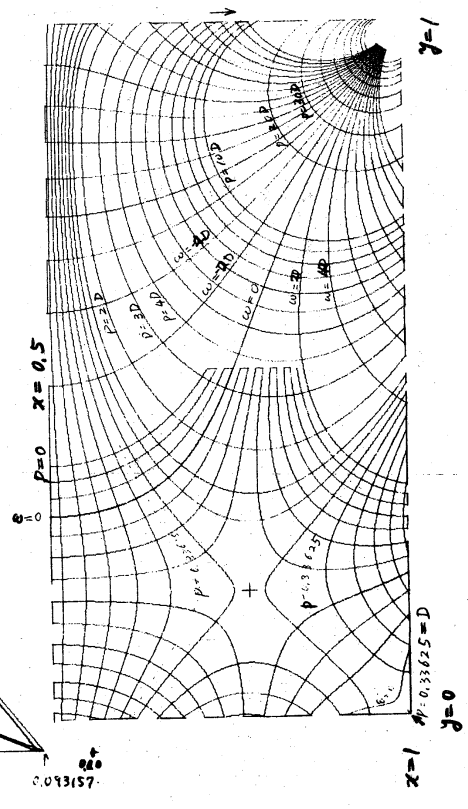
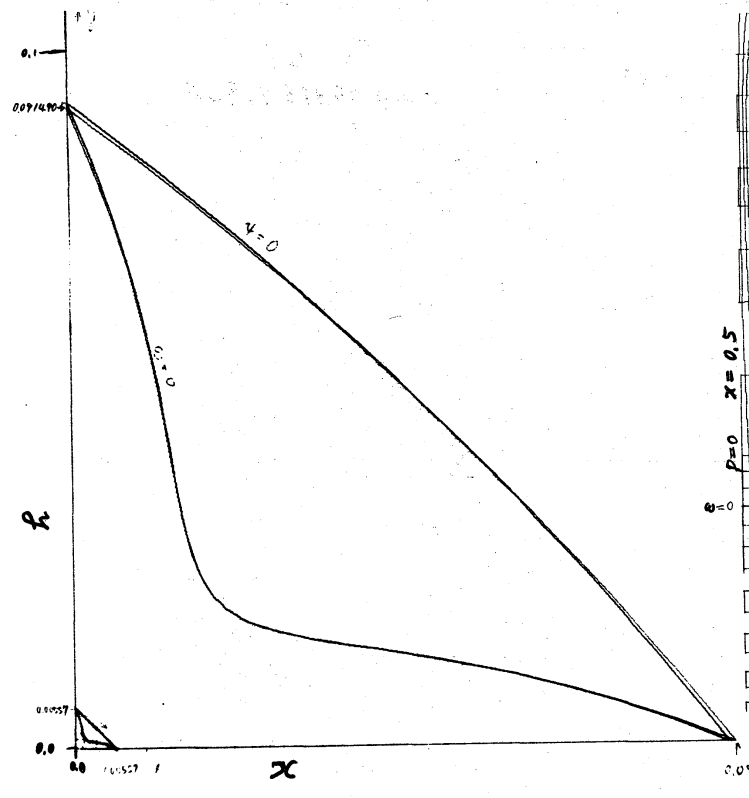
領域 II について解いて  
 $0 \leq p \leq 2\pi$  の値を決めるII' は対称性により不要で  
ここに戻り、 $\rightarrow$  反復する。

例 2 における結果と例 2 と例 3 の代き点の対称性に対する誤差の減少していく様子とを次頁にあげておく。計算時間は FACOM 270-30 で  $N=16$  のときで 10 分位であった。(この機械は HITAC 5020E の約 10 分の 1 の速さで 2 重精度の計算を行う。)

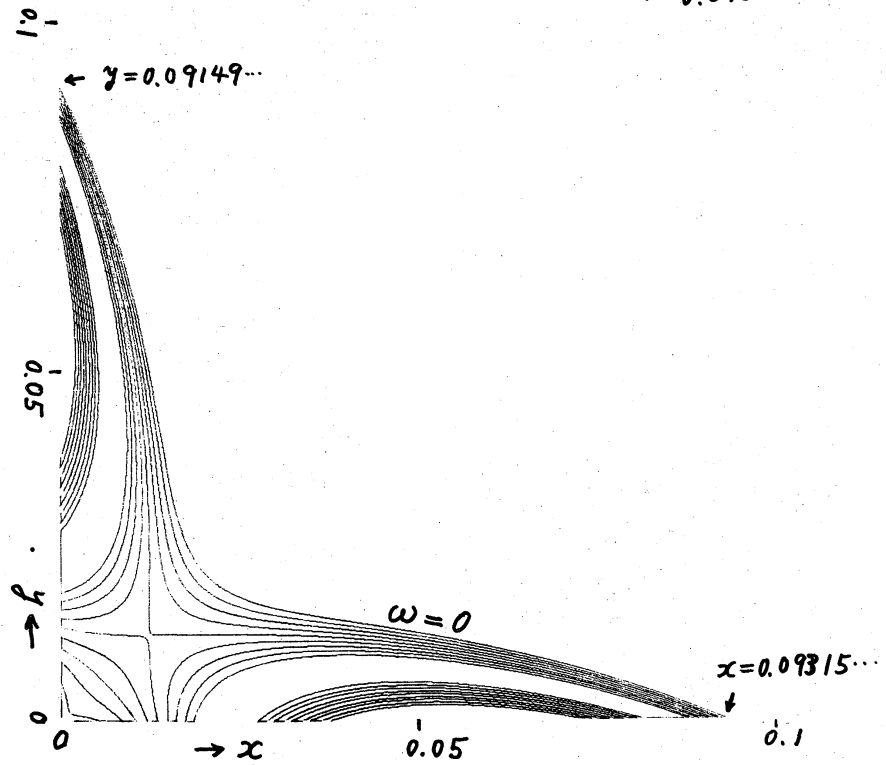
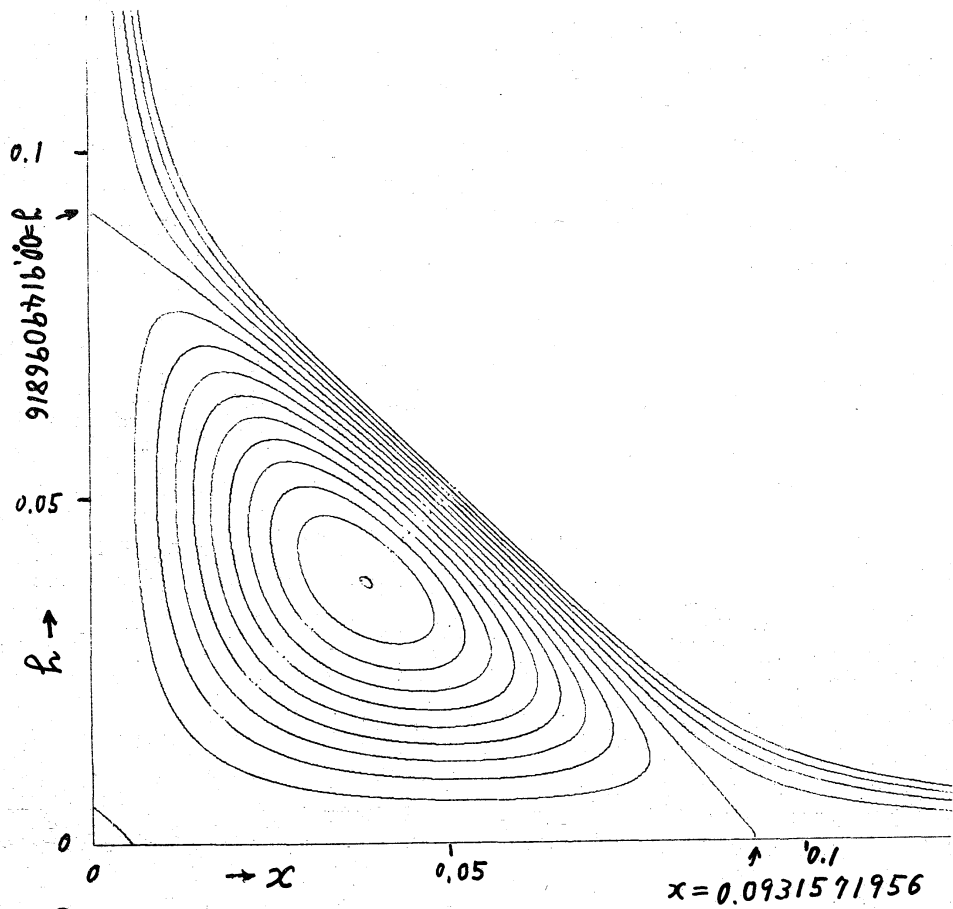
展開係数の誤差のグラフにおいて、 $n \geq 12$  で乱れの出るのは、反復終りの条件が甘かったことと、計算機の表現の桁数の不足とから来ているものと思われる。また系列 C のものは、 $\bullet$  行きがかり上、原点を  $x = \frac{1}{2}$  のところにとってしまったので、非常によいふうに見える(他とくらべて)が、実際に関数値の計算されるのが  $x = \frac{1}{2}$  近くである



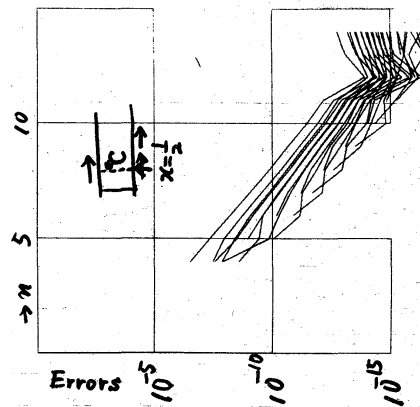
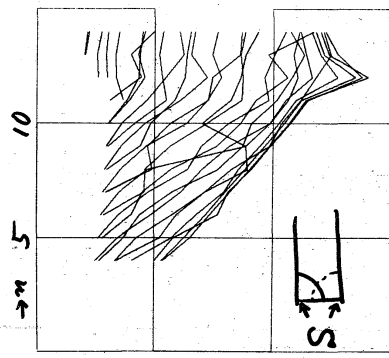
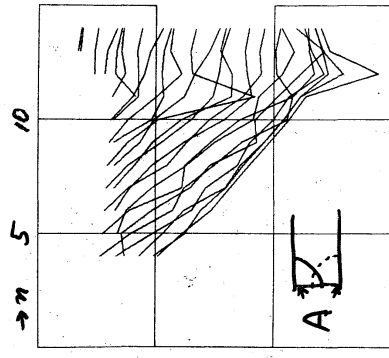
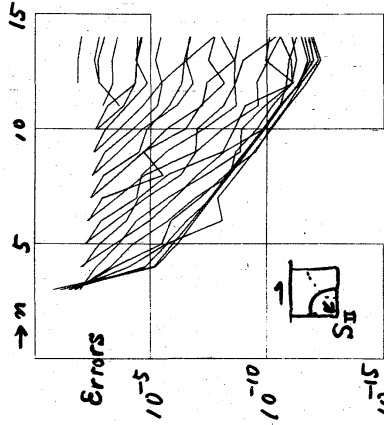
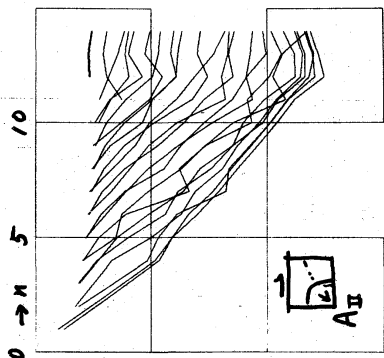
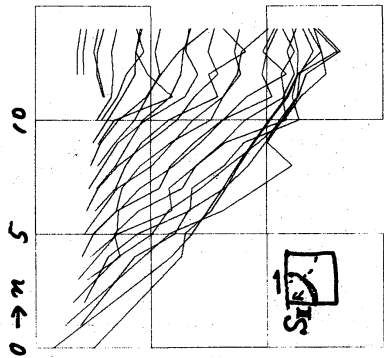
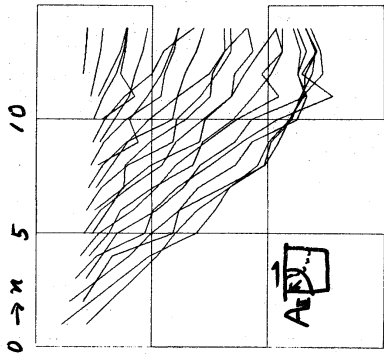
一边 1 的正方形



psi = 0.33825=D



nは本文の N



- 。 上は例2
- 。 下は例3
- 。 における展開係数  
の決差 Errors と  
展開項数  $m$  の実際  
。 各折線の左端は  
係数 = 0 即ち真の  
展開係数 = error  
を示している。

から、これはむしろ適切な値への奇点に対する実際の誤差を示しているわけで、この方法の有効性が現われているといえる。

§6 Moffatt 関数系の完備性

これは、例の“漏列”が一般に必ず現われるべきことの証明にもなっているので、一応やっておく必要があると思われる。

- (i)  $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - T)^{-1}$  において, Resolvent という。
- (ii)  $R(\lambda^2)$  は  $\lambda^2$  の有界線形作用素を値とする 1 価解析関数
- (iii) その特異点 (Spectrum) は  $\infty$  点と極  $\lambda_i^2, i=1, 2, \dots$  だけ  
(の集合)  
 $\lambda_i$  は  $\lambda \sin 2\alpha \pm e^{i\alpha} \sin 2\alpha \lambda$  の根で  $0, \pm 1$  と異なるもの

(i), (ii) から  $T$  の spectral set  $\sigma$  (今は  $\{\infty$  又は  $\lambda_i\}$  の任意の部分集合) だけを正の向きにまわる路  $\gamma$  の積分:

$$P(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} R(\lambda^2) d\lambda^2$$

は Projection である。  $P(\sigma)^2 = P(\sigma)$ ,

$$P(\emptyset) = 0, P(\sigma)P(\tau) = P(\sigma \cap \tau).$$

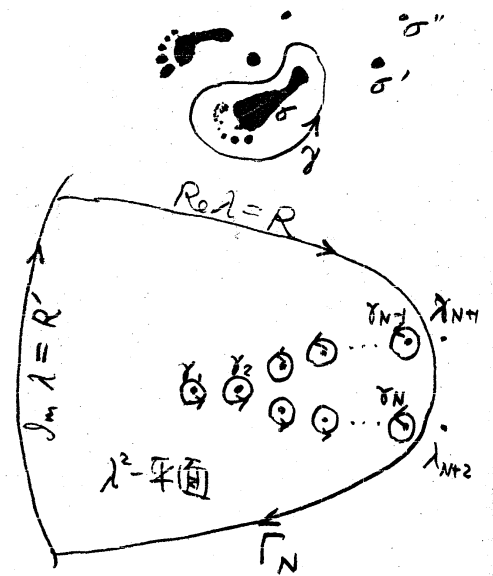
(ii) から Cauchy の積分公式により

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} R(\lambda^2) d\lambda^2 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} R(\lambda^2) d\lambda^2 = 0$$

$$\text{即ち } \sum_{n=1}^N P(\{\lambda_n^2\}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} R(\lambda^2) d\lambda^2$$

よって  $x = f_n, g_n \rightarrow x$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} R(\lambda^2) d\lambda^2 \rightarrow x, (N \rightarrow \infty) \text{ を示せばよい}$$



$R(\lambda^2)$  を実際に作す。  $f = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = R(\lambda^2) f = (\lambda^2 I - T)^{-1} f$

とすると,

$$\psi = \Psi(\theta, \lambda^2) - \psi_1(\theta, \lambda) - \psi_1(\theta, -\lambda), \quad \psi_1 = a(\lambda) \cos(\lambda \theta) + b(\lambda) \sin(\lambda \theta)$$

$$\varphi = \Phi(\theta, \lambda^2) - \varphi_1(\theta, \lambda) - \varphi_1(\theta, -\lambda), \quad \varphi_1 = 2(1-\lambda) \{a(\lambda) + b(\lambda)\} e^{-i(1-\lambda)\theta}$$

$$\Psi(\theta, \lambda^2) = \frac{1}{4} \int_0^\theta \left\{ \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda(1+\lambda)} - \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda(1-\lambda)} \right\} g(\theta-t) dt + \int_0^\theta \frac{\sin \lambda t}{\lambda} e^{i t \theta} f(\theta-t) dt$$

$$\Phi(\theta, \lambda^2) = \int_0^\theta \frac{\sin \lambda t}{\lambda} e^{-i t \theta} g(\theta-t) dt$$

$$a(\lambda) = \frac{(1+\lambda) \sin(\lambda \alpha) \alpha \Psi_S(\alpha, \lambda^2) + \cos(\lambda \alpha) \alpha \Psi_S'(\alpha, \lambda^2)}{\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \lambda}$$

$$b(\lambda) = \frac{(1+\lambda) \cos(\lambda \alpha) \alpha \Psi_A(\alpha, \lambda^2) - \sin(\lambda \alpha) \alpha \Psi_A'(\alpha, \lambda^2)}{\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\alpha \lambda}$$

$$\Psi_S = \frac{1}{2} (\Psi(\theta, \lambda^2) + \Psi(-\theta, \lambda^2)), \quad \Psi_A = \frac{1}{2} (\Psi(\theta, \lambda^2) - \Psi(-\theta, \lambda^2))$$

$$\Psi_S' = \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_S, \quad \Psi_A' = \frac{\partial}{\partial \theta} \Psi_A$$

$\Psi, \Phi$  と  $\lambda \rightarrow -\lambda$  で不変な全平面に正則な  $\lambda^2$  の整函数

として  $g_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i n \theta}$  の実部:  $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \nu \theta \end{bmatrix}$  により  $\begin{bmatrix} \psi \\ \varphi \end{bmatrix} = R(\lambda^2) x$

$\left( \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} R(\lambda^2) d\lambda^2 x \right)$  の非2成分  $= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \varphi(\lambda^2) d\lambda^2$  の計算を311と2

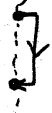
示す。  $\frac{1}{2\pi i} \oint \varphi(\theta, \lambda^2) d\lambda^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint [\Phi(\theta, \lambda^2) - \varphi_1(\lambda) - \varphi_1(-\lambda)] d\lambda^2$

$\oint_{\Gamma_N} \Phi(\theta, \lambda^2)$  は  $\lambda$  の内 (  $\infty$  点以外に正則 )  $\Rightarrow$  非1項 = 0

非2項は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint (\varphi_1(\lambda) + \varphi_1(-\lambda)) d\lambda^2 = \frac{1}{\pi i} \int (\varphi_1(\lambda) + \varphi_1(-\lambda)) \lambda d\lambda = \frac{1}{\pi i} \int \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda + \frac{1}{\pi i} \int \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda$$

$$\oint = \frac{1}{\pi i} \oint \varphi_1(\lambda) \lambda d\lambda$$



$$\Psi(\theta, \lambda^2) = \frac{\cos(\lambda+1)\theta}{4\lambda((\lambda+1)^2-\nu^2)} - \frac{\cos(\lambda-1)\theta}{4\lambda((\lambda-1)^2-\nu^2)} - \frac{\cos\nu\theta}{((\lambda+1)^2-\nu^2)((\lambda-1)^2-\nu^2)}$$

$$\Psi_A(\theta, \lambda^2) = \text{odd part of } \Psi(\theta, \lambda^2) = 0$$

$$\Psi_S(\theta, \lambda^2) = \text{even " " " } = \Psi(\theta, \lambda^2)$$

$$\Psi'_S(\theta, \lambda^2) = \frac{-(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta}{4\lambda((\lambda+1)^2-\nu^2)} + \frac{(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta}{4\lambda((\lambda-1)^2-\nu^2)} + \frac{\nu \sin\nu\theta}{((\lambda+1)^2-\nu^2)((\lambda-1)^2-\nu^2)}$$

$$\beta(\lambda) = 0 \quad \therefore \Psi_A \equiv \Psi'_A \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha(\cos(\lambda+1)\alpha) + \cos(\lambda+1)\alpha(-(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha)}{4\lambda((\lambda+1)^2-\nu^2)(\lambda\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\lambda)} \stackrel{-1}{=} 0 \\ &+ \frac{(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha(-\cos(\lambda-1)\alpha) + \cos(\lambda+1)\alpha(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\alpha}{4\lambda((\lambda-1)^2-\nu^2)(\lambda\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\lambda)} \stackrel{-1}{=} 0 \\ &+ \frac{(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\alpha(-\cos\nu\alpha) + \cos(\lambda+1)\alpha(\nu\sin\nu\alpha)}{((\lambda+1)^2-\nu^2)((\lambda-1)^2-\nu^2)(\lambda\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\lambda)} = O\left(\frac{e^{-\alpha|\text{Im}\lambda|}}{\lambda^3}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi i} \oint \lambda \varphi_i(\lambda) d\lambda = 0 + \frac{1}{\pi i} \oint \frac{2\lambda(\lambda-1)e^{i(\lambda-1)\theta}}{4\lambda((\lambda-1)^2-\nu^2)} d\lambda + \oint 0 \left( \frac{e^{(|\theta|-\alpha)|\text{Im}\lambda|}}{\lambda} \right) d\lambda$$

→  $-\cos\nu\theta$

Q.E.D.

→  $-\cos\nu\theta$       +  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right), (|\theta| \neq \alpha)$

$|\theta| = \alpha$  の場合、他の成分についての計算は略すが、必要に応じてはこの例をつくされている。

固有値が縮退するとき（重複の場合）

i)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  または  $\pi$     {固有値は} は完備系

$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}, \pi$  のとき  $\lambda_{2n} \rightarrow \lambda_{2n+1}$  だが  $\Psi_{2n}, \Psi_{2n+1}$  は

奇偶対称性が反対であるから  $T$  の index = 1 のまま。

ii)  $\alpha = \alpha_n$  ( $\frac{\pm 2\alpha_n}{2\alpha_n} = \pm \frac{\alpha_n}{\alpha_n} = \pm 1$ ,  $\tan 2\alpha_n = 2\alpha_n$ ) ( $2\alpha_n \div (n+\frac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ )  
一つだけ固有値が重複するものが必要。

§4 になると本講義録の今井先生の §3, §6 は Dunford Schwarz Lin. Op.-I Spectral Theory の章を参照して下さい