

冷たい非衝突プラズマ中を外部磁場と  
平行に伝わる弱い非線形磁気流体波

京大 数理研 川原琢治

§ 1. 序

非衝突プラズマ中を一樣な外部磁場に対して一定の傾きをもって伝播する一次元の弱い非線形磁気流体波のふるまいは、簡単な単一の非線形方程式 (磁気音波は Korteweg-de Vries 方程式<sup>1)</sup>, Alfvén 波は modified Korteweg-de Vries 方程式<sup>2)</sup>) によって記述される。ところが、これらの方程式は波の伝播方向が一樣な外部磁場の方向に一致する (平行伝播) とき成立しなくなる。

ここでは、非線形摂動法<sup>3)</sup> を用いて平行伝播の場合の弱い非線形磁気流体波を記述する単一方程式を導き、その解の性質について検討する。

§ 2. 基礎方程式と線形分散関係

準中性の冷たい非衝突プラズマを考える。電子とイ

オンに対する2流体モデルの方程式系で、電場と電子速度を  
 消去した磁気イオン流体力学方程式<sup>4)</sup>を基礎式にとる。

カーテシアン座標系 $(x, y, z)$ をとり、 $x$ 軸方向に伝播する  
 平面波を考えると、すべての量が $(x, t)$ の関数となる  
 ような1次元問題を扱う。適当な代表量によって無次元  
 化した方程式は次のように与えられる。

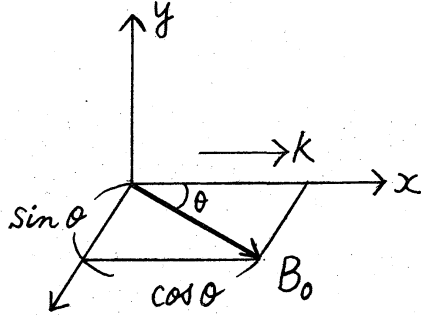
$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ A^2 \frac{du}{dt} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} B B^* \right) &= 0, \\ A^2 \frac{dV}{dt} - B_x \rho \frac{\partial B}{\partial x} - i \gamma A \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{\partial B}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{dB}{dt} + B \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial V}{\partial x} + i \gamma^{-1} A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dV}{dt} \right) &= 0, \\ \left( \begin{aligned} \frac{d}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, & B &\equiv B_y + i B_z, \\ V &\equiv v + i w, & i &\equiv \sqrt{-1} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、 $\rho \equiv 1/n$  : 粒子密度の逆数,  $(u, v, w)$  :  
 イオン流体の速度の $(x, y, z)$ 成分,  $B_y, B_z$  : 外部磁場  
 に垂直な磁場成分,  $A$  : Alfvén-Mach数,  $\gamma^2 \equiv m/M$  :  
 電子質量( $m$ )とイオン質量( $M$ )の比, \*は複素共役,

また  $B_x$  は1次元問題では一定である。

方程式系(1)に対する線形分散関係を求める。外部磁場および波の伝播方向は図のようにとる。

すなわち、外部磁場は  $x-z$  面内にあり、波の伝播方向  $x$  軸と角  $\theta$  をなすとする。(ここでは、 $\theta = 0$  の場合に注目しているのであるが、比較のためにしばらく一般の  $\theta$  で考えておくことにする。)



系の静止状態 ( $\rho = 1, u = 0, v = 0, B = i \sin \theta$ ) に小さいが有限の摂動が入ったとし、摂動量に  $\sim$  をつけて

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 1 + \tilde{\rho}, \\ u &= \tilde{u}, \\ v &= \tilde{v}, \\ B &= i \sin \theta + \tilde{B}, \end{aligned} \right\} (2)$$

とおく。(2)を(1)に代入し、摂動量が小さいとして、その線形項を左辺にとり出すと、

$$\left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = (\text{非線形項}), \right\}$$

$$\begin{aligned}
 A^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{i}{2} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{B}^* - \tilde{B}) &= (\text{非線形項}), \\
 A^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \cos \theta \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} - i \gamma A \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial t \partial x} &= ( \quad ), \\
 \frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} + i \sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + i \gamma^{-1} A \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t \partial x} &= ( \quad ),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

あるいは,

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\cos^2 \theta}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{i(\gamma^{-1} - \gamma)}{A} \cos \theta \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2} \right\} \tilde{B} \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\tilde{B}^* - \tilde{B}) = (\text{非線形項}) \tag{3'}
 \end{aligned}$$

となる。以下では、 $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{B}^*$  を再び  $u$ ,  $v$ ,  $B$ ,  $B^*$  と表わすことにする。

(3)式において、 $\theta \neq 0$  ( $\sin \theta \neq 0$ ) のとき磁場  $B$  と  $x$  方向の速度成分  $u$  とが線形関係をもつことに注意したい。  
 $\theta = 0$  ( $\sin \theta = 0$ ) のときには、 $(u, \rho)$  と  $(v, B)$  とは線形関係をもたない。

正弦波を仮定し、(3)式から線形分散関係を導くと、

$$\begin{aligned}
 (1+k^2)^2 V_p^4 - \frac{1}{A^2} [1 + \cos^2 \theta + \{\gamma^2 + \gamma^{-2}\} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] k^2 V_p^2 \\
 + \frac{\cos^2 \theta}{A^2} = 0, \tag{4}
 \end{aligned}$$

を得る。ここに、 $k$ は無次元の波数、 $v_p$ は無次元位相速度を表わす。

線形分散関係(4)は2種の波(磁気音波とAlfvén波)を与える。波長が十分長い( $k$ が十分小さい)という近似のもとで、分散関係は $k^2$ の展開形として、

$$\left. \begin{aligned} v_p &= \frac{1}{A} + \frac{1}{2A} \{ (\gamma^{-1} - \gamma)^2 \cot^2 \theta - 1 \} k^2 + \dots, \\ &\quad \text{(磁気音波)} \\ v_p &= \frac{\cos \theta}{A} - \frac{\cos \theta}{2A} \{ (\gamma^{-1} - \gamma)^2 \cot^2 \theta + 1 \} k^2 + \dots, \\ &\quad \text{(Alfvén波)} \end{aligned} \right\} (5)$$

のように表わせる。分散性の影響は、 $\theta \neq 0$ の場合 $k^2$ から現われる。 $\theta \neq 0$ の場合、弱い分散性( $k$ が小)を仮定したとき、それと弱い非線形性とが釣り合うという近似のもとで、磁気音波はKorteweg-de Vries方程式( $f_t + ff_x + \mu_1 f_{xxx} = 0$ )によって、Alfvén波はmodified Korteweg-de Vries方程式( $f_t + f^2 f_x + \mu_2 f_{xxx} = 0$ )によって記述できることが示されている。ただし、 $\mu_1, \mu_2$ はそれぞれ(5)式の $k^2$ の係数に対応している。

一方、平行伝播( $\theta = 0$ )の場合には、 $\cos \theta = 1$ であるから、(5)から明らかのように、磁気音波とAlfvén波の位相速度は長波長の極限( $k \rightarrow 0$ )で一致し、上述のKorteweg

- de Vries 方程式, modified Korteweg-de Vries 方程式  
は成立しなくなる。

$\theta = 0$  の場合の分散関係は,  $K$  が小さいとき

$$V_p = \frac{1}{A} \pm \frac{\gamma^{-1} - \gamma}{2A} K + \dots, \quad (6)$$

で与えられ, 分散効果は(5)とは異なり,  $K$  に比例する項  
から現われる。我々は以下では分散性が(6)のような形で  
表わされる場合に注目する。

### §3. スケール変換

長波長( $K$ 小)の波を考え, 非線形性が弱く, 位相速度  
が  $V_0 = 1/A$  から  $K$  の程度ずれる弱い分散性をつり合うよう  
な波をとりだすスケール変換を求めよう。そのために, 次  
のような stretch された座標  $\xi, \tau$  を導入する

$$\xi = \mu^\alpha (x - V_0 t), \quad \tau = \mu^\beta t, \quad (\beta > \alpha) \quad (7)$$

ただし,  $\mu$  は分散の弱さを表わすパラメータとする。

(7) より,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mu^\beta \frac{\partial}{\partial \tau} - \mu^\alpha V_0 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \mu^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (8)$$

(8) 式を(3')式に代入し, 非線形項のオーダーが  $\varepsilon$  である

とすると

$$\left\{ \mu^{2\beta-2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \underbrace{2\mu^{\beta-\alpha} V_0}_{\text{~~~~~}} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} + \underbrace{\left( V_0^2 - \frac{1}{A^2} \right)}_{\text{~~~~~}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right. \\ \left. + \frac{i(\gamma^{-1} - \gamma)}{A} \left( \mu^{\beta} \frac{\partial^3}{\partial \tau \partial \xi^2} - \underbrace{\mu^{\alpha} V_0}_{\text{~~~~~}} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right) - \left( \mu^{2\beta} \frac{\partial^4}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\mu^{\alpha+\beta} V_0 \frac{\partial^4}{\partial \tau \partial \xi^3} + \mu^{2\alpha} V_0^2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right) \right\} B = \mathcal{E}(\text{非線形項}), \quad (9)$$

を得る。(9)式で、 $\mu$ 、 $\mathcal{E}$ に関して低次の項をとり出す。  
 $V_0^2 = 1/A^2$ の場合を考えているので、低次の項は(9)式で  
 ~~~~~ をつけた項およびそれらとつり合う非線形項となる。  
 すなわち

$$\left\{ -2\mu^{\beta-\alpha} V_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{i(\gamma^{-1} - \gamma)}{A} \mu^{\alpha} V_0 \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \right\} B \\ = \mathcal{E} \left\{ V_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (uB) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( u \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \right\}, \quad (10)$$

となる。 $\theta = 0$ の場合には、すでに(3)で示したように、  
 $(\rho, u)$ と $(V, B)$ とは線形関係をもたず、 $u \sim B^2$ である  
 ことが、例えは(1)の第2式からわかる。このとき(10)式  
 の各項がつり合うためには、 $\mu^{\beta-\alpha} \sim \mu^{\alpha} \sim \mathcal{E}$ であればよ  
 いことがわかる。

(したがって、スケール変換として

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon(x - v_0 t), \\ \tau &= \varepsilon^2 t, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を採用すればよい。

#### §4. 摂動展開

スケール変換として(11)を採用し、従属変数をさらに  $\varepsilon$  に関して次のように展開し、摂動展開を行なう。

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \dots, \\ u &= \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots, \\ V &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} (V^{(1)} + \varepsilon V^{(2)} + \dots), \\ B &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} (B^{(1)} + \varepsilon B^{(2)} + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

基礎方程式(1)に(11), (12)を用いて、 $\varepsilon$ の各べきと等置すると、 $\varepsilon$ の1次から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 v_0 V^{(1)} + B^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (V^{(1)} + v_0 B^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (v_0 \rho^{(1)} + u^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 v_0 u^{(1)} - \frac{1}{2} B^{(1)} B^{(1)*}) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



$\varepsilon$  の2次から

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 V_0 V^{(2)} + B^{(2)}) &= A^2 \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau} + A^2 u^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi} \\ &\quad - \rho^{(1)} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial \xi} + iA\gamma V_0 \frac{\partial^2 B^{(1)}}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (V^{(2)} + V_0 B^{(2)}) = \frac{\partial B^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (u^{(1)} B^{(1)}) - iA\gamma^{-1} V_0 \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \xi^2},$$

を得る。(13)式を積分して、

$$\left. \begin{aligned} A^2 V_0 V^{(1)} + B^{(1)} &= a(\tau), \\ V^{(1)} + V_0 B^{(1)} &= b(\tau), \\ V_0 \rho^{(1)} + u^{(1)} &= c(\tau), \\ A^2 V_0 u^{(1)} - \frac{1}{2} B^{(1)} B^{(1)*} &= d(\tau), \end{aligned} \right\} (15)$$

ここに、 $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $c(\tau)$ ,  $d(\tau)$  は  $\xi$  によらない  $\tau$  だけの関数であり、 $V_0^2 = 1/A^2$  を用いると  $V_0 a(\tau) = b(\tau)$  の関係がある。 $V^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$  に対する solvability condition ( $V_0^2 = 1/A^2$ ) を用いて (14) 式から  $V^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$  を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( B^{(1)} - \frac{a(\tau)}{2} \right) + \frac{1}{2A} \{ d(\tau) + AC(\tau) \} \frac{\partial B^{(1)}}{\partial \xi} \\ + \frac{1}{4A} \frac{\partial}{\partial \xi} (|B^{(1)}|^2 B^{(1)}) + \frac{i(\gamma^{-1} - \gamma)}{2A} \frac{\partial^2 B^{(1)}}{\partial \xi^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

上式の中2項は、独立変数の local な変換

$$\xi' = \xi - \frac{1}{2A} \int^\tau \{ d(\tau'') + AC(\tau'') \} d\tau'', \quad \tau' = \tau$$

によって消去できて

$$\frac{\partial B^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{1}{4A} \frac{\partial}{\partial \xi} (|B^{(1)}|^2 B^{(1)}) + \frac{i(\gamma^1 - \gamma)}{2A} \frac{\partial^2 B^{(1)}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial a(\tau)}{\partial \tau}, \quad (17)$$

となる。ただし、 $|B^{(1)}|$  は  $B^{(1)}$  の絶対値を表わす。

(17)式が、 $\theta = 0$  に対する弱い非線形分散波を記述する方程式である。(17)式の右辺は source term になっている。左辺は複素 Burgers 方程式とよく似た形をしているが、非線形項(才2項)の形、および、才3項の2階微分の係数が今の場合は分散性を示すため、純虚数になっている点は異なっている。また、その係数はちょうど分散関係(6)の分散を表わす係数と一致している。(17)式は source term を含んでいるため、一般には  $a(\tau)$  を適当に与える必要がある。しかし、以下では source term が 0 となるような場合に限って、方程式(17)の解の性質を簡単に検討することにする。

### §5. 解について

(17)式で source term が 0 となる場合

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} (|B|^2 B) + i\beta \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} = 0, \quad (18)$$

$$\left( \text{ただし, } \alpha = \frac{1}{4A}, \quad \beta = \frac{\gamma^1 - \gamma}{2A} \right)$$

を考える。(18)式の解として、一様な wave form solution および、振幅と位相が振動する定常解が可能であることが以下のように示される。

(i) uniform wave form solution.

$$B = B_0 \exp i(K\xi - \Omega\tau), \quad (19)$$

( $B_0 = \text{constant}$ )

を仮定し、(18)式に代入すると、

$$\Omega = -\frac{\gamma^{-1} - \gamma}{2A} K^2 + \frac{|B_0|^2}{4A} K, \quad (20)$$

をみたすとき、(19)は(18)式の解になっている。これは、振幅が一定で、磁場の ( $y, z$ ) 成分が回転する非線形円偏光波を表わす。

(ii) steady solution.

$B(\xi, \tau) \equiv B(\zeta)$ ,  $\zeta \equiv \xi - \lambda\tau$  の形の(18)式の解を考える。 $d/d\zeta$  を  $\cdot$  で表わすことにすると(18)式より、

$$-\lambda \dot{B} + \alpha \overline{|B|^2} B + i\beta \ddot{B} = 0. \quad (21)$$

ここで、 $B(\zeta)$  の形を次のように仮定する。

$$B(\zeta) = b(\zeta) e^{i\theta(\zeta)}, \quad (22)$$

ただし,  $b(z)$ ,  $\theta(z)$  は  $z$  の実関数とする。

(22) を (21) 式に代入すると,

$$\beta(b\ddot{\theta} + 2\dot{b}\dot{\theta}) + \lambda\dot{b} - 3\alpha b^2\dot{b} = 0, \quad (23)$$

$$\beta(\ddot{b} - b\dot{\theta}^2) - \lambda b\dot{\theta} + \alpha b^3\dot{\theta} = 0. \quad (24)$$

(23) 式に  $b$  をかけて積分すると,

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\beta b^2} \left( l - \frac{\lambda}{2} b^2 + \frac{3}{4} \alpha b^4 \right), \quad (25)$$

( $l$ : 積分定数).

$\dot{\theta}$  を (24) 式に代入し,  $\dot{b}$  をかけて積分し, 積分定数を  $S$  とおき, さらに  $b^2 = X$  とおくと,

$$\beta^2 \dot{X}^2 = -\frac{X^2}{4} (\alpha X - 2\lambda)^2 + 2\alpha l X^2 + 8SX - 4l^2, \quad (26)$$

を得る。

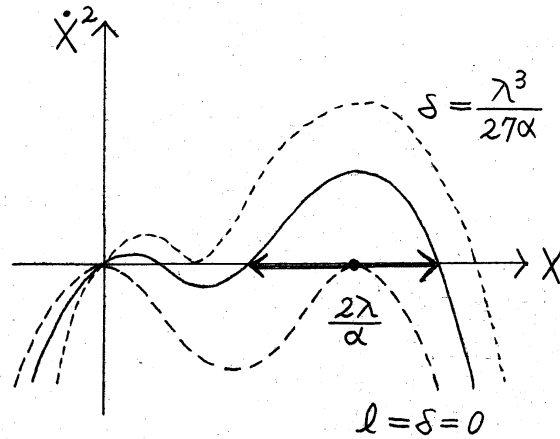
(26) の解は  $X > 0$  で, (26) 式右辺を正とする領域において可能となる。そのような領域は, 積分定数  $S$ ,  $l$  の値に依存して変化する。解の詳細は数値計算によって検討する予定であるが, ここでは大体の様子を調べるだけにする。 $l = S = 0$  の場合  $X = 2\lambda/\alpha$  ( $\lambda > 0$ ) が解であることが容易にわかる。このとき  $\dot{\theta} = \lambda/\beta$  となる。

これは, transverse な磁場成分の絶対値が一定で, そ

の位相が一定で回転する円偏光波を表わしている。

次に、 $l=0$ ,  $\delta \neq 0$  の場合には、 $(X, \dot{X}^2)$  位相図は模式的に下図のようになる。

$0 < \delta < \frac{\lambda^3}{27\alpha}$  のとき、図の  $\longleftrightarrow$  領域で振動解が可能となる。 $\delta > \frac{\lambda^3}{27\alpha}$  の場合には  $X = b^2 = 0$  となり不適当。



この解は、transverse な磁場の絶対値が振動し、さらに (25) 式より  $\theta$  が  $b^2$  の大きさにより変化するような波を表わす。さらに  $l \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$  の場合にも適当な値に対して解が可能となるが、詳しいことは数値計算を待たないとわからない。

最後に、磁場方向に伝播する定常な非線形波については、Saffman<sup>5)</sup>, Montgomery<sup>6)</sup>, Kakutani<sup>7)</sup> 等の仕事があることを付記しておく。これらは弱い非線形性という仮定なしに取り扱われている。

## 参考文献

- (1) T. Kakutani, H. Ono, T. Taniuti and C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24(1968) 1159.
- (2) T. Kakutani and H. Ono: J. Phys. Soc. Japan 26(1969) 1305.
- (3) T. Taniuti and C.C. Wei: J. Phys. Soc. Japan 24(1968) 941.
- (4) T. Kakutani, T. Kawahara and T. Taniuti: J. Phys. Soc. Japan 23(1967) 1138.
- (5) P.G. Saffman: J. Fluid Mech. 11(1961) 16.
- (6) D. Montgomery: Phys. Fluids 2(1959) 585.
- (7) T. Kakutani: J. Phys. Soc. Japan 21(1966) 385, 24(1968) 660.