

非線形方程式 $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$ に対する
初期値 - 境界値問題の数值解

京大 数研 森 正 武

§ 1 はじめに

特異性のある非線形項をもつ方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{1-u} \quad (1) \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \quad (2) \\ u(0, x) = \gamma(x) \quad (3) \end{array} \right.$$

に対する河原田の理論¹⁾を、数值解によつて具体的に調べた結果を報告する。方程式 (1) を前進型差分方程式で近似する。

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{1-u_{i,j}} \quad (4)$$

もとの方程式 (1) は非線形項 $1/(1-u)$ をもつけれども、差分方程式 (4) においては対応する非線形項 $1/(1-u_{i,j})$ はつねに既知の値であつて、(4) は $u_{i+1,j}$ について陽に解くことができる。差分法 (4) が安定であるためには

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} \quad (5)$$

が必要であることは明らかであるので、実際の数値解においては少なくともこの条件を満足するさざみ中を採用した。結果は、計算したすべての場合について安定であった。

§2 定常解の存在

関数 $f(s)$ を

$$f(s) = (1-s) \int_1^{\frac{1}{1-s}} \frac{d\xi}{\sqrt{\log \xi}} \quad (6)$$

によって定義するとき、 l が

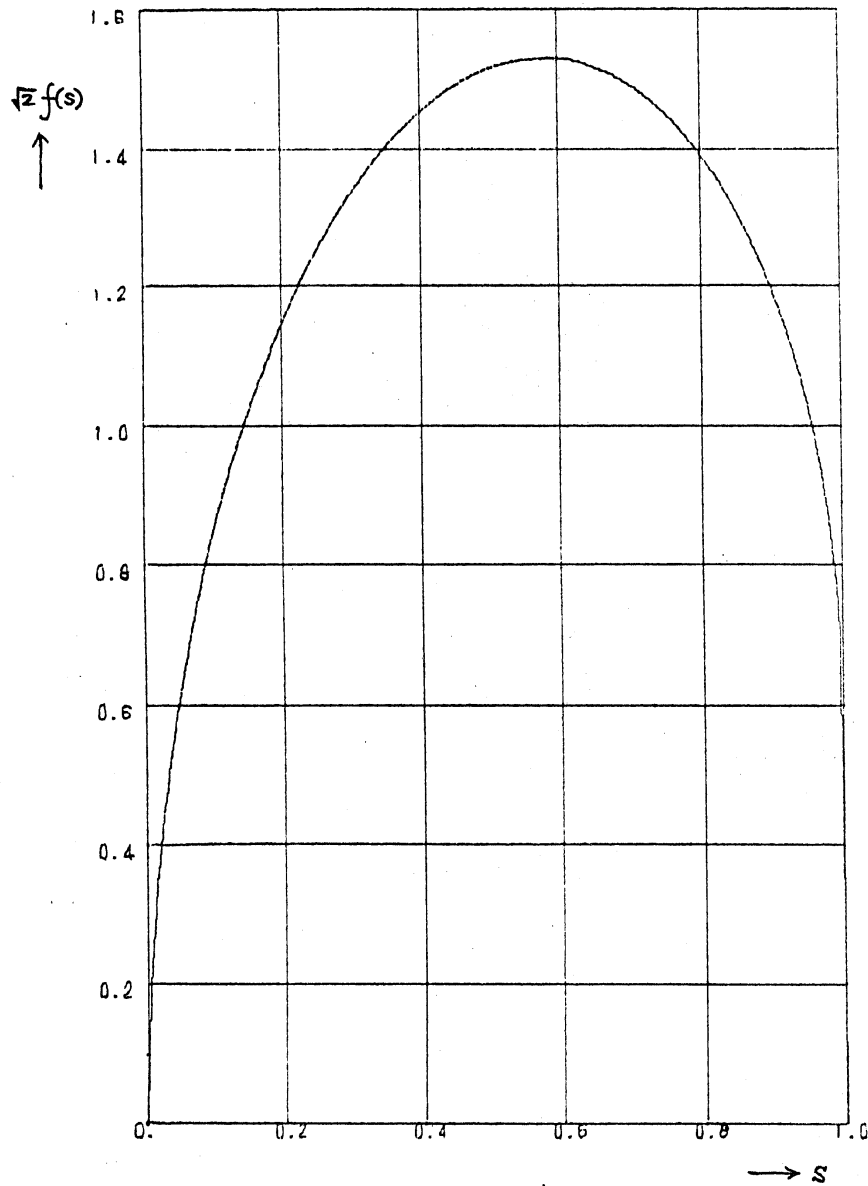
$$\frac{l}{\sqrt{2}} \leq \max f(s) \quad (7)$$

を満足するならば (1) が定常解をもつことがわかっている。才1回に $\sqrt{2} f(s)$ の関数形を図示した。(6)の積分は double exponential formula²⁾ によった。この図から $\max \sqrt{2} f(s) = 1.530\dots$ であるので、 $l \leq 1.530\dots$ のとき定常解をもつことがわかる。

そこで、初期値をいずれも

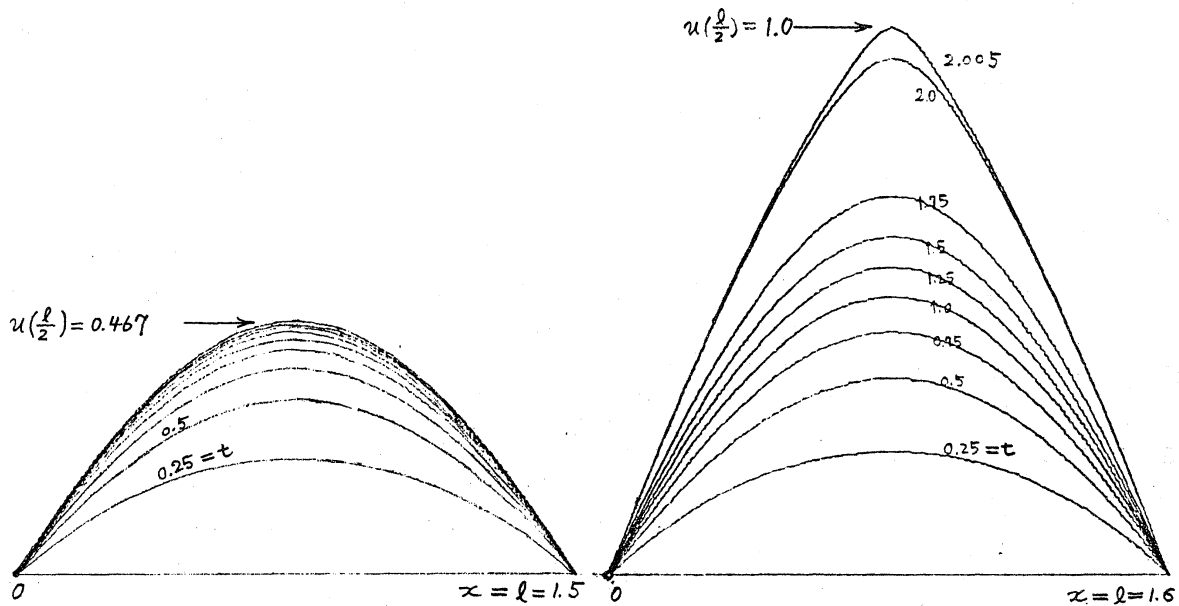
$$u(0, x) = \gamma(x) = 0 \quad (8)$$

として、 l の値を $l = 1.5, 1.6, 4.0$ とした場合について解を計算してみた。才2回~才4回に各々の場合の解の形を図示した。この図は計算結果を直接カーブ・プロッタにより描い



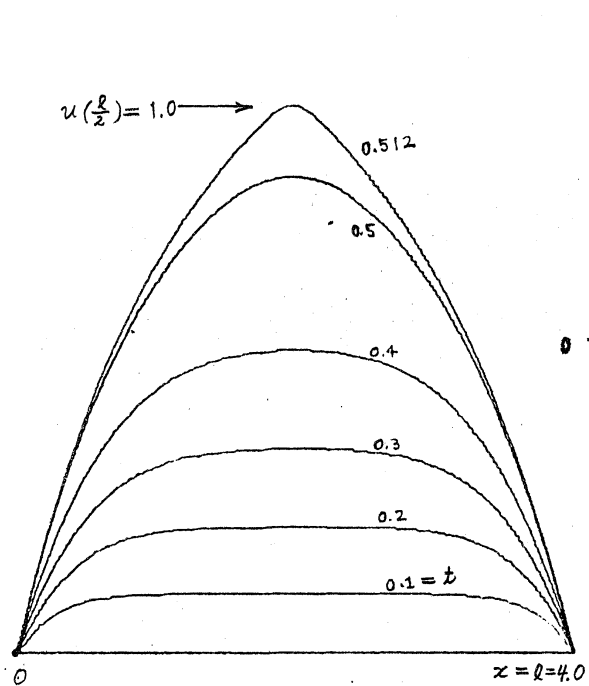
$$\sqrt{2}f(s) = \sqrt{2}(1-s) \int_1^{1-s} \frac{d\xi}{\sqrt{2 \log \xi}}$$

* 1 \square

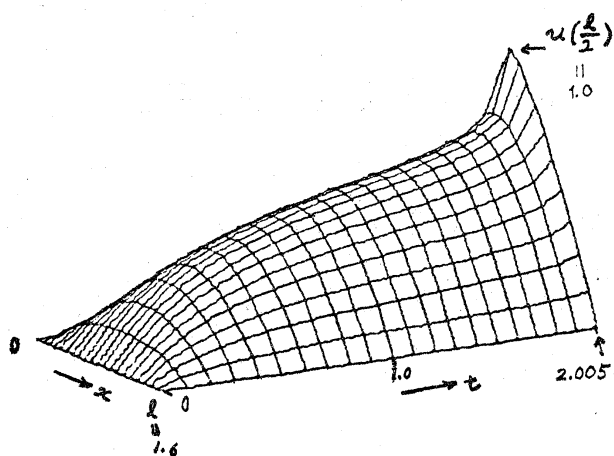


第2圖 $l=1.5$ $\Delta x=0.0375$
 $\Delta t=0.0005$

第3圖 $l=1.6$ $\Delta x=0.04$
 $\Delta t=0.0005$



第4圖 $l=4.0$ $\Delta x=0.05$
 $\Delta t=0.001$



第5圖

$l=1.6$ の場合の解の立体図.

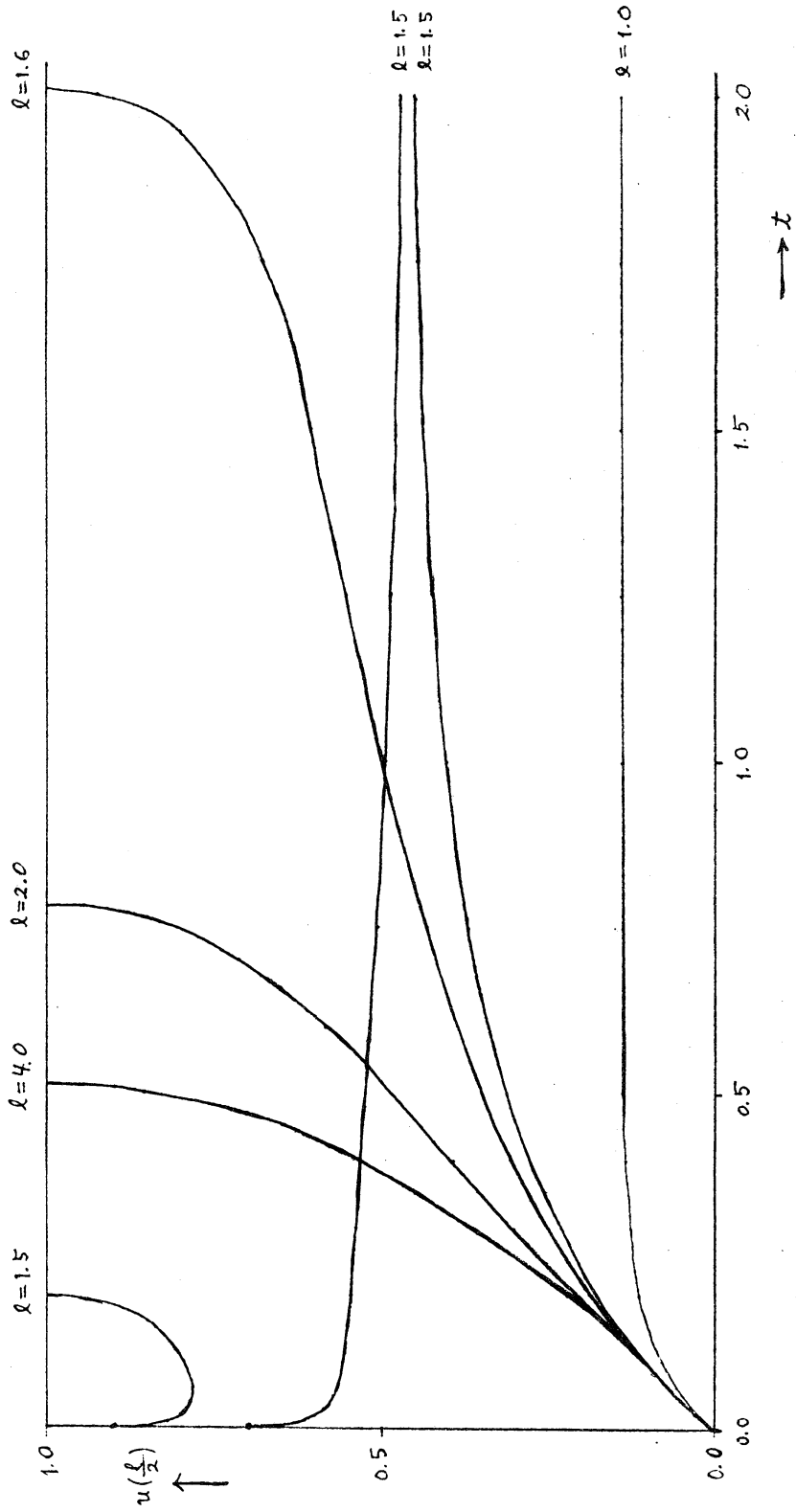
たものである。見やすくするために l の値によらず x 方向の u を一定に統一した。予想通り, $l = 1.5 < 1.530$ の場合は定常解に収束し, また $l = 1.6, 4.0 > 1.530$ の場合は次第に増大してある有限時間のうちに中央の $x = \frac{l}{2}$ における値が $u = 1$ に到達している。図 5 図に, 特に $l = 1.6$ の場合の解のふるまいを立体図で示した。

§ 3 $u(t, \frac{l}{2})$ の挙動

(1) が定常解を持たない場合, すなわち $l > 1.530$ の場合には $u(t, \frac{l}{2})$ の値はある有限の $t = T_0$ で

$$u(t, \frac{l}{2}) \sim 1 - \sqrt{2} \sqrt{T_0 - t} \quad (9)$$

の形で 1 に近づくことがわかっている。上で計算した結果の $u(\frac{l}{2})$ の値を t の関数として図示すると図 6 図のようになる。なお, $l = 1.0, 2.0$ の場合も図示した。この図から確かに (9) のふるまいがみてとれる。また, $t = 0$ のとき初期値 $u(x) = 0$ から出発すると, (1) より $u_t(0, x) = 1$ であるから, 図 6 図の原点での勾配はいずれも 1 である。さらに, $l = \infty$ の極限で解は $u(t) = 1 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} - t}$ で表わされ, $t = \frac{1}{2}$ において $u = 1$ に到達する。図 6 図より $l = 4.0$ の場合は既に $l = \infty$ の極限に近いふるまいをしていることがわかる。

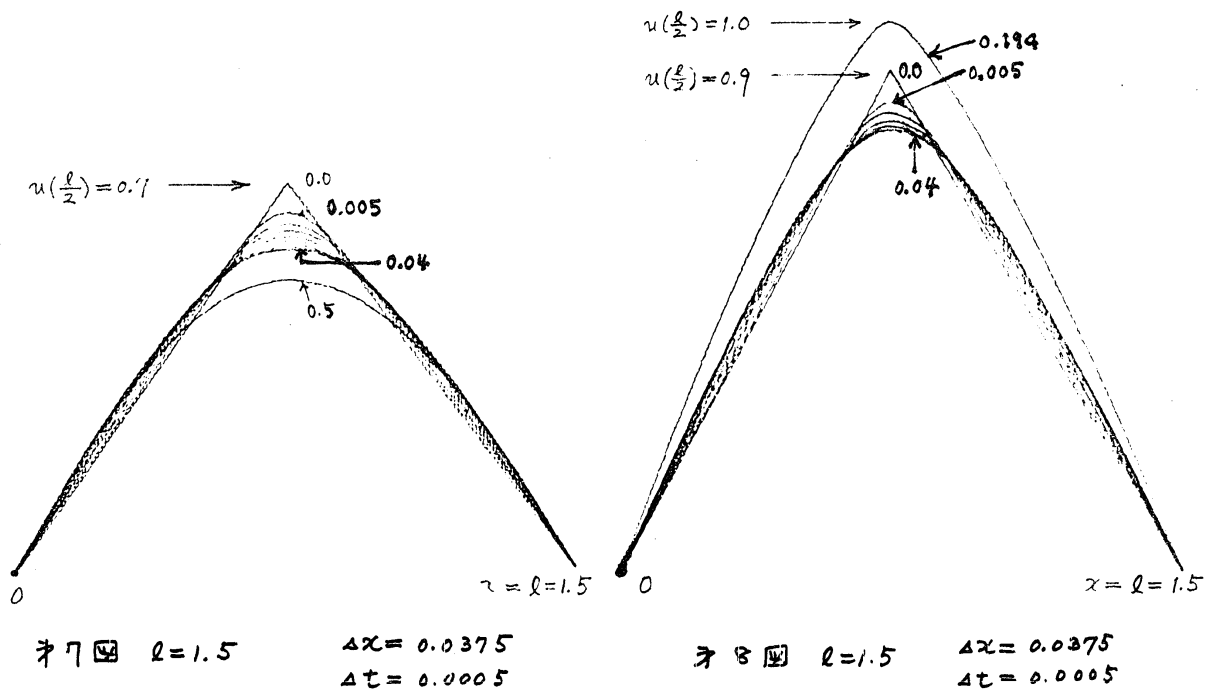


才6圖 いろいろなる λ に對する $u(\frac{x}{2})$ の時間依存性

定常解を持つ場合、すなわち $l < 1.530\dots$ の場合には、 α 1 回における水平な直線 $\sqrt{f(s)} = l$ と曲線との左側の交点の s の値が $u(\infty, \frac{l}{2})$ の値である。 $l = 1.0, 1.5$ における対応する s の値はたしかに α 6 回で収束している $u(\frac{l}{2})$ の値に一致している。

§ 4 初期値による差

α 1 回からわかるように、 $l < 1.530\dots$ のとき2つの定常解が存在するが、このとき小さい方の s に対応するのが安定な定常解、大きい方の s に対応するのが不安定な定常解である。そこで特に $l = 1.5$ としてこの差を調べた。初期値として $x=0$, l で 0 , $x = \frac{l}{2}$ で $u_{max} > 0$ とする二等辺三角形をとり、特に



$u_{max} = 0.7$ と $u_{max} = 0.9$ の場合について計算した。結果はオ
7回とオ8回に示す。 $u_{max} = 0.7$ の場合は、 $u(\frac{t}{2})$ の値が次
オに減少しオ2回と同一の安貞な定常解に収束する。しかし
 $u_{max} = 0.9$ の場合ははじめは u_{xx} の値が大きくきいて $u(\frac{t}{2})$
が減少するが、やがて $t = 0.055 \sim 0.06$ あたりで増大に転じ、
 $t = 0.194$ で $u(\frac{t}{2}) = 1$ に到達する。オ8回において $t = 0.04$ か
ら $t = 0.194$ までの解を図示してない。

[参考文献]

- (1) H. Kawarada : On Solutions of Initial - Boundary
Value Problem for $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$:
本講究録前講.
- (2) 高橋・森 : 変数変換によって得られる積分公式 (2) : 京
都大学数理解析研究所講究録 172 (1973) p.88.