数理解析研究所講究録
190巻 1973年 37-45

数値解析とグラフィックス
——高次代数方程式と等高線——

山梨大学 工学部 高澤 嘉光

はじめに

数値計算を手で行なっているかぎり，計算の途中で桁落ちなどで計算の続行が無意味になったときに，ただちにそのことに気付き，その原因の追求にとりかかることができる。ところが計算機の場合には，オーバーフローやゼロでの割算以外は，計算の異常には気が付かない。そこで，CRTなどの図形表示装置を使えば，人間は計算の進行状況を監視することができ，計算機のムダ使いをしなくてすむ。また，グラフ，等高線，立体図などを使えば，関数の性質を大局的に把握することができ，初期値の設定や根の存在などを容易に判断することが可能である。

ここでその一例として，高次代数方程式の根を等高線図から見つけることをとり上げてみた。

1. 高次代数方程式と等高線

複素平面 $z=x+iy$ で定義された n 次多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0\neq 0 \tag{1}$$

について考える。ここで，a_0，a_1，$\cdots$ a_n は複素数である。$f(z)$ は複素数値をとるので，その高さを $|f(z)|$ で定義すると，n 次代数方程式

$$f(z)=0 \tag{2}$$

の根を求めることと，高さ $|f(z)|$ が 0 になる点 (x, y) を見つけることとは同一である。$f(z)$ の n 個の根を，z_1，z_2，z_3，$\cdots$，z_n とすると，高さ h の等高線は

$$|a_0(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)|=$$

$$|a_0|\cdot|z-z_1|\cdot|z-z_2|\cdot|z-z_3|,\cdots,|z-z_n|=h \tag{3}$$

で表わされる。これは，〝$f(z)$ の高さ h の等高線は各根からの距離の積が $\dfrac{h}{|a_0|}$ である点の集合である〟ことを物語っている（図1）。

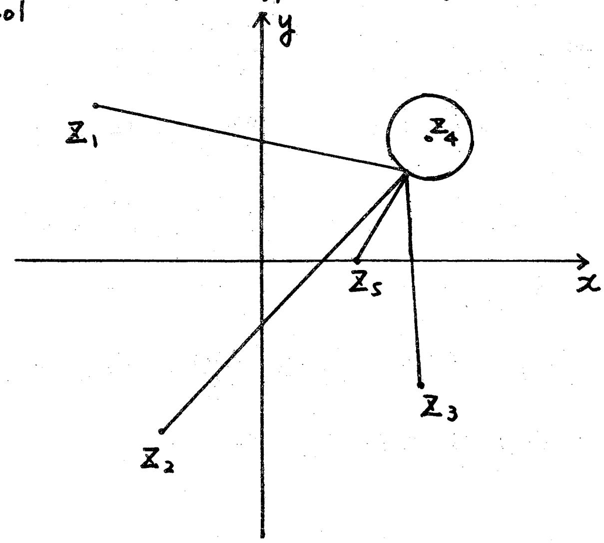

図1

次にn個の根のうち，相異なるものを$z_1, z_2, \cdots z_k$とし，その重なる度合を$p_1, p_2, \cdots, p_k$とする。ただし，$p_1, p_2, \cdots, p_k$は自然数で$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$

(3)は

$$|a_0| \cdot |z - z_1|^{p_1} \cdot |z - z_2|^{p_2} \cdots\cdots |z - z_k|^{p_k} = h \qquad (4)$$

となる。ここで，$h \to 0$のとき

$$z \to z_1, z_2, \cdots, \text{or } z_k$$

となる。いまかりに，$z \to z_1$であれば

$$|z - z_1|^{p_1} \to \frac{h}{|a_0| \cdot |z_1 - z_2|^{p_2} \cdots\cdots |z_1 - z_k|^{p_k}} \qquad (5)$$

であり，これは"高さhが0に近い等高線は点z_1を中心にした円になり，その半径は

$$\frac{h^{\frac{1}{p_1}}}{|a_0|^{\frac{1}{p_1}} |z_1 - z_2|^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots |z_1 - z_k|^{\frac{p_k}{p_1}}} \qquad (6)$$

になる。ここで，分母に現われる$|z_1 - z_2|, \cdots, |z_1 - z_k|$は点$z_1$から他の根までの距離である"ことを物語っている。このことは，点z_1だけでなく他の点についても同じことがいえる。(6)からさらに次のことがいえる。"高さhが0に近い等高線は各根を中心とする円になり，その半径が$\frac{1}{2}$になるためには，高さが$(\frac{1}{2})^{p_i}$にならなければいけない。したがって，高さが$\frac{1}{2}$になるごとに，等高線を描いた場合，根z_iがp_i重

根であれば，P_i本目の等高線でz_iを中心とする等高線の半径が$\frac{1}{2}$になる。”たとえば，単根であれば，１本の等高線ごとに，半径は$\frac{1}{2}$になり，２重根であれば，２本目の等高線でもとの等高線の半径の$\frac{1}{2}$になっている。３重根であれば，３本目で半径が$\frac{1}{2}$になる。ことことを逆に使えば，根の重合度を知ることができる。

“高さが順々に$\frac{1}{2}$になっていく等高線を描いたとき，中心を共有するような同心円が現われたならば，その円の中に根が存在し，その根の重合度は何本目の等高線でその半径がもとの円の半径の$\frac{1}{2}$になるかを調べることによって，知ることができる。”さらに，近接根に関して上の表現は次のようになる。

“高さが順々に$\frac{1}{2}$になっていく等高線を描いたとき，中心（焦点）を共有するような同心円（楕円）が現われたならば，その円の中に根が存在し，その根の個数は何本目の等高線でもとの円の半径の$\frac{1}{2}$になるかに一致する。しかし，高さをだんだんと小さくしていけば，楕円はそれぞれの根を中心とする円に分離する。”

図２はこの様子を示している。高さhが大きい等高線は，根から十分離れており，これはまた円に近い。しかし，高さをだんだんと低くしていくと，円はだんだんと楕円になり，

ついには，各根を中心とする円に分かれてしまう。この高さをどこまで小さくするかによって，根が分離するか，同一の領域に含まれるかが決まる。この高さをどこまで小さくできるかは，計算機の丸め誤差などによって決まり，これがあとで述べる根の精度と関係する。

2. 偏角の導入

いままでのところ，等高線には，関数$f(z)$の絶対値のみを使ってきたが，さらに偏角をも利用したらどうであろうか。偏角に関して，複素関数論において次の基本的な性質がある。

“ある値の偏角の線はすべての根から，必ず一本出ており，それは無限遠点にまで続いている。”

この性質を利用すれば，根の位置とその数をより明確に，かつ簡単に知ることができる。

ここで，とくに偏角0の線を使うことにする。

すなわち，$f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ において

$$u(x,y)\geqq 0\ ,\ v(x,y)=0$$

となる曲線である。

図2，図3，図4，図5，図6における太い線が偏角0の線である。これらの図から容易にわかることだが，偏角0の線は，高さ$|f(z)|$が小さい領域から始まって，それらは無

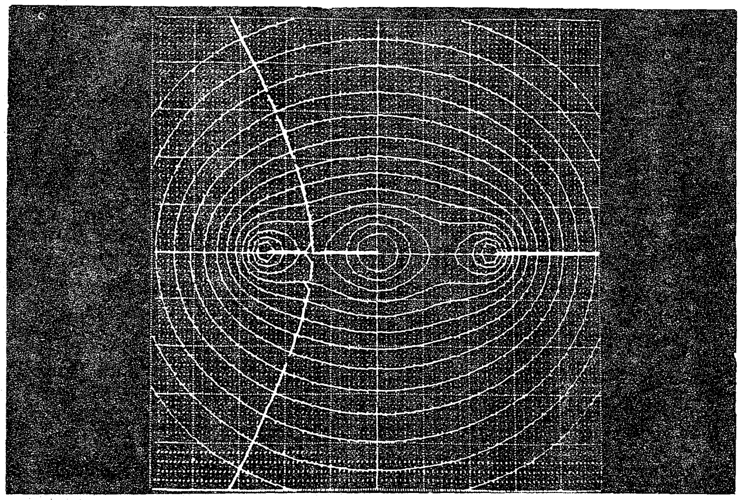

図2

$f(z)=(z+0.5)z(z-0.5)$

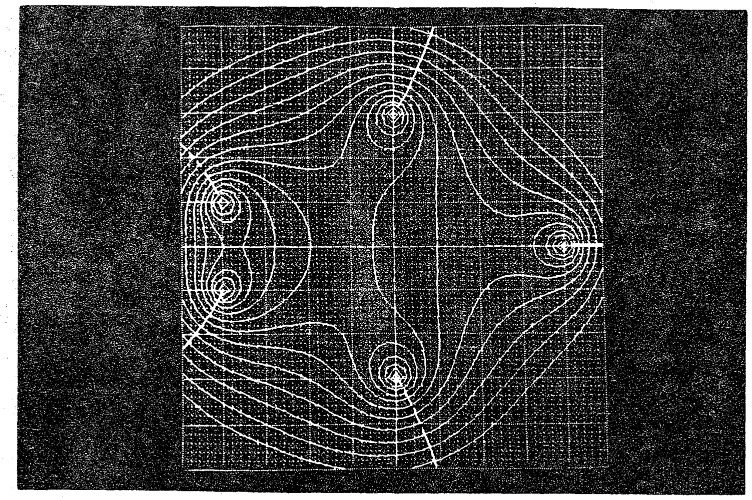

図3

$f(z)=(z^2+1.6z+0.68)(z^2+0.36)(z-0.8)$

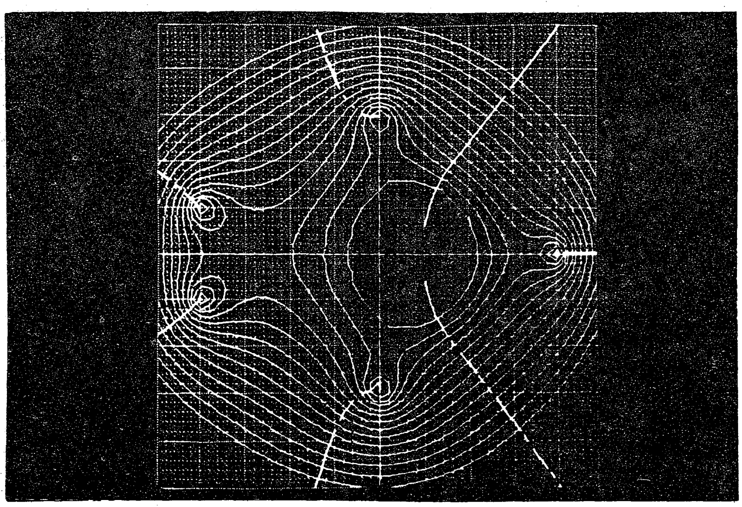

図4

$f(z)=(z^2+1.6z+0.68)(z^2+0.36)(z^2-0.4z+0.41)(z-0.8)$

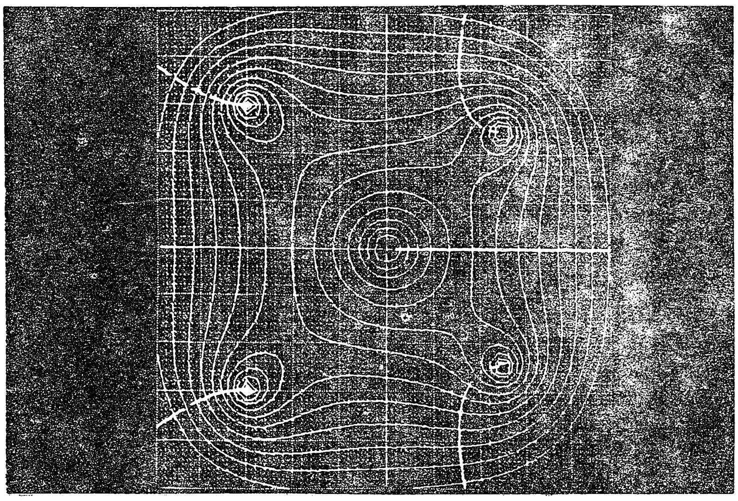

図5
$f(z)=(z^2+1.2z+0.72)z(z^2-1.0z+0.5)$

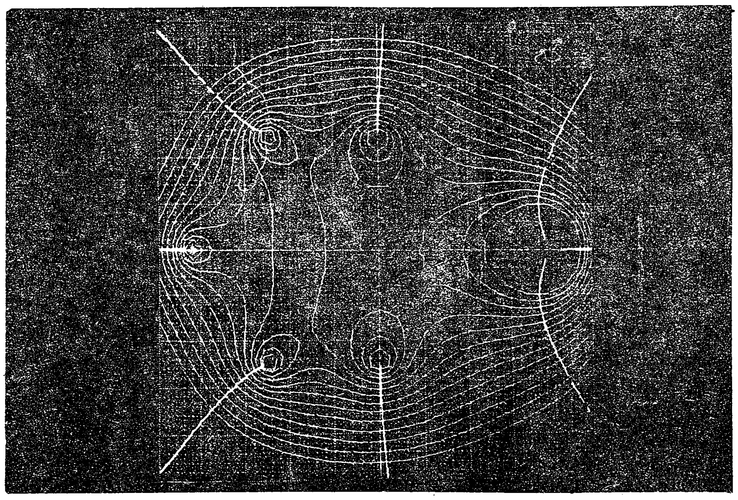

図6
$f(z)=(z+0.85)(z^2+1.0z+0.5)(z^2+0.25)(z-0.75)(z-0.8)^2$

限の方向に伸びている。とくに図4の中ほどの領域からは，2本，図6の右側の領域からは3本の曲線が出ている。この領域に根が，図4では2個，また図6では3個存在していることを示している。図2～6の領域は$-1 \leq x, y \leq 1$である。

高さ$|f(z)|$のみの場合には，半径というアナログ量から根の数を推測していたが，偏角を使えば，それが本数という離

散量で知ることができる。

一方，ある値をもつ偏角の線は根から十分離れたところでは，原点を中心として等角をなすという性質により，無限遠点から偏角一定の線に沿ってきて根を見つけると，比較的能率よく根の発見ができる。

3. 根の巣

多項式 $f(z)$ の計算において，係数の丸めや，演算による桁落ちのために，厳密に $f(z)=0$ となる z を見つけることは不可能であり，一般に，$|f(z)|<\varepsilon$ を満足する z をその代用として使っている。このことは，高さ ε の等高線の内側をすべて根とするということになる。この領域は根の巣とよばれている。したがって，たとえ近接根であっても，その領域内に含まれてしまえば，同一の根と認められる。この現象のために，根の精度がその重合度にしたがって著しく落ちてしまう。どのくらい落ちるかを考えてみよう。いまかりに根 z_1 の絶対値がそれ以外の根の絶対値より十分に大きいとする。また，多項式 $f(z)$ の計算において $a_0 z_1^n$ の絶対値がいちばん大きいと考えると，$f(z_1)$ の丸め誤差はだいたい $a_0|z_1|^n \cdot 10^{-m}$ と考えられる。m は計算桁数である。

(6)より

$$|z - z_1| \doteqdot \frac{(a_0|z_1|^n \cdot 10^{-m})^{\frac{1}{p_1}}}{|a_0|^{\frac{1}{p_1}}|z_1 - z_2|^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots |z_1 - z_k|^{\frac{p_k}{p_1}}} \doteqdot |z_1| \cdot 10^{-\frac{m}{p_1}}$$

となる。すなわち"z_1がp_1重根であれば，その精度は$\frac{m}{p_1}$桁になる。"

参考文献

[1] 一松　信：「数値解析」　税務経理協会

[2] 平野菅保，加山実生：「重根と収束条件」P.29〜30
昭和47年度情報処理学会大会

[3] 高澤嘉光：「ミニコンと対話する──蓄像型ディスプレイを使って」**bit** Vol.5, No.1, P83〜87
共立出版