京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	絶対単調数列に関する性質 (不等式に関する研究)
Author(s)	一松, 信; 荒木, 不二洋
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 191: 81-83
Issue Date	1973-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/107245
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
191巻 1973年 81-83

絶対単調数列に関する性質

京大数理研　一松 信
〃　荒木不二洋

<u>問題</u>. 数列 a_n, $n=0,1,\cdots$ が与えられたとき,

$$a_{0,n}=a_n, \quad a_{m,n}=a_{m-1,n}-a_{m-1,n+1} \ (m>0)$$

とおく. もしすべての $a_{m,n}\geqq 0$ ならば (このとき a_n を<u>絶対単調数列</u>という) $a_2a_0 \geqq a_1^2$ である.

これは Voronovskaja 女史の函数近似理論中[1)]の一定理である。この証明は案外難しい ($m,n \leqq 2$ だけの条件では成立しない). 自由討論の折に一松が提出し, 荒木が下記のような証明を与えた.

<u>定理</u>. 絶対単調数列 a_n の必要十分条件は, $[0,1]$ 上のある(正の) 測度 μ に対して, $a_n=\int x^n d\mu(x)$ となることである.

これがわかれば, $a_2a_0\geqq a_1^2$ は Schwarz の不等式の一例にすぎない。この定理は実は <u>Hausdorff の定理</u>[2)]として既知のものであるが, 下記の証明は比較的平易なので, 紹介したい.

<u>補助定理 1</u>. 上記の数列に対して, $a_r=\sum_{k=0}^{N-r}\binom{N-r}{k}a_{k,N-k}$

$(N\geqq r)$

$N=r$ で成立．あとは N に関する帰納法（二項係数の性質を利用）ですぐに示される．

補助定理2．$x \in \mathbb{R}$ に対し，$F_N(x)$ を下記のように定義すると，単調非減少である．

$$F_N(x)=0 \qquad x<0 \text{ のとき}$$

$$F_N(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{N}{k}a_{N-k,k} \qquad \frac{n}{N}\leqq x<\frac{n+1}{N} \text{ のとき}$$

$$F_N(x)=\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a_{N-k,k}=a_0 \qquad x\geqq 1 \text{ のとき}.$$

補助定理3　$N\geqq r\geqq 1$ として，$f_N^r(x)$　$(x\in\mathbb{R})$ をつぎのように定義する．

$$f_N^0(x)=1 \quad ;$$

$$f_N^r(x)=\begin{cases}\dfrac{Nx(Nx-1)\cdots(Nx-r+1)}{N(N-1)\cdots(N-r+1)} & \dfrac{r-1}{N}\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}\\ 0 \quad \dfrac{r-1}{N}>x \text{ のとき}; & 1 \quad x\geqq 1 \text{ のとき}.\end{cases}$$

このとき，$N\geqq r$ ならば，

$$\int f_N^r(x)\,dF_N(x)=a_r$$

証明．$r=0$ のときは明らか．$r\geqq 1$ ならば，この積分は $F_N(x)$ の不連続点での和だが，$x=\frac{k}{N}$，$k<r$ ならば $f_N^r(x)=0$

$f_N^r\left(\frac{k}{N}\right)=\binom{N-r}{N-k}\Big/\binom{N}{N-k}$，$k\geqq r$　だから

$$\text{積分}=\sum_{k=r}^{N}\binom{N-r}{N-k}a_{N-k,k}=\sum_{k=0}^{N-r}\binom{N-r}{k}a_{k,N-k}=a_r.$$

<u>補助定理4</u>　上記の記号で $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{0\le x\le 1}\left|f_N^r(x)-x^r\right|=0\quad(r\ge 1)$

証明. $\dfrac{r-1}{N}\le x\le 1$ では $f_N^r(x)\le x^r$ なので、$0\le x\le\varepsilon$ での差の sup は $2\varepsilon^r$ をこえず、$\varepsilon\le x\le 1$ での sup は

$$x^\alpha\left|\frac{(1-1/N\varepsilon)\cdots(1-(r-1)/N\varepsilon)}{(1-1/N)\cdots(1-(r-1)/N}-1\right|$$

をこえず、これは $N\to\infty$ のとき0に収束する.

そうすると, $N\to\infty$ のとき

$$\left|a_r-\int x^r dF_N^r(x)\right|\le\sup_{0\le x\le 1}\left|f_N^r(x)-x^r\right|\int dF_N^r(x)\to 0$$

であって、

$$a_r=\lim_{N\to\infty}\int x^r dF_N(x)$$

である. ($r=0$ のときも正しい).

$[0,1]$ 上の連続函数は多項式で一様に近似されるから、これから、測度 μ ($C([0,1])$ 上の正の線型汎函数)

$$\mu(f)=\lim_{N\to\infty}\int f(x)\,dF_N(x)$$

の存在がたしかめられる.

参考文献

[1] E.V.Voronovskaja, The functional method and its applications,(英訳) Trans. of Math. Mono. 28, A.M.S., 1970

[2] F.Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Z. 9 (1921). 74-109; ibid. 280-289.