

Title	重積分の近似計算について (不等式に関する研究)
Author(s)	江田, 義計
Citation	数理解析研究所講究録 (1973), 191: 67-76
Issue Date	1973-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/107248
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

重積分の近似計算について

名古屋大学 数学教室 江田 義計

§ 1.

単位立方体 $U_s = \{X = (x_1, \dots, x_s), 0 \leq x_i \leq 1 \ (1 \leq i \leq s)\}$

とし、 U_s の点 $A = (a_1, \dots, a_s)$ を任意に与え、 U_s の点列 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}) \ (k=1, 2, \dots)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} N_n(A) - a_1 \cdots a_s \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{s,n}(A) = 0 \quad (1)$$

であるならば、点列 $\{X^{(k)}\}$ は U_s 上で一様分布をなすという。

ここで $N_n(A) = \#\{X^{(k)}, (1 \leq k \leq n, x_i^{(k)} < a_i \ (1 \leq i \leq s))\}$

であり、 $\sup_A D_{s,n}(A)$ は $\{X^{(k)} \ (1 \leq k \leq n)\}$ の DISCREPANCY

という。 $\{X^{(k)}\}$ が U_s 上一様分布をなすための必要十分条件

は U_s 上の任意の R -可積分関数 $f(X)$ としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{U_s} f(X) dX - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X^{(k)}) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{s,n}(f(X^{(k)})) = 0 \quad (2)$$

と成ることを示す。これは H. WEYL による美しい結果である

が (1) は点列 $\{X^{(k)}\}$ の U_s での均衡性を示すことも見られる、

(2) は積分に対する近似計算と与えらるゝと見てよい。

先の均等性について次の J. H. HALTON (1960) の結果をあげよう：

よう：

自然数 $k \leq n$, $r > 1$ とし k の r 進法表示を

$$k = k_0 + k_1 r + \dots + k_M r^M \quad (0 \leq k_j < r \quad (1 \leq j \leq M))$$

との係数を用いて次の小数 $g_r(k) = k_0/r + k_1/r^2 + \dots + k_M/r^{M+1}$

($M = \lfloor \log n / \log r \rfloor$) を作る。 p_i は i 番目の素数とし $\{p_1, \dots, p_s\}$ を指定し

$$Y_0^{(k)} = (g_{p_1}(k), \dots, g_{p_s}(k)) \quad (k=1, 2, \dots),$$

($p_s < n$) とおく、このとき

$$\sup_A D_{s,n} \leq 2^s \cdot \left(\prod_{i=1}^s \frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^s n}{n},$$

また $Z_0^{(k)} = (k/n, g_{p_1}(k), \dots, g_{p_{s-1}}(k)) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (p_{s-1} < n)$ と可

る。

$$\sup_A D_{s,n} \leq 2^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{s-1} \frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^{s-1} n}{n}.$$

§2

一様分布の均等性と積分の近似計算におよぼす関係について

一つの結果 (H. M. COHEN, 1961) をあげる：

整数 $\alpha \geq 1$ とし、 U_s 上で定義された関数 $f(x)$ について

$$\left| \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right| < C, \quad \begin{cases} r \leq \alpha s, & 0 \leq i_j \leq \alpha \quad (1 \leq j \leq s) \\ i_1 + \dots + i_s = r \end{cases}$$

を満足する関数全体からなる族 $\varepsilon H_s^\alpha(C)$ とおく。 U_s の数列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) に対し、もし

$$\sup_A D_{s,n}(A) < \varphi(n)$$

であれば

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(X)) \leq 2^s C \cdot \varphi(n)$$

このことは、もし数値積分のよきものを得ようと思えば均衡度の上の数列を求めなければならぬことが分る。上の結果

と HALTON の結果とを合わせると：

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Y_0^{(k)})) \leq 4^s C \cdot \prod_{i=1}^s \left(\frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^s n}{n},$$

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Z_0^{(k)})) \leq 2^{2s-1} C \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \left(\frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^{s-1} n}{n}.$$

なお、 $D_{s,n}(A)$ の下からの評価に対しては §4 で与える。

§3

$f(X)$ は各成分について周期 1 をもち、そのフーリエ級数は

$|con v|$ (絶対収束) すると

$$f(X) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} c(M) e^{2\pi i(M, X)} \quad \left(\begin{array}{l} M = (m_1, \dots, m_s), \quad m_i \in \mathbb{Z} \\ (M, X) = \text{内積} \end{array} \right)$$

$\alpha > 1, C > 0$ を定数として

$$|c(M)| \leq C / (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha, \quad \bar{m} = \max(1, |m|)$$

ε 満足する ε $f(x)$ の作る関数族 $\varepsilon E_s^\alpha(C)$ とおく。 ε と a_i ($1 \leq i \leq s$) は整数とし, $\frac{k}{\varepsilon} A = (\frac{k}{\varepsilon} a_1, \dots, \frac{k}{\varepsilon} a_s)$ ($k=1, 2, \dots$) とおくと, $f(x) \in E_s^\alpha(C)$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} f\left(\frac{k}{\varepsilon} A\right) &= \sum_{M=-\infty}^{\infty} c(M) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} e^{2\pi i (A, M) \frac{k}{\varepsilon}} \\ &= \sum_{\substack{M=-\infty \\ (A, M) \equiv 0 (\varepsilon)}}^{\infty} c(M) \end{aligned}$$

を得る, かくて

$$\int_{U_s} f(x) dx - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} f\left(\frac{k}{\varepsilon} A\right) = - \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} c(M)$$

かくて左辺の重積分を単一の和で近似する問題は $\frac{k}{\varepsilon} A$ をうまくとって, つまり $A = (a_1, \dots, a_s)$ をうまくとって上式の右辺の絶対値を最小にできる ε がある。 所以 $f \in E_s^\alpha(C)$ より

$$\left| \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} c(M) \right| \leq C \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha} = c \Omega$$

とおく。

H.M. Korošob (1957) によると $\Omega < (2s)^\alpha \left(2s(1+\frac{\varepsilon}{\alpha})+1\right)^{\alpha s} p^{-\alpha+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) とするよきな $A_0 = (1, a, \dots, a^{s-1})$ が存在する。 つまり奇素数 $p > s$ に対し $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ なる ε に対し ε 次式を満足するよきな A_0 が存在するのである:

$$\sup_{f \in E_3^\alpha(c)} I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A_0)) < C(2s)^\alpha \left(2s(1+\frac{c}{\alpha})+1\right)^{\alpha s} p^{-\alpha+c}$$

となる A_0 が存在する。実は一般に

$$\Lambda_\alpha = \sum'_{\substack{(A,M) \equiv 0 \pmod{g} \\ |m_i| \leq \frac{g}{2}}} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha}$$

とおくと

$$I_{s,g}(f(\frac{k}{g}A)) \leq C \left[\Lambda_\alpha + s \left(\frac{z}{g}\right)^\alpha (2s(\alpha)+1)^s \right]$$

を得る。 $\Lambda_\alpha^{1/\alpha} \leq \Lambda_1$ である。

$$\Lambda_1(a) = \Lambda_1(A_0) = \sum'_{\substack{(A,M) \equiv 0 \pmod{p} \\ |m_i| \leq \frac{p}{2}}} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)}, \quad A_0 = (1, a, \dots, a^{s-1})$$

とおくと $\Lambda_1(a)$ の最小値をもつ a を求めよ ($1 \leq a \leq p-1$)。

$$\Lambda_1(a) \leq \left\{ (s-1) 2^{s+1} \log^s 3p \right\} \frac{1}{p}$$

となるので $p > s$ ならば (p 素数)

$$\sup_{f \in E_3^\alpha(c)} I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A_0)) < C \left[(s-1)^\alpha 2^{(s+1)\alpha} \log^{\alpha s} 3p + s 2^\alpha (2s(\alpha)+1)^s \right] \frac{1}{p^s}$$

となる a ($p \nmid a$) が存在する (H.M. Korošob, 1959)。

の定義をこのよう:

$g \geq 3$ とし, c, c' は α, s のみに依存する定数として

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(c)} I_{s,g}(f(\frac{k}{g}A)) < C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{c'(\alpha, s)} g}{g^\alpha}$$

となる $A = (a_1, a_2, \dots, a_s) \pmod{g}$ の最良係数 (極値係数)

(OPTIMAL COEFFICIENT) という。王元 (1962) はこの A の存在の別証明を次の形で与えている。奇素数 $p > 5$ のとき

$$\sup_{f \in E_s^*(C)} I_{s,p}(f(\frac{K}{P}A_0)) < C (25)^{\alpha} 3^{\alpha s} (55\alpha)^s \frac{\log^{\alpha(s-1)} 3^p}{p^\alpha}$$

§12 H. C. БАХБАЛОВ (1959) の興味ある結果をあげてこの § を終える:

整数 $m > 1$ に対し合同式 (ディオファントス方程式)

$$(A, M) \equiv 0 \pmod{m}, \quad A = (a_1, \dots, a_s), \quad M = (m_1, \dots, m_s)$$

が $\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s < m$, $A \neq 0$ なる範囲で解が存在すれば

$$\sup_{f \in E_s^*(C)} I_{s,n}(f(\frac{K}{n}A)) < C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} m}{m^\alpha}$$

である。

§4

$$D_{s,n}(A) = \left| N_n(A) / n - a_1 \dots a_s \right|, \quad A = (a_1, \dots, a_s)$$

の下からの評価に対しては、任意の実列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) に対して K. F. ROTH の周知の定理が得られる (1950):

$$D_{s,n}(A) \geq 2^{-2s-k} (s-1)^{\frac{1-s}{2}} (\log 2)^{\frac{1-s}{2}} \frac{\log^{\frac{s-1}{2}} n}{n}$$

となる $A \in U_s$ が存在する。

δ は正整数とし, $0 \leq \lambda < 1$ および C は正の定数とする。

U_s 上で定義される関数 $f(x)$ で ρ 階以上起る... すべての微係数はすべて連続, またその絶対値は $C \varepsilon$ に之を $f(x)$ の

ρ 階微係数については

$$\lim_{y_v \rightarrow x_v} \frac{1}{|y_v - x_v|^\alpha} \left| \frac{\partial^\rho f(x_1, \dots, y_v, \dots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial y_v^{i_v} \dots \partial x_s^{i_s}} - \frac{\partial^\rho f(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right| \leq C$$

($1 \leq v \leq s, i_j \geq 0 (1 \leq j \leq s), i_1 + \dots + i_s = \rho$) であるとし, この
ような $f(x)$ 全体の作る関数族 $H_s(\rho, \alpha, C)$ とする。 $H_s(\rho, \alpha, C) \subset H_s^\alpha(C)$ である。このとき U_s の任意の点列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$)
に対して

$$I_{s,n}(f(X^{(k)})) \geq C \cdot c(\rho, \alpha, s) n^{-\frac{\rho+\alpha}{s}}$$

となるような $f(x) \in H_s(\rho, \alpha, C)$ が存在する。従って $H_s^\alpha(C)$
に対しては n 個の関数値、算術平均と U_s 上の積分値との誤差は $1/n^\alpha$ よりも大きく出るとして §2 年の定理等は本質的には
よくは存在しない。(H. C. Бахвалов, 1959)。

更に次の И. Ф. Шарыгин (1963) の定理がある:

U_s の任意の n 個の点 $X^{(k)}$ ($k=1, \dots, n$) に対して $f(X^{(k)})=0$
($k=1, \dots, n$) として

$$\int_{U_s} f(x) dx \geq C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} n}{n^\alpha}$$

となる $f(x) \in E_s^\alpha(C)$ が存在する。これによつて見れば §2
の Коробов の結果は誤差の主項とも見れば $p^{-\alpha}$ は最善であ
る? T_2 。

§5

最後に華羅 (华罗庚) 氏, 王元の代数的単数を利用する方法に
ついでによう。二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の単数 $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$ とし

$$\varepsilon' = (1-\sqrt{5})/2 \quad \text{とし} \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varepsilon^{n+1} - \varepsilon'^{n+1}] \quad \text{とし} \quad g_n =$$

$$g_{n-1} + g_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad \frac{0.97}{\sqrt{5}} \varepsilon^{n+1} \leq g_n \leq \frac{1.01}{\sqrt{5}} \varepsilon^{n+1} \quad (n > 3),$$

$g_{n-1} g_{n-m} > 0.36 g_n \quad (n > 3, 2 \leq m \leq n-1)$ 等を得る。これは

の性質によつて §3 の Λ_α に対し

$$\Lambda_\alpha < \frac{8.4 \zeta(\alpha) \log g_n}{(0.36)^\alpha g_n^\alpha}$$

を得る。これから $n > 3$ のとき

$$\begin{aligned} \sup_{f \in E_2^\alpha(C)} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{g_n} \sum_{k=1}^{g_n} f\left(\frac{k}{g_n}, \frac{g_{n-1}k}{g_n}\right) \right| < \\ < C \left(\frac{8.4 \zeta(\alpha) \log g_n}{(0.36)^\alpha g_n^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1} (25(\alpha+1))^2}{g_n^\alpha} \right) \end{aligned}$$

を得る。これは §4 の結果から見れば最良である。もし主

題のみに注目すれば §3 の $B_{\Delta \times B_{\Delta \times \Delta \times \Delta}}$ の結果から出る。

§6

実際は OPTIMAL 係数を求めることは、近似計算のやり方、

補間法や重積分を単一積分に近似する：と念じへの応用，更
 に FREDHOLM 型と VOLTERA 型 積分方程式等への応用などは
 次の参考文献 [1], [2] を参照されたい。上記はそれらの
 特には [1] の紹介であつたが，文献は一切略したので [1]~ [4]
 に中する。これらの方法（整教論的方法ともよばれる）は
 我が国では数学辞典などでも紹介されたいなくと余り知られ
 ていないと思われるので紹介した次第である。新刊の [4]
 は重積分の近似計算についての最近の結果を知るには都合よ
 くまとめられてあり文献も（数論愛好者には一寸不満かも
 知れませんが）くわしい好著であらう。上記 Korobov の結果
 は証明ぬきで要領よくまとめられてある。

参考文献

- [1] 华罗庚, 王元: 数値積分及其応用
 (科学出版社, 1963, 160頁-じ)
- [2] N. M. KOROBOV: NUMBER THEORETICAL METHODS IN APPROXIMATE
 ANALYSIS (ロシア語, FIZMATGIZ, MOSCOW, 1963, 224
 頁-じ)
- [3] N. M. KOROBOV: SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF DIOPHANTINE
 APPROXIMATION. 英訳. Uspehi. 1966. 39頁-じ
- [4] A. H. STROUD: APPROXIMATE CALCULATION OF MULTIPLE INTEGRALS
 PRENTICE-HALL, USA. 1971, 431頁-じ

1973年4月28日 華羅庚教授は来日された機会に京大の
 数理解析研究所において「代数的数と数値計算への応用」と
 題されて §5 の FIBONACCI NUMBERS の代りに代数的単数を
 利用する方法について、即ち母の m 分体の $\frac{1}{2} \varphi(m)$ 次の実部
 分体 (それは $\cos \frac{2\pi}{m}$ を含む) ($m=p$ 素数) について論じ
 られた。筆者は京大の方には出席出来ず京大に予定されて
 あった講演は取り止めになりお目に掛ることの出来なかった
 ことは大変残念であったが、幸ひに京大の中井講師の好意
 により講演のメモと指見可事などが出来、また一松教授との
 談話等によりここに追記する。

1973. 7. 27.