数理解析研究所講究録
191巻 1973年 42-51

Esseen の不等式について

岡山大 理　内 山 三 郎

1.　$F(x)$ は1次元（i.e. 実数直線上）の分布函数，すなわち

1）$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；

2）$F(x)$ は非減少函数；

3）$F(x)$ は左連続

なるものとし，

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\, dF(x)$$

をその特性函数とする．

X_i $(i=1,2,\cdots)$ を任意の1次元の独立な確率変数の列とし，それぞれ平均 $\mu_i=0$，有限の3次の絶対積率 β_{3i} 従ってまた有限の分散 σ_i をもつとする．このとき

$$B_{2n}=\frac{1}{n}(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2),\quad B_{3n}=\frac{1}{n}(\beta_{31}+\cdots+\beta_{3n})$$

とおけば，確率変数

$$Z_n = \frac{1}{s_n}(X_1 + \cdots + X_n) \qquad (s_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

の分布函数 $F_n(x)$ は

$$(1) \qquad |F_n(x) - N(x)| \leqq 3 \frac{B_{3n}}{B_{2n}^{3/2}} \frac{\log n}{n^{1/2}}$$

をみたす．　ここに

$$N(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

である．　これは H. Cramér (1923) による A. Ljapunov の結果 (1900) の精密化であって，いわゆる中心極限定理における収束の速さを定量的に示すものである．

A. C. Berry (1941) と C.-G. Esseen (1942) は，独立にかつ異なる方法によって，(1) を更に改良し

$$(2) \qquad |F_n(x) - N(x)| \leqq 7.59 \frac{B_{3n}}{B_{2n}^{3/2}} \frac{1}{n^{1/2}}$$

を証明した．　(2) の右辺の定数 7.59 は 2.05 以下の絶対定数でおきかえられることが知られているとのことである (cf. [2: p.156 脚註 5])．

2.　さて，分布函数とその Fourier-Stieltjes 変換としての特性函数との対応は一対一ではないが，ある意味で連続である．すなわち，分布函数の列 $F_n(x)$ が分布函数 $F(x)$ に弱収束する（i.e. $F(x)$ のすべての連続点 x において $F_n(x) \to F(x)$ $(n \to \infty)$）ための必要かつ充分な条件は，対応する特性函数の列 $f_n(t)$ が t のすべての有界な区間において $F(x)$ の特性函数 $f(t)$ に一様収束することである．この事実の精密化が，Esseen による (2) の証明において必要である．Esseen [1] はつぎの定理 1，2 を証明した（cf. [3: Chap. I, §5]）.

定理 1.　A，T，ε は正の定数，$F(x)$ は非減少の函数，$G(x)$ は有界変分の函数とし，$f(t)$，$g(t)$ はそれぞれ $F(x)$,$G(x)$ の Fourier-Stieltjes 変換とする．このとき，もし

1）$F(-\infty) = G(-\infty)$，$F(+\infty) = G(+\infty)$；

2）$G'(x)$ がすべての x に対して存在し $|G'(x)| \leqq A$；

3）$$\int_{-T}^{T} \left|\frac{f(t)-g(t)}{t}\right| dt = \varepsilon$$

ならば，任意の $k > 1$ に対して k のみで定まる正数 $c(k)$ が存在し，すべての x に対して

(3)　$$|F(x) - G(x)| \leqq k\frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k)\frac{A}{T}$$

が成立つ． とくに $c(2) \leqq 24/\pi$．

定理 2．$F(x)$は非減少かつ純不連続の函数（i.e. ある離散型の分布函数 $F_1(x)$ に対して $F(x) = aF_1(x) + b$ の形をとるもの），$G(x)$ は有界変分の函数とし，$f(t)$，$g(t)$ をそれぞれ対応する Fourier-Stieltjes 変換とする． このとき

1） $F(-\infty) = G(-\infty)$， $F(+\infty) = G(+\infty)$；

2） $F(x)$ および $G(x)$ の不連続点は集合 $\{x_\nu : \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 上にあり，すべての ν に対して $x_{\nu+1} - x_\nu \geqq l$；

3） 2）の集合の各点を除いて $G'(x)$ が存在し $|G'(x)| \leqq A$；

4） $\displaystyle\int_{-T}^{T} \left|\frac{f(t) - g(t)}{t}\right| dt = \varepsilon$

であるならば，各 $k > 1$ に対して正の定数 $c_1(k)$，$c_2(k)$ が存在し，$Tl \geqq c_2(k)$ ならば

$$|F(x) - G(x)| \leqq k\frac{\varepsilon}{2\pi} + c_1(k)\frac{A}{T} \tag{4}$$

が成立つ．

定理 1 における（3）乃至は定理 2 における（4）が Esseen の不等式とよばれるものである．

3. 不等式 (3) をつぎのように書くことができる：
$G'(x)$ がいたるところ存在して $|G'(x)| \leqq A$ ならば

(5) $$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqq C_1\left(\frac{A}{T} + \int_0^T |f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}\right).$$

ここに $C_1 > 0$ は絶対定数で，$T > 0$ は任意である．

A. S. Fainleib [5] は定理 1 を一般化してつぎの結果をえた．*)

定理 3. $F(x)$, $G(x)$ はともに分布函数とし，$f(t)$, $g(t)$ をそれぞれの特性函数とすれば，絶対定数 $C_2 > 0$ が存在して $T > 0$ のとき

(6) $$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqq C_2\left(\delta_G\left(\frac{1}{T}\right) + \int_0^T |f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}\right)$$

が成立つ． ここに

$$\delta_G(h) = \sup_x \frac{1}{2h}\int_0^h (G(x+u) - G(x-u))\,du.$$

この結果の特徴は $G(x)$ の微分可能性について何等の条件ももたぬことである．

---

*) 部分的一般化．

$$Q_G(h) = \sup_x \left(G(x+h) - G(x) \right)$$

とおけば

$$\delta_G(h) \leqq \frac{1}{2} Q_G(2h) \leqq Q_G(h)$$

であるから，もしいたるところ $|G'(x)| \leqq A$ ならば $\delta_G(h) \leqq Ah$ となり，（6）は（5）に帰着する．　しかし，(6) の形からわかるように，定理３は（$F(x)$, $G(x)$がともに分布函数である場合の）定理２を含むものではない．

猶

$$Q_G(h) < C_3 \sup_{t \geqq 1/h} \frac{1}{t} \int_0^t |g(u)|\, du$$

に注意すれば（6）はまた

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leqq C_4 \left(\sup_{t \geqq T} \frac{1}{t} \int_0^t |g(u)|\, du + \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} \right)$$

のように書かれることがわかる．　C_3, C_4 は正の絶対定数である．

4.　定理３は興味ある整数論的応用をもつ．

$\psi(m)$ は加法的函数，すなわち $(a, b) = 1$ のとき $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$ をみたす整数論的函数，とする．　ここでは，$\psi(m)$ として実数値をとるもののみを考察する．

P. Erdős および A. Wintner (1939) によれば，分布函数の列

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{m \leqq n \\ \psi(m) < x}} 1$$

が $n \to \infty$ のときある分布函数 $F(x)$ に弱収束するための必要かつ充分な条件は，三つの級数

$$\sum_{|\psi(p)| \geqq 1} \frac{1}{p}, \quad \sum_{|\psi(p)| < 1} \frac{\psi(p)}{p}, \quad \sum_{|\psi(p)| < 1} \frac{(\psi(p))^2}{p}$$

の収束することである（p は素数の上に亘る）．

Fainleib [5] は (6) を用いてつぎの定理を証明した．

定理 4.　$\psi(m)$ は実数値の加法的函数でつぎの条件をみたすものとする：

1) $\displaystyle\sum_{p^r} \frac{(\psi(p^r))^2}{p^r} < \infty$;

2) 相異なる任意の square-free な整数 m, n に対して

$$|\psi(m) - \psi(n)| \geqq (mn)^{-a} \quad (a > 0,\ 定数).$$

このとき，x について一様に

$$\frac{1}{n} \sum_{\substack{m \leqq n \\ \psi(m) - \sum_{p \leqq n} \frac{\psi(p)}{p} < x}} 1 = F(x) + O\left(\frac{\log\log \frac{1}{\rho_n}}{\log \frac{1}{\rho_n} \log\log\log \frac{1}{\rho_n}} \right) \quad (n \to \infty)$$

が成立つ．ここに，$F(x)$ は特性函数

$$f(t)=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{e^{it\psi(p^r)}}{p^r}\right)e^{-it\psi(p)/p}$$

により定義される分布函数で，

$$\varrho_n = \sum_{p>\exp\frac{\log n\cdot\log\log\log n}{6\log\log n}} \frac{(\psi(p))^2}{p}$$

である．

定理4においてとくに $\psi(m)=\log\dfrac{\varphi(m)}{m}$ （$\varphi(m)$はEulerの函数）とすれば

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{m\leqq n\\ \frac{\varphi(m)}{m}<x}} 1 = \Phi(x)+O\left(\frac{1}{\log n}\left(\frac{\log\log n}{\log\log\log n}\right)^2\right) \quad (n\to\infty)$$

をえる． $\Phi(x)$はある分布函数である．

分布函数 $F(x)$, $G(x)$ が区間 $[0,1]$ 上に concentrate されている場合には，これらはその特性函数の $t=2\pi n$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）における値によって完全に定まる． このことに関して，Fainleib [5] はつぎの定理をえている．

定理5． 分布函数 $F(x)$, $G(x)$ は区間 $[0,1]$ 上に concentrateされているもの，すなわち $F(x) = G(x) = 0$ ($x < 0$)，$F(x) = G(x) = 1$ ($x > 1$) なるもの，とする．$F(x)$，$G(x)$ の特性函数をそれぞれ $f(t)$，$g(t)$ とすれば，任意の $T > 0$ に対して

$$\sup_{x} |F(x) - G(x)| \leqq C_5\left(Q_G\left(\frac{1}{T}\right) + \sum_{1 \leqq n \leqq T} \frac{|f(2\pi n) - g(2\pi n)|}{n}\right)$$

が成立つ．ここに $C_5 > 0$ は絶対定数である．

$G(x)$ がとくに $[0, 1]$ 上の一様分布の分布函数である場合は P. Erdős および P. Turán (1948) によって取扱われている．この種の最近の研究として P. D. T. A. Elliott (1972) によるものがある．

文　献

[1] C.-G. Esseen: Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. Acta Math. 77 (1945), 1-125.

[2] W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. II. John Wiley & Sons, Inc. New York etc., 1966.

[3] I. A. Ibragimov and Yu. V. Linnik: Independent and Stationary Sequences of Random Variables. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[4] А. Г. Постников: Введение в аналитическую теорию чисел. Изд-во «Наука», Москва, 1971.

[5] А. С. Файнлейб: Обобщение неравенства Эссеена и его применение в вероятностной теории чисел. Изв. акад. наук СССР, Сер. мат. 32 (1968), 859-879.

A. S. Faĭnleĭb: A generalization of Esseen's inequality and its application in probabilistic number theory. Math. USSR - Izvestija, 2 (1968), 821-844.