

三角形の辺の長さ a, b, c についての
不等式の一般解法。

千葉大 教養部 大関信雄

三角形の3辺の長さ a, b, c についての不等式
はよく知られてゐる [1]. $a+b+c=s_1$, a^2
 $+b^2+c^2=s_2$, $abc=s_3$ とし、不等式
が s_1, s_2, s_3 で表わされるとき [2]

定理. $\frac{16}{5}s_2 \leq s_1^2 < 4s_2$ のとき

$$s_3 \leq s_1(4s_2 - s_1^2)/8$$

$$3s_2 \leq s_1^2 < \frac{16}{5}s_2 \text{ のとき } s_3 \leq \beta.$$

$$\text{また } \alpha \leq s_3 \Rightarrow \alpha$$

$$\alpha, \beta = \left\{ s_1(9s_2 - 2s_1^2) \pm 2(s_1^2 - 3s_2)^{\frac{3}{2}} \right\} / 27$$

$$3s_2 \leq s_1^2 < 4s_2$$

証明. $x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3 = 0$ ($s_i > 0$)

(1)

が実根をもち、すなわち判別式 $D = 27s_3^2 - 2s_1(9s_2 - 2s_1^2)s_3 + s_2^2(4s_2 - s_1^2) \geq 0$... (1)

2根の和 $>$ 他の1根、すなわち $s_1/2 >$ 1根

= (1)より $3s_2 \leq s_1^2 < 4s_2$.

$$s_3 < s_1(4s_2 - s_1^2)/8 \quad \dots (2)$$

(1), (2)を一纏に②定理とする。

定理の適用

$$\sqrt{3}\Delta \geq 9r^2 \quad \dots (3)$$

(3)

$$(s_1/2)^2 \geq 16Rr - 5r^2 \quad \dots (4)$$

Δ は三角形の面積、 R, r は外接円及び内接円の半径。

$$(3) \text{ は } 7s_1^3 - 27s_1s_2 + 54s_3 \geq 0$$

$$(4) \text{ は } s_1^3 - 5s_1s_2 + 18s_3 \geq 0$$

(4)は定理の $s_3 \leq s_1(4s_2 - s_1^2)/8$ 、よって

$s_3 \leq \beta$ とすればよい。

$$C_1s_1^3 - C_2s_1s_2 + 54s_3 \geq 0 \quad 3C_1 - C_2 + 6 = 0$$

といて $s_3 \geq \alpha$ 、 $\forall \alpha$ $C_1 = 6, C_2 = 24$

(2)

$$(3) \text{ H } s_1(s_1^2 - 3s_2) + 6(s_1^3 - 8s_1s_2 + 9s_3) \geq 0$$

References

[1] D. S. MITRIĆNOVIĆ et al:
Geometric Inequalities. P 11 - P 99

[2] G. H. Hardy et al: Inequalities
P 64 Schur's Ineq.

$$\begin{aligned} & x^\mu(x-y)(x-z) + y^\mu(y-z)(y-x) \\ & + z^\mu(z-x)(z-y) \\ & = 2(x^{\mu+2} + y^{\mu+2} + z^{\mu+2}) - (x+y+z)(x^{\mu+1} \\ & + y^{\mu+1} + z^{\mu+1}) + xyz(x^\mu + y^\mu + z^\mu) \geq 0 \\ & (x, y, z, \mu \geq 0) \end{aligned}$$

[3] [1] P. 71 P. 50

(3)