数理解析研究所講究録
191巻 1973年 17-26

数理経済学における不等式

慶応大　　渡部隆一

§1 Edgeworth の予想

経済学における Edgeworth の予想 [1] に関連して，集合の non-convexity の measure とそれを評価する不等式を考える必要が生じたので，それについて紹介したい。

Edgeworth の予想については [2] に解説があるが，数学的にキチンとしたモデルを作り部分的に解決したのは [3], [4] である。

—— 記号 ——

R^n : Euclidean space　　Ω : non-negative orthant

T : Set of traders　　m : T の member の数

$\succsim_t$: preference relation of $t \in T$

ω_t : resource of $t \in T$, $\omega_t \in \Omega$

p : price vector, $p = [p_1, \cdots, p_n]$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$

$\langle x, y \rangle$: inner product

Def. 1. $\sum_{t\in T} x_t = \sum_{t\in T} \omega_t,\ x_t \in \Omega$ を満たす $\{x_t\}$ を allocation といい，T のいかなる部分集合 S をとっても，

$$\sum_{t\in S} y_t = \sum_{t\in S} \omega_t,\ y_t \succsim_t x_t,\ (t \in S),\ \exists s \in S,\ y_s \succ_s x_s$$

となる $\{y_t\}$ が存在しないとき，$\{x_t\}$ を Core と呼ぶ.

Def. 2. $\langle p, x_t \rangle \leqq \langle p, \omega_t \rangle$ であって，$\langle p, y_t \rangle \leqq \langle p, \omega_t \rangle$，$y_t \succ_t x_t$ となる y_t が存在しないような p と allocation $\{x_t\}$ の組を competitive equilibrium といい，その $\{x_t\}$ を equilibrium allocation と呼ぶ.

自然な仮定の下に eq. a. が Core に属することは直ちにいえるが，Edgeworth の予想とは次のことである。

「 m の数を増すにつれて Core は次才に shrink して，ついには eq. a. と一致する 」

— Debreu の model —

1. Preference relation ;

a) $x \succsim_t x$　b) $x \succsim_t y,\ y \succsim_t z \Rightarrow x \succsim_t z$　c) 任意の x, y について $x \succsim_t y$ または $y \succsim_t x$.

2. Insatiability ; $\forall x \in \Omega,\ \exists y \in \Omega;\ y \succ_t x$.

3. Convexity ; $\{y \mid y \succsim_t x\}$ は convex.

etc.

Tはmケのtypeよりなり，各typeにはr人のtraderが存在し，同一のtypeのtraderは同一のpreferenceと同一のresourceを持っているとする。このような経済では，$r \to \infty$のときCoreは次才にshrinkしてeq. a. に極限では一致する。

— Aumannのmodel —

$T = [0, 1]$ ······· closed interval

allocation ; $x : T \to \Omega$, $\int_T x = \int_T i$ (i ; resource)

Core ; $y(t) \succ_t x(t)$ $(t \in S)$, $\int_S y = \int_S i$ となるSが存在しない.

1. Desirability : $x \geq y \Rightarrow x \succ_t y$

etc.

このような経済では，Coreとeq. a. は一致する。

Debreuのmodelは仮定が強すぎるし，Aumannのmodelでは「eq. a. 以外のCoreは存在しない」ということをいっているに過ぎない。これら2つのmodelを変形した多くの論文が発表されているが，本質的にはこれら2つと大差はないようである。Starrは[6]において，Edgeworthの予想を解決するために，non-convexityのmeasureを導入することを提唱した。

§ 2 Measure of Non-convexity

以下，集合 S の convex hull を $[S]$ で表わす。

Def. 3. compact set S の radius を次のように定義する。

$$\mathrm{rad}(S) = \min_{x \in R^n} \max_{y \in S} |x - y|$$

Def. 4 集合 S の inner radius を次のように定義する。

$$r(S) = \sup_{x \in [S]} \inf_{\substack{x \in [T],\, T \subset S \\ T:\, finite}} \mathrm{rad}(T)$$

Th. (Starr) $\mathcal{F}$ を compact set S の family とする。

$\exists L, \forall S \in \mathcal{F},\ r(S) \leqq L$ ならば，$\mathcal{F}$ の任意の finite subfamily $\mathcal{F}'$ と，$\forall x \in [\sum_{S \in \mathcal{F}'} S]$ に対して，

$$\exists y \in \sum_{S \in \mathcal{F}'} S, \quad |x - y| \leqq L\sqrt{n}$$

以下，Starr とは別の idea を紹介する。

Def. 5. R^n の部分集合で次の条件を満たす集合 B の全体からなる family を $\mathcal{L}$ とする。

1) B は閉集合　2) $B \ni x \Rightarrow B \supset \{y \mid y \geqq x\}$

3) $\exists \omega, \forall x \in B\ ;\ \omega \leqq x$

さらに，次の 4)を満たす集合全体の作る family を Ω とする。

4) convex

次のことが成り立つ。

(1) $\alpha > 0,\ \mathcal{B} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathcal{B}$; $\alpha > 0,\ \mathfrak{A} \ni X \Rightarrow \alpha X \in \mathfrak{A}$

(2) $X,\ Y \in \mathcal{B} \Rightarrow X + Y \in \mathcal{B}$; $X,\ Y \in \mathfrak{A} \Rightarrow X + Y \in \mathfrak{A}$

Def. 6. $\Pi = \{ p \mid p = [p_i],\ p_i \geqq 0,\ \sum p_i = 1 \}$ として，$X \in \mathfrak{A}$，$p \in \Pi$ に対して次のように定義する。

$$h(p,\ X) = \inf_{x \in X} \langle p,\ x \rangle$$

次のことが成り立つ。

(3) $\alpha > 0$, $X \in \mathfrak{A} \Rightarrow h(p,\ \alpha X) = \alpha h(p, X)$

(4) $X,\ Y \in \mathfrak{A} \Rightarrow h(p,\ X + Y) = h(p, X) + h(p, Y)$

(5) $0 \leqq \lambda \leqq 1$ のとき，

$$h(\lambda p + (1-\lambda) q,\ X) \geqq \lambda h(p,\ X) + (1-\lambda)\, h(q, X)$$

(6) $x \in X^{\circ},\ X \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow \forall p\ ;\ \langle p, x \rangle > h(p, X)$

Def. 7. $B \in \mathcal{B}$ の部分集合で $\mathfrak{A}$ に属するもの全体を $\mathfrak{A}(B)$ で表わし，次のように定義する．

$$k(B) = \inf_{X \in \mathfrak{A}(B)} \sup_{p \in \Pi} \{ h(p, X) - h(p, [B]) \}$$

次が成立．

(7) $k(B) \geqq 0$ であって，$k(B) = 0 \Leftrightarrow B \in \mathfrak{A}$

(8) $\alpha > 0,\ B \in \mathcal{B} \Rightarrow k(\alpha B) = \alpha k(B)$

(9) $k(B_1 + B_2) \leqq k(B_1) + k(B_2)$

(10) $k(B + a) = k(B)$

§3 二，三の結果

前§で定義した良が，$\mathcal{S}$に属する集合の non-convexity を示す measure と考えられるが，以下において$\mathcal{S}$に属する集合のベクトル和の non-convexity を良を用いて評価しよう。

Def. 8. $x \in C$ があるとき，$|t|$ が十分小さなすべての t に対して $x + ty \in C$ となるならば，y を x における facial direction といい，x における facial direction 全体の集合を x における facial space といい，その次元を facial dimension と呼んで $d(x|C)$ で表わす。

Lemma 1. C が convex で，$x \in C$ ならば，x における facial space は linear space となる。これを $L(x|C)$ で表わす。

Lemma 2. C を convex set とする。$x_1, x_2 \in C$ で $x_2 - x_1$ が x_1 における facial direction ならば，

$$d(x_2|C) \leqq d(x_1|C)$$

であって，等号は $x_2 - x_1$ が x_2 における facial direction になっているときに限り成り立つ。

Lemma 3. $x \in [\mathfrak{S}]$ とすると，$\mathfrak{S}$ の有限部分集合 $\mathfrak{T}$ が存在して，$x \in [\mathfrak{T}]$，$\forall x' \in \mathfrak{T}$ に対して $x' - x$ が $L(x|[\mathfrak{S}])$ に属する。

次の定理が基本的な役割を演ずる。

Th. 1. $\mathfrak{F}$を$\mathcal{S}$に属する集合のfinite familyとする。$x \in [\sum_{S \in \mathfrak{F}} S]$とすると、$\mathfrak{F}$の分割$\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$が存在して、$\mathfrak{F}_1$は高々n個のmemberよりなり、次のように表わされる。

$$x \in \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} S$$

proof.

$$x = \sum_{S \in \mathfrak{F}} x(S), \quad x(S) \in [S]$$

と表現されるが、このような表現の中で、

$$\sum_{S \in \mathfrak{F}} d(x(S) \mid [S])$$

が最小となるものをえらび、

$$\mathfrak{F}_1 = \{ S \mid x(S) \notin S \}, \quad \mathfrak{F}_2 = \{ S \mid x(S) \in S \}$$

とすると、

$$x = \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} x(S) + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} x(S) \in \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} S$$

$\mathfrak{F}_1$のmemberの数が高々nであることをいえばよい。そのために、$S \in \mathfrak{F}_1$に対して、$x'(S) \in S$で、$x'(S) - x(S)$が、$x(S)$におけるfacial directionになるようにえらんだとき、これらが1次独立となることを証明する。もし、1次従属ならば、

$$\sum_{S \in \mathfrak{F}_1} c(S) \{ x'(S) - x(S) \} = 0 \qquad (1)$$

となるすべては0でない実数の組$c(S)$が存在する。

$$x(t|\hat{S}) = x(\hat{S}) + c(\hat{S})\{x'(S) - x(S)\}t$$

$$I(\hat{S}) = \{t \mid t \geqq 0,\ x(t|S) \in [\hat{S}]\},\ A = \bigcap_{S\in\mathfrak{F}_1} I(\hat{S})$$

とすると，$I(S) = [0, \infty)$ となるのは，$[\hat{S}] \in \mathfrak{A}$ より，$c(\hat{S})\{x'(S) - x(S)\} \in \Omega$ のときに限る。$\forall S \in \mathfrak{F}_1$ に対して，$I(\hat{S}) = [0, \infty)$ ならば，(1) より

$$\forall \hat{S};\ c(\hat{S})\{x'(S) - x(S)\} = 0 \qquad \therefore\ \forall S;\ c(S) = 0$$

明らかに，$I(\hat{S})$ は t の正数値を含み，かつ閉区間であるから，A は有界な 0 を下限とする閉区間 $[0, a]$ $(a > 0)$ となる。

$$x = \sum_{S\in\mathfrak{F}_1} x(t|S) + \sum_{S\in\mathfrak{F}_2} x(S)$$

であり，$t \in A$ ならば $\forall S \in \mathfrak{F}_1;\ x(t|S) \in [\hat{S}]$ であるから，

$$\sum_{S\in\mathfrak{F}_1} d(x(t|S) \mid [\hat{S}]) \geqq \sum_{S\in\mathfrak{F}_1} d(x(S) \mid [S]) \qquad (2)$$

$c(S)\{x'(S) - x(S)\}$ は も $x(\hat{S})$ における facial direction であるから，Lemma 2 より

$$d(x(t|S) \mid [S]) \leqq d(x(S) \mid [S]),\ S \in \mathfrak{F}_1,\ t \in A$$

ゆえに，(2) より $t \in A$ のとき，

$$\sum_{S\in\mathfrak{F}_1} d(x(t|S) \mid [S]) = \sum_{S\in\mathfrak{F}_1} d(x(S) \mid [S])$$

$x(t|S) - x(S)$ が $x(t|S)$ の facial direction になるから，$|u|$ が十分小さい正数 u に対して，

$$x(t|S) + u\{x(t|S) - x(S)\} = x(S) + c(S)\{x'(S) - x(S)\}(1+u)t$$

が $[S]$ に属する，すなわち $(1+u)t \in A$ となり，これは A の有界性に反する。以上より $\mathfrak{F}_1$ の member は n 個より多くない。

Lemma 4. $e = [1, \cdots, 1]$, $B \in \mathfrak{L} \Rightarrow [B] + k(B)e \subset B$

Lemma 5. $\mathfrak{F}$を$\mathfrak{L}$に属する集合の finite family とする。

$$\alpha = \max_{S \in \mathfrak{F}} k(S) \Rightarrow \sum_{S \in \mathfrak{F}} [S] + n\alpha e \subset \sum_{S \in \mathfrak{F}} \hat{S}$$

proof. $x \in [\sum_{S \in \mathfrak{F}} S] \Rightarrow x \in \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} [S] + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} \hat{S}$

$\mathfrak{F}_1$ の member の数を l とすれば、定理1より $l \leqq n$ で、

$$x + n\alpha e \in \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} ([S] + \alpha e) + (n-l)\alpha e + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} \hat{S}$$

$$\subset \sum_{S \in \mathfrak{F}_1} \hat{S} + (n-l)\alpha e + \sum_{S \in \mathfrak{F}_2} \hat{S} \subset \sum_{S \in \mathfrak{F}} \hat{S}$$

Th. 2. $\mathfrak{F}$を$\mathfrak{L}$に属する集合の finite family とすると、

$$k(\sum_{S \in \mathfrak{F}} \hat{S}) \leqq n\{\max_{S \in \mathfrak{F}} k(\hat{S})\}$$

proof

$$\sum_{S \in \mathfrak{F}} [S] + n\alpha e \in \mathfrak{A}(\sum_{S \in \mathfrak{F}} \hat{S}), \quad \alpha = \max_{S \in \mathfrak{F}} k(S)$$

$$\forall p \ ; \ h(p, \sum_{S \in \mathfrak{F}} [S] + n\alpha e) - h(p, \sum_{S \in \mathfrak{F}} [S]) = n\alpha$$

$$\therefore \ \sup_p \{ h(p, \sum_{S \in \mathfrak{F}} [S] + n\alpha e) - h(p, \sum_{S \in \mathfrak{F}} [S]) = n\alpha$$

$$\therefore \ k(\sum_{S \in \mathfrak{F}} S) \leqq n\alpha$$

Cor. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}$ で $\sup_{S \in \mathfrak{F}} k(\hat{S}) = \alpha$ ならば、$\hat{S}_i \in \mathfrak{F}$ のとき、

$$\lim_{m \to \infty} k(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \hat{S}_i) = 0$$

References

[1] Edgeworth, E. Y. [1881], Mathematical Psychics. London: C. Kegan Paul.

[2] Shubik, M. [1959], "Edgeworth market games" in A. W. Tucker and R. D. Luce (eds), Contributions to the Theory of Games, IV. Princeton univ. press.

[3] Debreu, G. and H. Scarf [1963] "A limit Theorem on the Core of an economy," International Economic Review 4. 235~246.

[4] Debreu, G. [1963] "On a Theorem of Scarf," Review of Economic Studies, 30. 177~180

[5] Aumann, R. J. [1964] "Markets with a Continuum of Traders," Econometrica, 32, 39~50

[6] Starr, R. [1969] "Quasi-equilibria in markets with nonconvex preferences," Econometrica, 37, 25~38

[7] Arrow, K. J. and Hahn, F. H. [1971], General competitive analysis: Holden-day, INC.