数理解析研究所講究録
191巻 1973年 2-3

三角多項式に関するいくつかの不等式について
—— 大きい篩の理論から

名大 理　小林功武

大きい篩の方法（large sieve method）は，現在では，Halász の着想を吸収して，"(pre-) Hilbert 空間におけるBessel不等式の一つの拡張"に基礎をおく形に整理されているが，この方法の本来の idea は，非負係数の三角多項式 $S(\alpha)=\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i n\alpha}$ に対し，積分 $\int_{-\delta}^{\delta}|S(\alpha)|^2 d\alpha$ $(0<\delta\leq\frac{1}{2})$ と $|S(0)|^2$ とを比較しようとする所にあった．本講演では，この問題に関し，Bombieri-Davenport [1] の結果

$$\int_{-\delta}^{\delta}|S(\alpha)|^2 d\alpha \geqslant \frac{1}{2N}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{1}{(N\delta)^{\frac{1}{2}}}\right)|S(0)|^2$$

及び Montgomery の殆ど最終的な結果 [3]

$$\text{(M)} \qquad \int_{-\delta}^{\delta}|S(\alpha)|^2 d\alpha \geqslant \frac{1}{2N+\frac{15}{8}\delta^{-1}}|S(0)|^2$$

を紹介し，その数論上・技術上の意義を解説する．また，(M) が示唆する "Montgomery の予想"："$\{x_r\}_{r=1}^{R}$ は mod.1 で相異る

実数，$\delta_r = \min_{\substack{s=1,\cdots,R \\ s\neq r}} \min_{n\in\mathbf{Z}} |x_r - x_s - n|$ とするとき，任意の三角多項式 $S(x) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e^{2\pi i n x}$ $(a_n \in \mathbf{C}, M, N \in \mathbf{Z}, N>0)$ に対し

$$\sum_{r=1}^{R} (N + C\delta_r^{-1})^{-1} |S(x_r)|^2 \leqslant \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \text{''}$$

が，講演者の結果 [2] と併せて，篩法に対してもつ意義についても述べる。

References

[1] E. Bombieri - H. Davenport : On the large sieve method , Abh. aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an Edmund Landau , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1968)

[2] I. Kobayashi : A note on the Selberg sieve and the large sieve , Proc. Japan Acad., 49 (1973)

[3] H. L. Montgomery : Topics in multiplicative number theory , Lecture Notes in Mathematics , 227 (1971), Springer Verlag.