数理解析研究所講究録
192巻 1973年 420-431

1963年3月

無限遠の局所化と楕円型作用素のスペクトル

東大理　大脇信一

§1. 序

ここで扱かうのは、非コンパクトな領域における線型楕円型作用素のスペクトルの問題である。コンパクト多様体における楕円型作用素のスペクトル理論は良く知られている。即わち、適当な条件の元で、離散的な点スペクトルが現われ、固有函数展開も証明される。一方、非コンパクトな領域における（例えば R^n での）楕円型作用素については、コンパクトな領域の場合とかなり様相が異なる。つまり、一般に連続スペクトルが生じ、残りが点スペクトルになる。この違いの原因は、非コンパクトな領域をコンパクト化して考えると明確になる。即わち、非コンパクトな領域で係数が有界な楕円型作用素はコンパクト化された多様体の理想境界（無限遠に対応する点）で縮退している。この理想境界における係数の縮退が連続スペクトルの原因になっている。

量子論の基礎付けに関連して古くから調べられているよ

うに、$\mathbb{R}^n$ のような非コンパクトな領域での（形式的自己共役）楕円型作用素を、Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ での自己共役作用素として扱う方法が伝統的である。しかし、最近の線型微分方程式論の進歩から見ると（例えば [6]）、もっと数学的に自然と思われる方法がある。典型的な函数空間は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ や $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ （cf. Schwartz [7]）で、これらは公理論的場の量子論の数学的定式化等にも使われ、かなり良く知られている。空間の構造が $L^2(\mathbb{R}^n)$ のような Hilbert 空間に比べて大変複雑になってくるが、そこから出てくる難かしさの本質的部分は既に解決されている（[6]）。

ここで無限遠の局所化についての考え方を説明する。直線 $\mathbb{R}$ における微分作用素 $\frac{d}{dx}$ を $y=\frac{1}{x}$ という反転で移すと $-y^2\frac{d}{dy}$ になる。$\mathbb{R}$ での $\frac{d}{dx}$ の代りに、無限遠に対応する点 $y=0$ で $-y^2\frac{d}{dy}$ のように縮退したコンパクト多様体 S^1（1次元球面）における微分作用素を考えるのである。函数空間は、$\mathbb{R}$ での無限遠での増大度に関する条件が S^1 では $y=0$ の近傍での局所的性質に置き換えられる。例えば、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $y=0$ ですべての微分が消える S^1 における C^∞ 函数全体の空間 $\dot{C}^\infty(\bar{\Omega})$ と同型である。ここで $\Omega=\{y\in S^1 \mid y\neq 0\}$ かつ $\bar{\Omega}=\Omega\cup\{y=0\}$。

このように無限遠における問題を理想境界の近傍に局所

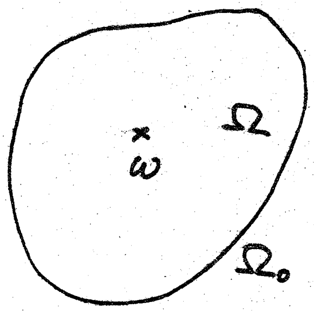
化すると、我々の道具が使え、Hilbert 空間論を基礎にした従来の方法と異なる扱かいが出来る。 この方法がどの程度の影響を将来の発展にもたらすか、特に量子論の数学的基礎付けに関連してどのくらい物理的重要さを持つのか、筆者にはまだ自信を持って予言することが出来ない。 しかし、純粋数学の問題としては、時間をかけて計算しさえすれば、次々に面白い結果が出て来ることは確実といえる状態にある。 つまり、基本的な枠組が出来上がり、どういう計算をすれば良いかの方針がはっきりした段階まで来ているのである。

これに関連した問題として、幾何学等で扱かわれている理想境界の問題がある。 非コンパクト多様体を compact 化してその理想境界を考える方法は昔からある。 特に、開 Riemann 面の Martin 境界や倉持境界、又確率論に関連して発展方程式を調べるのに理想境界を使う研究もある。 一般の微分方程式についても、無限遠での増大度についての L^2 型のような条件を考える代りに、理想境界の近傍に局所化するここでの方法は広い応用を持つはずである。

無限遠の局所化の方法の真価は、Schrödinger 作用素の場合の多体問題等に応用するとはっきりすると思われるが、この報告では二体問題に対応する部分についての結果のみを説明する。

§2. 準備

まず函数空間を定義する。以下の議論では簡単のために次の場合に話を限る事にする。外部問題や多体問題に関連したもっと一般の場合も同様に扱かえる（cf. [6]）。



Ω_0 を（境界のない）σ-compact C^∞ 多様体とし、ω をその中の一点とする。$\Omega=\Omega_0\setminus\omega$ とし、Ω と ω の組を $\tilde{\Omega}$ で表わす。集合としては Ω_0 と $\tilde{\Omega}$ を同一視する。Ω_0 上の（Schwartz）超函数の空間 $\mathcal{D}'(\Omega_0)$ の部分空間 $\mathcal{F}(\Omega_0)$ に対して、次の二つの空間を定義する。

$$\mathcal{F}(\tilde{\Omega})=\left\{u\in\mathcal{D}'(\Omega)\;\middle|\; v|_{\Omega}=u \text{ となる } v\in\mathcal{F}(\Omega_0) \text{ が存在する}\right\}$$

$$\mathring{\mathcal{F}}(\tilde{\Omega})=\left(C_0^\infty(\Omega) \text{ の } \mathcal{F}(\Omega_0) \text{ における閉包}\right)$$

$\mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ の位相は、制限写像 $\mathcal{F}(\Omega_0)\longrightarrow\mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ によって導入し、$\mathring{\mathcal{F}}(\tilde{\Omega})$ には $\mathcal{F}(\Omega_0)$ の閉部分空間としての位相を入れる。$\mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$ は任意の微分が ω で消える Ω_0 における C^∞ 函数全体の空間と一致する。

空間 $C^\infty(\tilde{\Omega})$、$\mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$、$H^{loc}_{(s)}(\tilde{\Omega})$、$\mathring{H}^{loc}_{(s)}(\tilde{\Omega})$ （$H^{loc}_{(s)}$ は局所 Sobolev 空間）等の性質は良く解っている。特に、

そこでの微分作用素　$P : \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$　の値域が閉じているための解析的条件が出せる（cf. [6]）。それを使って §5 の結果等が導き出せる。

$\Omega_0 = S^n$（n 次元球面）の時には、$\mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}) \cong \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$　となる事は良く知られている（cf. Schwartz [7]）。

次に、局所凸空間 $\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{F}$ への線型作用素 P の resolvent と spectrum を定義する。$P : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ の resolvent は

$$\rho_{\mathfrak{F}}(P) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid P - \lambda \text{ は連続な逆写像を持つ} \}$$

と定義する。ここで、$P - \lambda$ の逆は必ずしも稠密な（従って一般に $\mathfrak{F}$ に一致する）定義域を持つ必要がない事を注意する。次に

$$\sigma_{\mathfrak{F}}(P) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid Pu = \lambda u \text{ となる } u \in \mathfrak{F} \text{ で } u \neq 0 \text{ なるものが存在する} \}$$

で P の（点）スペクトルを定義する。私達の方針は、上記の resolvent と spectrum のみ考え、それ以外の（Hilbert 空間論での）連続 spectrum 等を考えない事にある。従って、$\rho_{\mathfrak{F}}(P) \cup \sigma_{\mathfrak{F}}(P) = \mathbb{C}$　となるための条件を出す必要がある。

§3. 定数係数微分作用素のスペクトル

$\mathbb{R}^n$ での定数係数線型微分作用素は Fourier 変換を使って容易に調べられる。 $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ とした時、この $C^\infty = C^\infty(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$、$\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ でのスペクトルは次の様になる。

定理 1. (i) $\sigma_{\mathcal{S}}(P) = \phi$ かつ $\rho_{\mathcal{S}}(P) = \mathbb{C}$。

(ii) $\{P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$ が $\mathbb{C}$ の閉部分集合の時、(特に P が楕円型の時)

$$\sigma_{\mathcal{S}'}(P) = \{P(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

かつ $\sigma_{\mathcal{S}'}(P) \cup \rho_{\mathcal{S}'}(P) = \mathbb{C}$.

従って、$\sigma_{\mathcal{S}'}(P)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ での連続スペクトルと一致する(cf. Schechter [8])。

(iii) $\sigma_{C^\infty}(P) = \mathbb{C}$ かつ $\rho_{C^\infty}(P) = \phi$。

任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対して $P(\xi)$ は P の固有値になり、$e^{ix\cdot\xi}$ が固有函数になる: $P(D)e^{ix\cdot\xi} = P(\xi)e^{ix\cdot\xi}$.
この固有函数系に関する固有函数展開が Fourier 変換を使って (Schwartz [7])

$$u(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\,\hat{u}(\xi)\,d\!\!{}^-\xi \quad、\quad \hat{u}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx$$

で与えられる。 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

上記定理の証明で本質的な所は $P: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ の値域が閉じている点の証明である（cf. Lojasiewicz [5]、Hörmander [2]、Atiyah [1]、etc.）。残りの証明は比較的簡単である。

§4. $\mathbb{R}^n$における楕円型作用素のスペクトル

$P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$、$a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ における楕円型作用素とする。即わち、$x \in \mathbb{R}^n$、$\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ に対し $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ とする。この時、

__定理 2__ $a_\alpha(x) = a_\alpha^0 + b_\alpha(x)$ で $a_\alpha^0 \in \mathbb{C}$ かつ $b_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする。今、$P: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の値域が閉じているとすると、次の事が成り立つ。

(i)
$$\sigma_{\mathcal{S}'}(P) = \sigma_{\mathcal{S}}(P) \cup \sigma_{\mathcal{S}'}(P_0)$$
$$= \sigma_{\mathcal{S}}(P) \cup \Big\{ \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha^0 \xi^\alpha \;\Big|\; \xi \in \mathbb{R}^n \Big\}$$

但し、$P_0 = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha^0 D^\alpha$ も楕円型とする。

(ii)
$$\sigma_{\mathcal{S}'}(P) \cup \rho_{\mathcal{S}'}(P) = \mathbb{C} .$$

この証明は、$P: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ の値域が $N({}^tP)^\perp$ になる事に注意すれば、そう難かしくない。

更に、固有値（$\sigma_{\mathcal{S}}(P)$ に属する）の多重度が有限になる事や、$\sigma_{\mathcal{S}}(P)$ の離散性（適当な条件のもとで）等も導びかれる。$b_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の条件が弱くなる時には、$\sigma_{\mathcal{S}}(P)$ を替えてやれば良い。(i) の和で $\sigma_{\mathcal{S}}(P)$ と $\sigma_{\mathcal{S}'}(P_0)$ が共通部分を持つかどうかは、Schrödinger 作用素の正の固有値の存在（L^2で）$\mathbf{2}$ 問題に対応しているが、一般に $\sigma_{\mathcal{S}}(P) \cap \sigma_{\mathcal{S}'}(P_0) = \phi$ が言えると思われる（cf. Kato [3] etc.]。

上の結果より、$\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$P(e^{ix\cdot\xi} + u_\xi(x)) = P_0(\xi)\cdot(e^{ix\cdot\xi} + u_\xi(x))$$

となる $u_\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の存在が言える。$\sigma_{\mathcal{S}}(P) \cap \sigma_{\mathcal{S}'}(P_0) = \phi$ ならば u_ξ は一意的に決まる。これを二つの球面波に分け、その摂動固有函数 $e^{ix\cdot\xi} + u_\xi(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ と $\sigma_{\mathcal{S}}(P)$ に属する固有函数を使って固有函数展開を証明するのが、この先の方針である。

§5. $C^\infty(\bar{\Omega})$ における楕円型作用素

以上の事から解るように、$P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の値域が閉じている事を示すのが一つの鍵になる。言い替えれば、方程式 $Pu = f$、$u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ の解の存在定理である。$\mathbb{R}^n$ でなくても、例えば外部問題や

多体問題に関しても事情は大体同じで、作用素の閉値域を示すのが一つの難関になる。そこで、序論で説明した無限遠の局所化の方法が有効に使える。方程式に応じて色々なコンパクト化が必要になると思われるが、ここでは一番単純な一点コンパクト化で済む場合について説明する。これは §3、4 の $\mathcal{S}(R^n)$ での結果に使え、又物理的には二体問題に対応している。L^2 理論でもこの場合についてのみ詳しく調べられている(e.g. [4])。

以下 §2 と同じ記号を使う。

$y=\frac{x}{|x|^2}\in R^n$ で Δ_x (Laplacian) を変換すると $|y|^4\Delta_y+2(2n-1)|y|^2\langle y,\partial_y\rangle$ となる。従って、Schrödinger 作用素を含むには、

$$(5.1)\quad P=|y|^\delta\tilde{P}(y,D_y)+\sum_{|\alpha|<m}c_\alpha(y)D_y^\alpha\quad,\ \delta>m$$

で $\tilde{P}$ は $y=0$ の近傍で m 階楕円型と仮定して十分である。(実際にはもっと弱い仮定で良い。ただし擬微分作用素の理論をちょっと変形する必要がある。)

係数 $c_\alpha(y)$ に条件をつける為に、次の記号を使う。

$$c(y)\lessapprox|y|^a$$

とは、すべての指数 α に対し

$$|D^\alpha c(y)|=O(|y|^{a-|\alpha|})\ ,\quad y\to 0$$

になる事とする。

$\tilde{\Omega}=\Omega^{\cup}\omega$ はコンパクトとする。

__定理3__　PはΩでC^∞係数m階楕円型$(m\geqq 1)$の線型微分作用素で、$\omega=\{y=0\}$の近傍で(5.1)の型に書け、$\hat{P}$はωの近傍で楕円型とする。正数$\varepsilon>0$が存在して、すべての$|\alpha|<m$に対して

(5.2)　$c_\alpha(y) \lesssim |y|^{\delta-m+|\alpha|+\varepsilon}$

と仮定する。この時、$P: \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$の値域は閉じていて、その零空間$\{u\in \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega}) \mid Pu=0\}$の次元は有限である。

この定理の証明は長くて大変だが、ωの十分小さい近傍での次の評価を出すのが中心になる。

(5.3)　$\|u\|_{(s+m)} \leqq C\left\|\frac{Pu}{|x|^\delta}\right\|_{(s)} + C\|u\|_{(t)}$

$u\in \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$ & $s=0,1,2,\cdots$ & $t<s+m$

(5.4)　$\||x|^\delta w\|^\circ_{(m-s)} \leqq C\|{}^tPw\|^\circ_{(-s)} + C\|w\|^\circ_{(-s-m-1)}$

但し、$\|w\|^\circ_{(t)} = \inf\{\|v\|_{(t)} \mid v\in H^c_{(t)}(\Omega_0)$ かつ $v|_\Omega = w\}$で$\|\cdot\|_{(t)}$はSobolev norm。この時

$\||y|^k u(y)\|_{(s)} \leqq C\||y|^{k+l}u(y)\|_{(s+l)}$

$l, s=0,1,2,\cdots$ & $k\in\mathbb{R}$ & $u\in \mathring{C}^\infty(\tilde{\Omega})$

のような不等式が役に立つ。(5.3)から零空間の次元

の有限性が出、(5.4) から閉値域が証明できる (cf. [6])。

上の定理は、Schrödinger 作用素 $-\Delta + q(x)$, $x \in R^n$ の L^2 理論で、$q(x) = O(|x|^{-2-\varepsilon})$, $x \sim \infty$ の場合に相当している。 $q(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ 又は $O(|x|^{-\varepsilon})$ の場合に相当する結果を出すには、(5.3)、(5.4) に相当する不等式の剰余項を落すのに、単に Rellich の定理を使うのみで済まず一工夫必要である。

参考文献

[1] Atiyah, M.F., Resolution of Singularities and Division of Distributions, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) 145–150

[2] Hörmander, L., On the division of distributions by polynomials, Ark. Mat., 3 (1958), 555–568.

[3] Kato, T., Growth properties of solutions of the reduced wave equation with a variable coefficient, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959) 403–425

[4] Kuroda, S.T., & Konno, R., 楕円型偏微分作用素のスペクトル (東大数学教室セミナリーノート 27) 1972

[5] Lojasiewicz, S., Sur le problème de division, Studia Math., 18 (1959), 87–136.

[6] Ohwaki, S., Boundary problems for general linear differential equations, Thesis, to appear

[7] Schwartz, L., Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1959

[8] Schechter, M., Spectra of partial differential operators, North-Holland, Amsterdam-London, 1971

[6]の結果の一部は、数理解析研究所講究録 145 (1972) 26－47 及び 162 (1972) 1－9 に出ている。但し、記号や定義が次々に変更されているので注意されたい。

以　上