数理解析研究所講究録
192巻 1973年 382-397

Phragmén-Lindelöf-Hörmander principle について

東大理　三輪 哲二

§1

凸領域における実解析解の大域的存在についての，Hörmander[1] の結果を system の場合に考える。ここでは，以下述べる Hörmander の結果のうち 十分条件のみを拡張する*。なお，同じ問題に対する hyperfunction によるアプローチとしては 河合[2] を参照せよ。

まず Hörmander の結果。

$P(D)$ を n 変数の定数係数偏微分作用素

$\Omega\ (\subset \mathbb{R}^n)$ を 凸領域

$\mathcal{A}(\Omega)$ を実解析函数の全体　　とする。

定理　$P(D)\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ となるための必要十分条件は

Ω 内の 勝手なコンパクト凸集合 K に対して Ω 内にコンパクト凸集合 K' と 定数 $\delta > 0$ が存在して 次の条件 (K, K', δ) が成立する事である。

*：必要条件も拡張される．p.11 を見よ．

(K, K′, δ)

$\mathbb{C}^n$における多重劣調和函数 $\varphi(\zeta)$が

$$\varphi(\zeta) \leqq H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \delta|\zeta| \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$\varphi(\xi) \leqq 0 \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,\ P_m(\xi) = 0$$

を満たせば

$$\varphi(\zeta) \leqq H_{K'}(\mathrm{Im}\,\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n,\ P_m(\zeta) = 0$$

但し $H_M(\eta) = \sup_{x \in M} \langle x, \eta \rangle$

条件(K, K′, δ)の事をPhragmén-Lindelöf-Hörmander principleと呼ぼう。(略してP-L-H)如何なるP_mに対してP-L-Hが成立するかは，Hörmander[1]に詳しく書かれているが，ここではtrivialな解説をしておく。

1° P(D)がellipticの時

$P_m(\zeta) = 0$ なら $|\zeta| \leqq C|\mathrm{Im}\,\zeta|$ (Cはζに依らぬ)となるから δを十分小さく取ってK′をKより少しだけふくらませてやれば(K, K′, δ)が成立する。

2° $P(D) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ の時

$\varphi(\zeta) \leqq H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \delta|\zeta| \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$ および

$\varphi(\xi) \leqq 0 \quad \xi \in \mathbb{R}^n$ から

$\varphi(\zeta) \leqq H_{K'}(\mathrm{Im}\,\zeta) \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$ が出ることが言えれば十分であるが，$\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ $(\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n)$に対し

$\Psi(z)=\varphi(\xi_1+z\xi_2)\qquad z\in\mathbb{C}$ を考えてやれば，普通の Phragmén-Lindelöf の定理の一例になる。（例えば，$D_\nu=\{|z|<\nu,\ \mathrm{Im}\,z\geqq 0\}$ で境界値問題を $\Delta u=0$ について解いてやり $u(\nu\sqrt{-1})$ の値を $\nu\to\infty$ で考えよ。）

3° $P(D)=\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\qquad n\geqq 3$

この作用素が $\mathbb{R}^n$ $(n\geqq 3)$ で非可解であることは，イタリアの Puccinini が始めて証明（De Giorgi [3]）した。$\varphi(\zeta)=\log|\zeta_1\zeta_3|$ と取れば (K,K',δ) は成立しない事がすぐわかる。なお Hörmander [1] は，P-L-H principle が成立するなら，$\{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus 0\,;\,P_m(\xi)=0\}$ は codim 1 である事を言っている。

§2

システムの場合に移ろう。簡単のため未知函数が一個の場合に限ろう。

D を n 変数定数係数偏微分作用素の作る環とする。これは $\mathbb{C}[\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$ なる n 変数多項式環と同一視する。

$$\begin{cases} P_1u=f_1\\ \quad\vdots\\ P_su=f_s\end{cases}$$

なる方程式が，適合条件を満たす $f_1,\cdots,f_s$ に対して

解けるかどうかという事は，$I=(P_1,\cdots,P_s)$ を $P_1,\cdots P_s$ の生成する D のイデアルとする時 $\mathrm{Ext}^1_D(D/I,\ \mathfrak{a}(\Omega))=0$ が成立するかどうかと同じである。我々はイデアル I を方程式系と思う事にする。（正確には D/I を方程式系と言うべきであるが。Cf 佐藤－河合－柏原［4］）

$I=I_1\cap\cdots\cap I_t$ をイデアルの準素分解
$J_1,\cdots,\ J_t$ を対応する素イデアル
$V_1,\cdots,\ V_t$ を対応する既約部分多様体

とする。

I^∞ を $\{P_m\ ;\ P_m$ はある $P\in I$ の主要部$\}$ から生成される D のイデアル

$V^\infty(I)=V(I^\infty)$ をその零点集合とする。これは佐藤－河合－柏原［4］が方程式系のサポートと呼んでいるものに相当する。しかし，今は，もう少し詳しい情報を必要とする。

$V_i^\infty=V^\infty(J_i)$ とし $(V_1^\infty,\cdots,V_t^\infty)$ をシステム I の特性多様体の無限遠成分と呼ぶ。我々は V_i^∞ を $\mathbb{C}^n$ の中で考えていることに注意。以上の準備のもとに次の定理が成り立つ。

定理 1.

Vを既約部分多様体，V^∞を無限遠成分とする。
V^∞に対してP-L-H principleが成立するとせよ。即ち
$\varphi(\zeta)$ を多重劣調和として

$$\varphi(\zeta) \leqq H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \delta|\zeta| \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$\varphi(\xi) \leqq 0 \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \cap V^\infty$$

ならば

$$\varphi(\zeta) \leqq H_{K'}(\mathrm{Im}\,\zeta) \qquad \zeta \in V^\infty$$

この時，Vに対して次の評価が成立する。

定数$\delta' > 0$ と，定数 $C(R,T)$ (R, Tに依る)
があって，$\varphi(\zeta)$ が多重劣調和で

$$\varphi(\zeta) \leqq H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \delta'|\zeta| \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

$$\varphi(\zeta) \leqq R|\mathrm{Im}\,\zeta| + T|\mathrm{Re}\,\zeta| \qquad \zeta \in V$$

ならば

$$\varphi(\zeta) \leqq H_{K'}(\mathrm{Im}\,\zeta) + 2T|\mathrm{Re}\,\zeta| + C(R,T) \qquad \zeta \in V$$

定理 2.*

Iをシステムとする。Kに対してK', δがあって
各無限遠成分に対してP-L-H principleが成立すれば $\mathrm{Ext}^1_D(D/I, \mathcal{a}(\Omega)) = 0$

* p.11 を見よ.

§3

証明であるが，定理1からEhrenpreis－Palamodovの Fundamental principleを用いて（Palamodov［6］）定理2が出ることは，Hörmander［1］の単独の時と全く同じである。また定理1，　即ち V_i^∞ の情報から V_i の情報を出す所も，以下述べる両者の関係さえわかれば，単独の時と同じ論法がわずかな修正だけで通用するのでくり返さない。

Vを $\mathbb{C}^n$の中のk次元既約（代数的）多様体
$V_\nu = \{ \zeta \in \mathbb{C}^n ; \nu\zeta \in V \}$ （$\nu > 0$）とする。
この時 $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = V^\infty$ が以下述べる形で成立する。

まず，Remmert & Stein［5］に依る解析的集合の局所表示に関する“埋蔵定理”を想い出そう。Vが，今の場合多項式の共通零点であることから，証明を少し補えば，次の大域的な表示が可能である。

命題1.

適当な座標変換の後，次の様な多項式

$P^{(\ell)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_k ; \zeta_\ell)$ 　　$\ell = k+1, \cdots, n$

が存在する。

(a) $\deg P^{(\ell)} = m_\ell$ であり
$P^{(\ell)}_{m_\ell}(0, \cdots, 0; 1) \neq 0$

(b) $P^{(\ell)}$ は 重複因子を持たない。

(c) $V^* = \{ \zeta \in \mathbb{C}^n ; P^{(\ell)}(\zeta) = 0 \quad \ell = k+1, \cdots, n \}$
とすると V は V^* のある既約成分に一致する。

さて，$P^{(\ell)}$ の判別式を $R^{(\ell)}$ その零点を Δ_ℓ $\Delta = \bigcup_{\ell=k+1}^{n} \Delta_\ell$
としよう。$(\zeta_1, \cdots, \zeta_k) \notin \Delta$ ならば十分大きな ν に対して
$$P^{(\ell)}(\nu\zeta_1, \cdots, \nu\zeta_k ; \nu\zeta_\ell) = 0 \text{ の根}$$
$$\zeta_\ell^{(\mu)}(\zeta_1, \cdots, \zeta_k ; \nu) = \zeta_\ell^{(\mu)}(\nu) \quad \mu = 1, \cdots, m_\ell$$
は相異なる。よって $\nu \to \infty$ の時の収束を考えることができるが，その意味で $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu^*$ を考える事にすると，(a) の取り方から 次が成り立つ。

命題 2.
$$\lim_{\nu\to\infty} V_\nu^* = V^{*\infty}$$
しかも収束の仕方は，$V^{*\infty}$ の各既約成分において一定の重複度で収束する。

V_ν の極限については 次の事は明らかである。

命題 3.

$\lim_{\nu\to\infty} V_\nu$ は $V^{*\infty}$ の既約成分のいくつかの合併になる。

さて一般に次の事が成り立つ。

命題 4.

I を勝手なイデアル V をその零点集合とすると重複度を考えずに単に集合として

$$\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = V(I^\infty)$$

以上に依り

命題 5.

V を既約な代数的多様体とすると,

$$\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = V^\infty$$

しかも収束は, V^∞ の各既約成分に対して一定の重複度で収束する。

§4

注意 1. $\dim V(I) = 1$ ならば §1 で述べた 1° 或いは 2° のいずれかの場合になるので, 大域解は存在する。特に $\mathbb{C}^2$ ではすべてのシステムが解ける。(Cf Zuily [7])

注意2。 システムのサポートを重複成分に分けたものを考えると，それは必ずしも無限遠の成分になっていない。

例 $I=(\zeta_1^2,\ \zeta_1\zeta_2+\zeta_3)$ は 素イデアル $J=(\zeta_1,\ \zeta_3)$ に属する準素イデアル であるが

$$I^\infty=(\zeta_1^2,\ \zeta_1\zeta_2,\ \zeta_1\zeta_3,\ \zeta_3^2)$$
$$=(\zeta_1,\ \zeta_3^2)\cap(\zeta_1^2,\ \zeta_2,\ \zeta_3)$$

となって 余計な $(\zeta_1^2,\ \zeta_2,\ \zeta_3)$ が出てくる。

参考文献

[1] Hörmander: On the existence of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients

[2] 河合 隆裕: On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (II)

以上二つは to appear

[3] De Giorgi: Solutions analytiques des equations aux derivees partielles a coefficients constants — Seminaire Goulaouic-Schwartz 1971-1972

[4] 佐藤, 河合, 柏原: Microfunctions and pseudo-differential equations — Springer lecture note 1973

[5] Remmert, Stein: Uber die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen — Math. Annalen. 126 (263–306) 1953

[6] Palamodov: Linear differential operators with constant coefficients — Springer 1970

[7] Zuily: Sur l'existence de solutions analytiques globales des equations aux derivees partielles lineaires a coefficients constants en deux variables independantes d'apres E. De Giorgi — Seminaire Goulaouic Schwartz 1971–1972

On the Global Existence of Real Analytic Solutions of Systems of Equations with Constant Coefficients

By Tetsuji Miwa

Department of Mathematics, University of Tokyo

In this note we shall give necessary and sufficient conditions for the global existence of real analytic solutions of systems of equations with constant coefficients. Recently L. Hörmander [1] has given those for a single equation. Our result is a direct extention of his.

1. Statements of the problem and the theorem

We denote by D the ring of partial differential operators with constant coefficients in C^n. D can be regarded as $C[\zeta_1,\cdots,\zeta_n]$. Let M be a D-module of finite type. Then it has a presentation

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow D^t \xleftarrow{P(\zeta)} D^s \tag{1.1}$$

where $P(\zeta)$ is a $t\times s$ matrix with elements in D, and we can consider a system of equations with constant coefficients ${}^tP(D)$ where $D = (D_1,\cdots,D_n)$ and $D_i = -\sqrt{-1}\partial/\partial x_i$. Such a presentation is, however, not unique, and it is not ${}^tP$ but M that has an intrinsic meaning. Therefore we call M a system. (See V.P. Palamodov [2], M. Kashiwara [3], and M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara [4].)

Now let Ω be a convex domain in R^n and $A(\Omega)$ be the set of real analytic functions in Ω. $\mathrm{Ext}_D^1(M,A(\Omega))$ gives the obstruction of the global existence of real analytic solutions of inhomogeneous system ${}^tP(D)u = f$ where f satisfies compatibility conditions ${}^tQ(D)f = 0$. Our problem is when

$$\mathrm{Ext}_D^1(M,A(\Omega)) = 0 \tag{1.2}$$

is valid. Note that $\mathrm{Ext}_D^1(M,A(\Omega))$ is independent of the choice of the presentation (1.1).

Before stating our theorem, let us recall some notions in commutative algebra. (See J.P. Serre [5] and V.P. Palamodov [2].) Let $0 = M_1 \cap \cdots \cap M_\ell$ be a primary decomposition of the submodule 0 in M. Ass(M) is the set of associated prime ideals of M, namely, the set of radicals $\underline{p}_i = r_M(M_i)$ $(i=1,\cdots,\ell)$. $V(M) = \{V_1,\cdots,V_\ell\}$ is the set of characteristic varieties, that is, the set of irreducible algebraic varieties associated to ideals in Ass(M).

We introduce the notion of components at infinity of characteristic varieties. (See Sato, Kawai and Kashiwara [4] which introduced the notion of supports of systems.) Set V be an irreducible algebraic variety in C^n and $\underline{p}$ be its defining prime ideal. Denote by $\underline{p}^\infty$ the homogeneous ideal generated by $\{P_m \in D\ ;\ P_m$ is the principal part of some P in $\underline{p}\}$, and set $V^\infty = V(\underline{p}^\infty)$. V_i^∞ $(i=1,\cdots,\ell)$ is called componets at infinity of characteristic varieties of M. We write $\mathrm{Ass}^\infty(M)$ for the set $\{V_1^\infty,\cdots,V_\ell^\infty\}$.

Following the genius of Mr. Hörmander, we can state conditions for (1.2) being true. Let K, K' be compact convex sets in Ω and $\delta > 0$. We say that Phragmén-Lindelöf-Hörmander principle is valid for V^∞, if every plurisubharmonic function $\phi(\zeta)$ in C^n with

$$\phi(\zeta) \leqq H_K(\mathrm{Im}\zeta) + \delta|\zeta| \qquad \text{if } \zeta \in C^n,$$

$$\phi(\xi) \leqq 0 \qquad \text{if } \xi \in V \cap R^n,$$

also has the bound

$$\phi(\zeta) \leqq H_{K'}(\mathrm{Im}\zeta) \qquad \text{if } \zeta \in V \cap C^n$$

Our theorem runs as follows.

Theorem Let Ω be open and convex in R^n. Then $\mathrm{Ext}_D^1(M,A(\Omega)) = 0$ if and only if for every compact set $K \subset \Omega$ there exist another compact set $K' \subset \Omega$ and $\delta > 0$, so that Phragmén-Lindelöf-Hörmander principle is valid for any $V_i^\infty \in \mathrm{Ass}^\infty(M)$.

Corollary $\mathrm{Ext}_D^i(M,A(\Omega)) = 0$ $(i \geqq 2)$ holds for an arbitrary system.

2. Outline of the proof

To utilize the analytic machinary of Hörmander, we need two considerations. One is geometric and about the relation between V_i and V_i^∞, and the other is algebraic and about reducing the problem to the case where M is coprimary, that is, for $a \in D$ and $m \in M$, if $m \neq 0$ and $a \notin r_M(0)$, then $am \neq 0$.

Proposition 1. Let V be a k-dimensional irreducible algebraic variety in C^n and $V_\nu = \{\zeta \in C^n;\ \nu\zeta \in V\}$. Then $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = V^\infty$ and the multiplicity of convergence is constant on each irreducible component of V^∞.

To explain the meaning of convergence and to prove Proposition 1, we recall "Einbettungssatz" of R. Remmert and K. Stein [6]. A slight modification of the proof of it shows

<u>Proposition</u> 2. After a suitable linear coordinate transformation, if necessary, there exist polynomials $P_m^{(\ell)}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k;\zeta_\ell)$ $(\ell=k+1,\cdots,n)$ with the following properties.

(a) $\deg P^{(\ell)} = m$ and $P_{m_\ell}^{(\ell)}(0,\cdots,0;1) \neq 0$.

(b) $P^{(\ell)}$ has no multiple factors.

(c) Let $V^* = \{\zeta \in C^n;\ P^{(\ell)}(\zeta) = 0,\ \ell=k+1,\cdots,n\}$. Then V is identical to some irreducible component of V^*.

Now let $\Delta = \Delta_{k+1} \cap \cdots \cap \Delta_n$ where Δ_ℓ is the zeros of the discriminant of $P^{(\ell)}$. For $(\zeta_1,\cdots,\zeta_k) \notin \Delta$ and a large ν there exist m_ℓ distinct roots $\zeta_\ell^{\mu}(\zeta_1,\cdots,\zeta_k;\nu)$ $(\mu = 1,\cdots,m_\ell)$ of the equation $P^{(\ell)}(\nu\zeta_1,\cdots,\nu\zeta_k;\nu\zeta_\ell^{(\mu)}(\nu)) = 0$. Then $(\zeta_1,\cdots,\zeta_k,\zeta_{k+1}^{(\mu_{k+1})}(\nu),\cdots,\zeta_n^{(\mu_n)}(\nu))$ is in V_ν^*, and $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu^* = V^{*\infty} = \{\zeta\ C^n;$ $P_{m_\ell}^{(\ell)}(\zeta) = 0,\ \ell = k+1,\cdots,n$. Moreover the multiplicity of convergence is constant on each irreducible component of V^* . It is easy to see that $\lim_{\nu\to\infty} V_\nu = V^\infty$ as point sets, hence Proposition 1.

Once we have Proposition 1. the sufficiency of Theorem can be proven following Hörmander's argument. Let

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow D^t \xleftarrow{\ P\ } D^{s_0} \xleftarrow{\ Q_1\ } D^{s_1} \xleftarrow{\ Q_2\ } D^{s_2} \longleftarrow \cdots\cdot$$

be a free resolution of M. Then

$$\mathrm{Ext}^i_D(M,A(\Omega)) = \frac{\mathrm{Ker}\ (\ \mathrm{Hom}_D(D^{s}i\text{-}1,A(\Omega)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(D^{s}i,A(\Omega))\ )}{\mathrm{Im}\ (\ \mathrm{Hom}_D(D^{s}i\text{-}2,A(\Omega)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(D^{s}i\text{-}1,A(\Omega))\ )}$$

$$= \mathrm{Ext}^1_D(D^{s}i\text{-}2/Q_{i-1}D^{s}i\text{-}1,A(\Omega)).$$

Hence to prove Corollary it is sufficient to show

<u>Proposition</u> 3 If $D^{t}1 \longleftarrow D^{t}2 \longleftarrow D^{t}3$ is exact, $r_{D^{t}2/SD^{t}3}(0) = 0$, namely $\mathrm{Ass}(D^{t}2/SD^{t}3) = \{0\}$.

Now we proceed to the necessity of Theorem. With appropriate modifications for systems, we can follow Hörmander's argument, but we can prove the necessity only for V_j with maximum dimension for $i = 1,\cdots,\ell$. Accordingly we need the following reduction.

<u>Proposition</u> 4. (Serre [5] I-17 Corollaire 3) For any associated prime ideal $\underline{p}$ of M, there exists a coprimary submodule $N \subset M$ such that $r_N(0) = \underline{p}$.

<u>Proposition</u> 5. Let N be a submodule of M. Then $\mathrm{Ext}^1_D(N,A(\Omega)) = 0$ if $\mathrm{Ext}^1_D(M,A(\Omega)) = 0$.

<u>Proof</u>. In an exact sequence

$$\mathrm{Ext}^1_D(M,A(\Omega)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_D(N,A(\Omega)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_D(M/N,A(\Omega)),$$

$\mathrm{Ext}^1_D(M,A(\Omega)) = 0$ by the assumption, and from Corollary $\mathrm{Ext}^2_D(M/N,A(\Omega)) = 0$, the result follows.

References

[1] L. Hörmander: On the existence of real analytic solution of differential equations with constant coefficients (to appear).

[2] V.P.Palamodov; Linear differential operators with constant coefficients. Springer (1970)

[3] M. Kashiwara: An algebraic study of systems of partial differential equations. Local theory of differential operators. Sugaku-shinko-kai. (1970).

[4] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara; Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture notes in Math. No. ,(1973).

[5] J.P. Serre: Algèbre locale. Multiplicité. Lecture notes in Math. Springer, No. 11 (1965).

[6] R. Remmert and K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Annalen, 126, 263-306 (1953).

(Received at RIMS May 17, 1973)