数理解析研究所講究録
195巻 1973年 70-76

多タイプ Galton-Watson process の漸近的性質について

佐賀大 理工 小倉幸雄

[1] 差分方程式系

$$
(1)\begin{cases} u(n+1;s) = F(u(n;s)), & n \in \langle 0, \infty \rangle \\ u(0;s) = s, \quad 0 \le s \le 1,^{1)} & s \in \mathbb{R}^d, \end{cases}
$$

但し、$F^i(s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} p_\alpha^i s^\alpha, \quad p_\alpha^i \geqq 0, \quad \sum_\alpha p_\alpha^i = 1,$

の解 $0 \le u(n;s) \le 1$ を母函数にもつ $\mathbb{Z}_+^d$ 上の Markov process $(Z(n), P_\alpha)$ を多タイプ Galton-Watson process という。方程式系(1)について、次のことが知られている。

<u>定理1</u>（Sevastyanov [4]）原点に最も近い fixed point q が唯一つ存在してそれは次の意味で stable である：

$$
(2) \quad \lim_{n\to\infty} u(n;s) = q, \qquad 0 \le s \le q.
$$

<u>行列 $Q = \left[\partial F^i(q)/\partial s^j\right]_{i,j=1}^d$</u> の Perron-Frobenius <u>根を ρ と</u>

1) $s = (s^1, \cdots, s^d)$ とするとき、$0 \le s^i \le 1$, $i \in \langle 1, d \rangle$ の意味である。この記法は行列についても用いる。

するとき，(2)の速さについて次の定理がある．

定理2 (Jirina [2], Joffe and Spitzer [3]) 行列Qが positively regular[2)]で，$\rho < 1$ ならば $A(s) \neq 0$ $(\in \mathbb{R})$ があって

$$(3) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{u(n;s) - q}{\rho^n} = A(s)u, \qquad 0 \leq s \leq q,$$

但し u は ρ に対応する行列Qの右−固有ベクトル，

がなりたつ．更に $\mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ 上の分布 $\{P_i^*(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}}$ があって

$$(4) \quad \lim_{n \to \infty} P_{e_i}(Z(n) = \alpha \mid Z(n) \neq 0,\ Z(n) \nrightarrow \infty) = P_i^*(\alpha),$$
$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\},\ i \in \langle 1, d \rangle,$$

がなりたつ．

$\boxed{2}$ 行列Qが positively regular でないとき，上の(3)(4)が成り立たないことが知られている．

反例 (Jirina [2], Sevastyanov [4]) 1) $\Phi(\xi)$を1変数の母函数とし，$F^1(s) = \Phi(s^2)$, $F^2(s) = \Phi(s^1)$とすれば，明らかに

$$U^i(n;s) = \begin{cases} \Phi_n(s^i), & n : \text{even}, \\ \Phi_n(s^{i+1}), & n ; \text{odd}, \end{cases}$$

但しΦ_nはΦのn回の iteration で，$i = 2$ のとき $i+1 = 1$とする．

2) Φを 1) と同じとし，$F^1(s) = \Phi(s^2)$, $F^2(s) = s^1$ とす

---

2) $N \in \langle 1, \infty \rangle$ が存在して，$Q^N > 0$ の意味である．

る．このときは

$$U^i(n;s) = \begin{cases} \Phi_{n/2}(s^i), & n \text{ even}, \\ \Phi_{\{n-(-1)^i\}/2}(s^{i+1}), & n: \text{odd}. \end{cases}$$

上の2つの反例を説明するものとして，次の定理がある．

<u>定理3</u>（Jirina [2]）行列Qが irreducible で，

$$(5) \qquad \lim_{s \uparrow q} \partial^2 F^i(s) / \partial s^j \partial s^k < \infty, \qquad i, j, k \in \langle 1, d \rangle$$

ならば，定数 $0 < C_1 < C_2$ があって

$$(6) \qquad C_1 \leq \varliminf_{n \to \infty} \frac{|U^i(n;s) - q^i|}{\rho^n} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \frac{|U^i(n;s) - q^i|}{\rho^n} \leq C_2,$$

$$i \in \langle 1, d \rangle, \quad 0 \leq s \leq q.$$

$\boxed{3}$ 行列Qの固有根を絶対値の大きい順にならべて，

$$\rho = \mu_1 \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_d|$$

とする．このとき我々は次の定理を得る．

<u>定理4</u> $\rho < 1$，$|\mu_d| > 0$ で

$$(7) \qquad \lim_{s \uparrow q} \partial^l F^i(s) / (\partial s^1)^{\alpha^1} \cdots (\partial s^d)^{\alpha^d} < \infty, \quad i \in \langle 1, d \rangle$$

$$\alpha^i \in \langle 0, l \rangle, \quad \alpha^1 + \cdots + \alpha^d = l,$$

$$l = [\log |\mu_d| / \log \mu_1] + 1,$$

ならば，$h \in \langle 1, d \rangle$ が存在して，$i \in \langle 1, d \rangle$ と $\nu \in \langle 0, h-1 \rangle$

に対して $m_{i\nu} \in \langle 0, d-1 \rangle$ と $A_{i\nu}(s)$ があって

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u^i(nh+\nu; s) - q^i}{\rho^{nh}\, n^{m_{i\nu}}} = A_{i\nu}(s), \qquad 0 \leq s \leq q$$

がなりたつ．更にもし $A_{i\nu}(s) \not\equiv 0$ ならば $\mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}$ 上の分布 $\{P^*_{i\nu}(\alpha)\}$ があって

$$(9) \quad \lim_{n\to\infty} P_{e_i}\{Z(nh+\nu)=\alpha \mid Z(nh+\nu) \neq 0,\ Z(n) \not\to \infty\}$$

$$= P^*_{i\nu}(\alpha), \qquad \nu \in \langle 0, h-1 \rangle,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \{0\}.$$

注意　連続径数の Galton-Watson process のとき，即ち

$$\frac{d\,u^i(t;s)}{dt} = f^i(u(t;s)), \qquad u(0;s) = s,$$

但し $f^i(s) = b^i\left(\sum_{\alpha\neq e_i} P^i_\alpha s^\alpha - s^i\right)$, $P^i_\alpha \geq 0$, $\sum_\alpha P^i_\alpha = 1$, $b^i > 0$,

の解 $u^i(t;s)$ を考えるとき，(8)(9) のような周期性はない．

$\boxed{4}$ 定理4の証明は Sternberg [5] の方法によって証明される次の Lemma による：

Lemma 1　q を差分系 $u(n+1;s) = F(u(n;s))$, $u(0;s) = s$ の不動点とし，$Q = [\partial F^i(q)/\partial s^j]_{i,j=1}^d$ の特性根を $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \cdots \geq |\mu_d|$ とする．このとき，$1 > |\mu_1| \geq |\mu_d| > 0$ で，自然数 $k > \log|\mu_d|/\log|\mu_1|$ と q の近傍 U があって $F^i(s) \in C^k(U)$, $i \in \langle 1, d \rangle$ ならば，ある q の近傍 $V \subset U$ と

ベクトル値函数 $A(s)=(A^1(s),\cdots,A^d(s))$, $A^i(s)\in C^k(V)$, $A^i(q)=0$, $\det[\partial A^i(q)/\partial s^j]\neq 0$, 及び

$$g_n^i(\zeta)=\mu_i^n\{\zeta^i+\sum_{\mu^\alpha=\mu_i} b_\alpha^i(n)\zeta^\alpha\},^{3)}$$

$b_\alpha^i(n)$ は n に関する $(l-1)$- 次以下の多項式

という形の $g_n(\zeta)=(g_n^1(\zeta),\cdots,g_n^d(\zeta))$ があって,

(10) $\quad A(u(n;s))=g_n(A(s)),\qquad s\in V$

がなりたつ.

(定理4の略証) (7) より q のある近傍 U への $F(s)$ の拡張 $\tilde{F}(s)$ で, $\tilde{F}^i(s)\in C^l(U)$ となるものがある. このとき対応する解 $\tilde{u}(n;s)$ は $u(n;s)$ の拡張になっている. $\tilde{F}$ を改めて F とかき Lemma 1 を用いる. (2) より $A(s)$ は (10) を保ちながら $0\leq s\leq q$ まで拡張できる. $A(s)$ の q の近くでの逆函数を $B(w)$ とすれば, $B^i(w)$ は $w=0$ のある近傍 W の上で l 回連続的微分可能である. n が十分大のとき $g_n(A(s))\in W$, $0\leq s\leq q$ だから (10) より

(11) $\quad u(n;s)=B(g_n(A(s))),\qquad 0\leq s\leq q,\quad n$:十分大.

故に $B^i(w)$ を $w=g_n(A(s))$ について Taylor 展開して

3) $\mu^\alpha=(\mu_1)^{\alpha^1}\cdots(\mu_d)^{\alpha^d}$, $\zeta^\alpha=(\zeta^1)^{\alpha^1}\cdots(\zeta^d)^{\alpha^d}$ である.

(12) $u^i(n;s) - q^i$

$$= \sum_{p=1}^{\ell} \frac{1}{p!}\left\{\sum_{j=1}^{d} \mu_j^{\,n}\left(A^j(s) + \sum_{\mu^\alpha=\mu_j} b_\alpha^i(n)\, A^\alpha(s)\right)\frac{\partial}{\partial w^j}\right\}^p B^i(0) + o(|\mu_d|^n)$$

を得る．(12)から(8)を得るにはQを標準型になおし（cf. Gantmacher [1] II, p. 75）Frobeniusの定理を用いればよい．(8)から(9)を得るのは単純な計算だけである．ただその時 $A_{i\nu}(s)\neq 0$ と $A_{i\nu}(0)\neq 0$ が同値であることを用いる．

$\boxed{5}$ 最後に$\boxed{2}$の例について述べる

1) $\Phi(z)$が non-critical ならば，定理2により $A_0(\Phi(z)) = \rho A_0(z)$ $(\rho = \Phi'(q))$ をみたす函数 $A_0(z)$ がある．一方 $Q = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ \rho & 0 \end{bmatrix}$ であるから，$\mu_1 = \rho$，$\mu_2 = -\rho$ である．$A^1(s) = A_0(s^1) + A_0(s^2)$，$A^2(s) = A_0(s^1) - A_0(s^2)$，$g_n^i(z) = \mu_i^n z^i$ $(i = 1, 2)$ は明らかに(10)をみたす．$A_0'(q) = 1$ と normalize しておけば $[\partial A^i(q)/\partial s^j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$．故に $[\partial B^i(0)/\partial w^j] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ だから (11) より

$$u^i(n;s) - q^i = \begin{cases} \rho^n A_0(s^i) + o(\rho^n), & n:\text{even}, \\ \rho^n A_0(s^{i+1}) + o(\rho^n), & n:\text{odd}. \end{cases}$$

2) Φ，A_0，ρ を 1) と同じとする．今度は $Q = \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ だから $\mu_1 = \sqrt{\rho}$，$\mu_2 = -\sqrt{\rho}$．$A^1(s) = A_0(s^1) + \sqrt{\rho}\, A_0(s^2)$，$A^2(s) = A_0(s^1) - \sqrt{\rho}\, A_0(s^2)$，$g_n^i(z) = (\mu_i)^n z^i$，が (10)

をみたす．これより容易に

$$u^i(n;s)-q^i=\begin{cases}\rho^{n/2}A_0(s^i)+o(\rho^{n/2}), & n:\text{even},\\ \rho^{\{n-(-1)^i\}/2}A_0(s^{i+1})+o(\rho^{n/2}), & n:\text{odd}\end{cases}$$

が得られる．

文　献

[1] Gantmacher, F. R., The Theory of Matrices, Chelsea, 1959 (English translation).

[2] Jirina, M., Czechoslovak. Math. J. 7, (1957) 130–153, (Russian).

[3] Joffe, A. and F. Spitzer, J. Math. Anal. Appl. 19, (1967) 409–430

[4] Sevastyanov, B. A., Branching Processes, Nauka, 1971 (Russian).

[5] Sternberg, S., Am. J. Math. 79, (1959) 809–824.

追記：定理4の $A_{iv}(s)\neq 0$ という仮定は実は不自然である．この原稿を書いてしまった後で $l=2$ に対して(7)が成り立つという仮定だけの下で(9)式が得られることが解ったが証明（勿論 lemma 1 を用いる方法ではない）は割愛する．