

Propagation of Chaos について.

静大 教養 田中 茂

§1. 序

M. Kac は Boltzmann の方程式が、多粒子の衝突過程の運動方程式であることを示すために、Propagation of Chaos の概念を提起し [1], これを H. P. McKean が確率過程と結びつけて、種々の半線型微分方程式の問題に適用した [2], [3]。

この Propagation of Chaos を、Kac の 1 次元モデルの場合について説明し、他の種々の場合について、簡単にのべたい。くわしい証明をつけるべくとどくなるので、ここでは考之方の説明に重点を置き、形式的な計算だけにとどめた。くわしい証明などは、上記 McKean の論文 [2], [3] および H. Tanaka [4], T. Ueno [5], [6], [7] 等を参照されたい。

§ 2. Kacの1次元モデル

R^1 上の確率分布の密度関数全体を \mathcal{P}_1 とし、この \mathcal{P}_1 の上で、次の半線型微分方程式を考える。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{R^1} \{ u(t, x^*) u(t, y^*) \\ - u(t, x) u(t, y) \} dy d\theta \\ u(0, x) = f(x), \end{cases}$$

ここで、 $x^* = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y^* = x \sin \theta + y \cos \theta$,
また (1) の微分方程式の右辺を $B[u(t)](x)$ で表わす。

(1) において、 x を粒子の速度、 $u(t, x)$ を時刻 t における速度 x をもった粒子の分布の密度関数と考へれば、これは Boltzmann 方程式の1次元モデルと考へられる。このモデルでは、速度が x と y の粒子が衝突したのちには、 θ を一様分布で之らんと、 $x \cos \theta - y \sin \theta$ と $x \sin \theta + y \cos \theta$ の速度に変わる。この衝突では、エネルギーは保存されるが運動量は保存されない。

(1) の解は Wild の和で一意的に求めらる [3] が、之れを $u(t, x) = T_t f(x)$ とおくと T_t は \mathcal{P}_1 上の非線型な半群である。分枝過程の時と同様に、この T_t を線型化することをまが考へよう。

§3. T_t の線型化

C_n を R^n 上の有界可測関数全体とし, C_∞ を R^∞ 上の関数で, $\{C_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ の関数の適当に収束する和に表ゆべれりもの全体とする。 C_∞ の二元 φ, ψ に対し,

$$(2) \quad \langle f^\infty, \varphi \rangle = \langle f^\infty, \psi \rangle, \quad \forall f \in \mathcal{P}_1$$

が成り立つとき, φ と ψ とを同一視しておく。ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, それぞれの適当な空間での積分の意味である。

$\varphi \in C_n$ に対し, $D\varphi \in C_{n+1}$ を次の様に定義する。

$$(3) \quad D\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \varphi(x_k^*) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \} d\theta$$

(x_k^* は, (x_1, \dots, x_n) の対角座標を $x_k \cos \theta - x_{n+1} \sin \theta$ とおきかえたものとする。) この D を C_∞ に拡張しておく。

この D は, $\varphi \in C_1$ に対し,

$$(4) \quad \langle B[f], \varphi \rangle = \langle f^2, D\varphi \rangle$$

をみたすことは容易に分かる。

D を生成作用素とする C_∞ 上の線型微分方程式

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} = DV(t) \\ V(0) = \varphi \end{cases}$$

の解を $v(t) = H_t \varphi$ とおくと、 H_t は C_∞ 上の線型半群である。 (1) の解 $u(t)$ と $\varphi \in C_1$ に対し、形式的に、

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \langle u(t), \varphi \rangle = \langle B[u(t)], \varphi \rangle = \langle u(t)^2, D\varphi \rangle$$

が言える。これをくり返すことにより、

$$(7) \quad \frac{d^n}{dt^n} \langle u(t), \varphi \rangle = \langle u(t)^{n+1}, D^n \varphi \rangle = \langle u(t)^\infty, D^n \varphi \rangle$$

が言えるから、Taylor 展開をすれば、

$$(8) \quad \langle T_t f, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \langle f^\infty, D^n \varphi \rangle = \langle f^\infty, H_t \varphi \rangle$$

となり、この意味で H_t は T_t の線型化であるといえる。

さらに、 $\varphi \in C_n$, $\psi \in C_m$ に対し、 $\varphi \otimes \psi \in C_{n+m}$ を

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi \otimes \psi(x_1, \dots, x_{n+m}) \\ = \varphi(x_1, \dots, x_n) \psi(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \end{aligned}$$

で定義し、この \otimes を C_∞ に拡張して定義すると、 D は C_∞ 上の derivation の性質

$$(10) \quad D(\varphi \otimes \psi) = (D\varphi) \otimes \psi + \varphi \otimes (D\psi)$$

をもつ。 H_t は、

$$(11) \quad H_t(\varphi \otimes \psi) = (H_t \varphi) \otimes (H_t \psi)$$

を満たす。これを Collision property とする。 H_t は

Collision 半群とよんでいる。この性質を用いれば、 $\varphi \in C_m$ に対し、次の式も示せる。

$$(12) \quad \langle (T_t f)^m, \varphi \rangle = \langle f^\infty, H_t \varphi \rangle$$

§4. Propagation of Chaos

$\varphi \in C_n$ に対し、 $D_n \varphi \in C_n$ を次の様に定義する。

$$(13) \quad D_n \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ \varphi(x_{ij}^*) - \varphi(x_1, \dots, x_n) \} d\theta$$

(x_{ij}^* は (x_1, \dots, x_n) の i 座標を $x_i \cos \theta - x_j \sin \theta$ に、 j 座標を $x_i \sin \theta + x_j \cos \theta$ に置き変えたものとする。) この D_n は、(1) と同様の衝突をしながる運動する n 組の粒子系の生成作用素と考へる。

任意の $\varphi \in C_m$ と $f \in \mathcal{P}_1$ とに対し、

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f^n, D_n \varphi \rangle = \langle f^\infty, D\varphi \rangle$$

が成り立つから、 D_n を生成作用素とする半群を $H_{n,t}$ とする。

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f^n, H_{n,t} \varphi \rangle = \langle f^\infty, H_t \varphi \rangle$$

がいえる。 $H_{n,t}$ が自己同型であることが容易に示せるので、

(12) と (15) を組み合わせると、任意の $\varphi \in C_m$ と $f \in \mathcal{D}_1 \mathbb{Z}^d$ 、

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle H_{n,t} f^n, \varphi \rangle = \langle (T_t f)^m, \varphi \rangle$$

が成り立つ。これは、 n 粒子の衝突運動の方程式

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{dU_n(t)}{dt} = D_n U_n(t) \\ U_n(0) = f^n \end{cases}$$

の解 $H_{n,t} f^n$ は、粒子の数を大きくすれば、(1) の解を独立に多数集めたものに近づくことを示している。このことを、Propagation of Chaos という。

§5. 確率過程の近似

McKean は Propagation of Chaos を、確率過程の近似の問題に精密化している。この概略を以下にのべる。

(1) の解を $u^f(t, x)$ とおいたとき、微分方程式

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial P^f(t, x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \{ P^f(t, x, y \cos \theta - z \sin \theta) \times \\ \quad \times u^f(t, y \sin \theta + z \cos \theta) - P^f(t, x, y) \} dz d\theta \\ P^f(0, x, y) = \delta_0(x - y) \end{cases}$$

の解 $P^f(t, x, y)$ は、次の性質

$$(19) \quad \int_{R^1} f(x) P^f(t, x, y) dx = U^f(t, y)$$

$$(20) \quad \int_{R^1} P^f(t, x, y) P^{U^f}(s, y, z) dy = P^f(t+s, x, z)$$

をみたすことが示せる。この $P^f(t, x, y)$ を遷移確率とする広い意味のマルコフ過程（出発点 x のみでなく、出発時の分布 f にも依存する確率過程）が考えられるが、これを (1) に対応する確率過程と考へ、 $\{P_{x,t}^f, X_t\}$ と書くことにする。このとき、 D_n を生成作用素とする R^n 上のマルコフ過程を $\{P_{x,t}^{(n)}, X_t^{(n)}\}$ とおけば、任意の $A = A_1 \times \dots \times A_m \in R^m$ に対し、

$$(21) \quad \int_{R^{n+m}} \dots \int_{R^{n+m}} P_{(x_1, \dots, x_n)}^{(n)}(X_t^{(n)} \in A \times R^{n+m}) f(x_{m+1}) \dots f(x_n) dx_{m+1} \dots dx_n$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m P_{x_k}^f(X_t \in A_k)$$

が成り立つことを証明できる。この意味で Propagation of Chaos が確率論的にとらえられる。

§ 6. その他の場合

McKean は、3次元 Maxwell ガスで cut-off のある場合や、Burger 方程式の離散モデルの場合などにも、全

<同様の議論で Propagation of Chaos が成り立つことを [3] に示している。また、次の非線型微分方程式

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{R'} C(x, y) u(t, x) \underbrace{u(t, y)}_{dy} \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}$$

の場合にも、 $\varphi \in C_n$ に対し、

$$(23) \quad \begin{aligned} D\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} (x_1, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{k=1}^n C(x_k, x_{n+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

と表わすことにより、Propagation of Chaos の成り立つことを [2] で示している。

また、3個以上の粒子の間には衝突がある場合については、H. Tanaka [4], T. Ueno [5], [6], [7] がくわしく取り扱っている。

参考文献

- [1] M. Kac: Probability and Related Topics in the Physical Sciences. New York (1959)
- [2] H. P. McKean: A class of Markov processes

- associated with non-linear parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. 56, (1966)
- [3] — : An exponential formula for solving Boltzmann equation for a Maxwellian gas. J. Combinatorial Th. 2, (1967)
- [4] H. Tanaka: Propagation of chaos for certain Markov processes of jump type with non-linear generators. Proc. Japan Acad. 45, (1969)
- [5] T. Ueno: A class of Markov processes with bounded non-linear generators. Japanese J. Math. 4, (1969)
- [6] — : A class of purely discontinuous Markov processes with interactions. I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969)
- [7] — : A class of Markov processes with interactions. I, II. Proc. Japan Acad. 45 (1969)