数理解析研究所講究録
195巻 1973年 1-16

Volterra - Yamaguti の系についての注意

北大理　吉川　敦

§0 序

次の系について，初期値問題を考える：

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = uv \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = -uv \end{cases}, \quad t>0,\ -\infty<x<\infty$$

$$(2)\quad \begin{cases} u(0,x) = u^0(x), & 0 \leqq u^0(x) \leqq M < \infty, \\ v(0,x) = v^0(x), & 0 \leqq v^0(x) \leqq M < \infty. \end{cases}$$

この系の，解の大域的な存在，一意性は容易にわかる。また，$v(t,x)$ の有界性は，明らかである。

ここで，この系の生物モデルとしての内容は詮策しないが，同一直線上を同じ速度で逆向きに走る捕食者と被捕食者の系の時間的変化を記述すると言ってもよいであろうか。

数学的な興味は，次のような現象にある。すなわち，(1)に

おいて空間微分項を含まない，常微分方程式系に対しては，confinement が成立するにもかかわらず，偏微分方程式系の初期値問題(1)(2)としては，非負，有界な初期値に対して解が，かならずしも，$t\to\infty$ のとき，有界に留まらないということが観察されているのである。この点について，山口教授は，現象の発見者として詳しい報告をされた（山口[1]）。本稿では，それを補足する意味で，以下で，二点の拙見を加える。すなわち，第一に，初期値が同一周期の有界な周期函数である場合には，解は有界かつ空間方向に周期的であることを示す。大切なことは，この場合には，$t\to\infty$ の際，$u(t,x)$ の t に関する漸近的な周期性が見られることであろう。第二に，$u^0(x)$ が有界な台を持つ非負有界函数*の場合に，$u(t,x)$ が，$t\to\infty$ で有界に留まるための必要十分条件を，$v^0(x)$ について，述べる。これは，亀高氏の例を補足するものである（山口[1]）。（* 後に訂正したので，いくらか主張が変った。詳しくは，§2を見られたい。）

§1 周期性についての注意

以下の議論は，$u^0\not\equiv 0$，$v^0\not\equiv 0$ とする。まず，$\tau>0$，$-\infty<\xi<\infty$ に対し，

$$\varphi(\tau,\xi)=\int_0^\tau u^0(\xi-\rho)\,d\rho$$

とおく。これについて，次の条件を考える。

$$
(\pi)\begin{cases} \xi \text{に独立な} \quad \tau_0 \geqq 0,\ \alpha > 0,\ \beta \text{が存在して,} \\ \quad \varphi(\tau, \xi) \geqq \alpha\tau + \beta, \quad \tau \geqq \tau_0 \\ \text{が成立する。} \end{cases}
$$

<u>命題 1.1</u> $u^0(x)$ が周期的であれば，条件(π)が成立する。$u^0(x)$ の周期を ϖ とするとき，$m = \int_0^{\varpi} u^0(\theta)\,d\theta$ とおけば，$\alpha = m/\varpi$, $\beta = -m$, $\tau_0 = \varpi$ である。

（証明）
$$
\int_0^{\tau} u^0(\xi-\rho)\,d\rho = \sum_{k=0}^{k_0} \int_{k\varpi}^{(k+1)\varpi} u^0(\xi-\rho)\,d\rho +
$$
$$
+ \int_{(k_0+1)\varpi}^{\tau} u^0(\xi-\rho)\,d\rho
$$
$$
= (k_0+1)\int_0^{\varpi} u^0(\xi-\rho)\,d\rho + \int_0^{\tau-(k_0+1)\varpi} u^0(\xi-\rho)\,d\rho
$$

ただし，

$$
(3) \qquad (k_0+1)\varpi \leqq \tau < (k_0+2)\varpi
$$

に k_0 をとる。$\tau \geqq \varpi$ ならば，(3) をみたす k_0 があって，

$$
\int_0^{\tau} u^0(\xi-\rho)\,d\rho \geqq (k_0+1)\int_0^{\varpi} u^0(\xi-\rho)\,d\rho
$$
$$
\geqq \left(\frac{\tau}{\varpi}-1\right)\int_0^{\varpi} u^0(\xi-\rho)\,d\rho
$$

$u^0(x)$ の周期性を使えば，結局，

$$\int_0^{\rho} u^0(\xi-\rho)\,d\rho \geqq \frac{m}{\omega}\tau - m, \qquad \tau \geqslant \tau_0.$$

<u>注意</u>　$u^0(x) \geqslant \alpha > 0$ ならば，条件(Π)がやはり成立する（山口[1]と比較せよ）。

条件(Π)の意義は次の通りである。

<u>命題1.2.</u>　条件(Π)のもとで，初期値問題(1),(2)の解は，$t\to\infty$ に際し有界に留まる。

（証明）解の a priori 評価を求める。まず，(1)(2)が次の系と同値であることは見易い。

$$(4)\quad \begin{cases} u(t,x) = u^0(x+t)\exp\left\{\int_0^t v^0(x+t-2\tau)\exp\left[-\int_0^\tau u(\sigma, x+t-2\tau+\sigma)\,d\sigma\right]d\tau\right\}, \\ v(t,x) = v^0(x-t)\exp\left\{-\int_0^t u^0(x-t+2\sigma)\exp\left[\int_0^\sigma v(\tau, x-t+2\sigma-\tau)\,d\tau\right]d\sigma\right\}. \end{cases}$$

これより直ちに，

$$v(t,x) \leqq v^0(x-t) \leqq M.$$

故に，命題の証明のためには，$u(t,x)$ の有界性を示せばよい。(4)の第一式から，

$$(5)\qquad u(t,x) \geqq u^0(x+t).$$

これを再び(4)の第一式に代入すれば，

$$u(t,x) \leqq u^0(x+t)\exp\left\{\int_0^t v^0(x+t-2\tau)\exp\left[-\int_0^\tau u^0(x+t-2\tau+2\sigma)d\sigma\right]d\tau\right\} \tag{6}$$

となる。条件(π)を用いると、

$$\int_0^\tau u^0(x+t-2\tau+2\sigma)d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{2\tau} u^0(x+t-\sigma)d\sigma$$

$$\geqq \alpha\tau + \beta/2, \qquad \tau \geqq \tau_0/2$$

(6)に代入すれば，t が十分大として，

$$u(t,x) \leqq u^0(x+t)\exp\left\{\int_0^{\tau_0/2} v^0(x+t-2\tau)d\tau + \int_{\tau_0/2}^t v^0(x+t-2\tau)e^{-\alpha\tau-\beta/2}d\tau\right\}$$

$$\leqq M\exp\left\{M\tau_0/2 + Me^{-\beta/2}\int_{\tau_0/2}^t e^{-\alpha\tau}d\tau\right\}$$

$$\leqq M_1$$

である。(証終)

さて，これから，この節の終りまで，$u^0(x)$, $v^0(x)$ は共に，共通の周期 ϖ を持つ，周期函数とする。ここで，初期値問題(1)(2)の解が一意的であること，(1)が平行移動で不変であることを考慮すれば，次のことがわかる。

<u>命題 1.3.</u> $u^0(x)$, $v^0(x)$ が周期 ϖ を持つならば，(1)(2)の解 $u(t,x)$, $v(t,x)$ は，x について周期的である。

$$u(t,x+\varpi) = u(t,x), \quad v(t,x+\varpi) = v(t,x).$$

u は，時間方向についても，つぎに見るように，漸近的に周期的である。

命題1.4. 命題1.3の仮定のもとで，

$$u(t,x) \leqq u(t+\varpi,x) \leqq e^{\Phi(x,t)}\, u(t,x).$$

ここに，t 大なるとき，

$$\Phi(x,t) \leqq l\, e^{m/2 - mt/\varpi} \to 0, \quad t \to \infty .$$

ただし，

$$m = \int_0^{\varpi} u^0(\theta)\,d\theta, \quad l = \int_0^{\varpi} v^0(\theta)\,d\theta$$

である。

(証明) (4) の第一式と，命題1.3から，

$$u(t+\varpi,x) = u(t,x)\, e^{\Phi(x,t)},$$

ただし，

$$\Phi(x,t) = \int_t^{t+\varpi} v^0(x+t-2\tau)\exp\left[-\int_0^{\tau} u(\sigma, x+t-2\tau+\sigma)\,d\sigma\right]d\tau.$$

(5) より，

$$\Phi(x,t) \leqq \int_t^{t+\varpi} v^0(x+t-2\tau)\exp\left[-\int_0^{\tau} u^0(x+t-2\tau+2\sigma)\,d\sigma\right]d\tau$$

t は，十分大として，命題1.1より，

$$\Phi(x,t) \leqq e^{m/2}\int_t^{t+\varpi} v^0(x+t-2\tau)\, e^{-m\tau/\varpi}\,d\tau$$

$$\leqq l\, e^{m/2 - mt/\varpi}$$

これと，$\Phi(x,t) \geqq 0$ より，命題を得る。

これに対し，v に対する漸近的な周期性はない。すなわち，

命題 1.5. 命題 1.3 の仮定のもとで，$t \geqq \varpi/2$ ならば，

$$e^{-K} v(t,x) \leqq v(t+\varpi, x) \leqq e^{-m} v(t,x)$$

がなりたつ。ただし，

$$K = m \exp\left\{ \frac{\ell}{2} \frac{2 - e^{-m/2}}{1 - e^{-m/2}} \right\},$$

ℓ, m は前述の通りとする。

（証明）(4) の第二式と仮定から，

$$v(t,x) = v(t+\varpi, x) e^{\Psi(t,x)},$$

ただし，

$$\Psi(t,x) = \int_t^{t+\varpi} u^0(x-t+2\sigma) \exp\left[\int_0^\sigma v(\tau, x-t+2\sigma-\tau) d\tau\right] d\sigma$$

命題の証明には，次の不等式を示せばよい。

(7) $$m \leqq \Psi(t,x) \leqq K$$

まず，$v \geqq 0$ より，

$$\Psi(t,x) \geqq \int_t^{t+\varpi} u^0(x-t+2\sigma) d\sigma = m.$$

次に，(7) の右側の不等式を示す。(4) より，

$$v(t,x) \leqq v^0(x-t) \exp\left[-\int_0^t u^0(x-t+2\sigma) d\sigma\right]$$

命題 1.1 より

$$\int_0^t u^0(x-t+2\sigma) d\sigma \geqq mt/\varpi - m/2, \quad t \geqq \varpi/2$$

であるから，

$$v(t,x) \leqq \begin{cases} v^0(x-t) &, \quad t < \varpi/2 \\ v^0(x-t)e^{-mt/\varpi + m/2} &, \quad t \geqq \varpi/2 \end{cases}$$

したがって，$\sigma \geqq t \geqq \varpi/2$ とすれば，

$$\int_0^\sigma v(\tau, x-t+2\sigma-\tau)\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \int_0^{\varpi/2} v^0(x-t+2\sigma-2\tau)\,d\tau + \int_{\varpi/2}^{\sigma} v^0(x-t+2\sigma-2\tau)e^{-m\tau/\varpi + m/2}\,d\tau$$

$$= \quad I_1 \qquad + \qquad I_2$$

まず，v^0の周期性より，$I_1 = \ell/2$．

また，

$$I_2 = \int_0^{\sigma-\varpi/2} v^0(x-t+2\sigma-2\tau)e^{-m\tau/\varpi}\,d\tau$$

$$\leqq \frac{1}{2}\int_0^{\infty} v^0(x-t+2\sigma-\theta)\,e^{-m\theta/2\varpi}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-mk/2} \int_0^{\varpi} v^0(\xi-\theta)\,e^{-m\theta/2\varpi}\,d\theta$$

$$\leqq \frac{\ell}{2}\,\frac{1}{1-e^{-m/2}}\,.$$

故に，

$$\int_0^\sigma v(\tau, x-t+2\sigma-\tau)\,d\tau \leqq \frac{\ell}{2}\,\frac{2-e^{-m/2}}{1-e^{-m/2}} \equiv K_1$$

$\Psi(t,x)$ に代入すると，

$$\Psi(t,x) \leqq e^{K_1}\int_t^{t+\varpi} u^0(x-t+2\sigma)\,d\sigma = m e^{K_1} = K.$$

すなわち，(7)が示された。

§2 有界性についての注意

すでに，山口教授は，$v^0 \in L^1(-\infty,\infty)$ であれば，$u(t,x)$ が有界に留まることを示された。ここでは，つぎの命題を目標にする。

命題2.1 $u^0(x)=0$，$x<0$，かつ $u^0(x)=O(x^\gamma)$，$x\downarrow 0$，$0\leqq\gamma<\infty$，とする。（$\gamma=0$ の時は，u^0 は $x=0$ で不連続である）。このとき，$v^0(x)\notin L^1(-\infty,0)$ ならば，$t\to\infty$ のとき，$u(t,x)$ は有界に留まらない。より詳しく述べるならば，ある $\psi(\xi)$ があって，$\psi(\xi)\to+\infty$，$\xi\downarrow 0$，かつ

(8) $$\frac{1}{2}\int_{-\psi(\xi)}^{0} v^0(\sigma)\,d\sigma \geqq (\gamma+1)\log\frac{1}{\xi}+c, \quad \xi\downarrow 0$$

を満たし，$u(t,x)$ は，$t=\frac{1}{2}(\xi+\psi(\xi))$，$x=\frac{1}{2}(\xi-\psi(\xi))$，$\xi\downarrow 0$ に沿って，増大する。

（証明） $\xi=t+x$，$\eta=x-t$ とする。(4) の第一式から，

(9) $$u(t,x)\leqq u^0(\xi)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi} v^0(\theta)\,d\theta\right\}$$

これを再び，(4)に代入すれば，

(10) $$u(t,x)\geqq u^0(\xi)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi} v^0(\theta)\,e^{-f(\xi,\theta)}\,d\theta\right\},$$

ただし，

$$f(\xi,\theta)=\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\xi} u^0(\rho)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\rho} v^0(\sigma)\,d\sigma\right\}d\rho$$

である。

v^0の台の仮定から，$\xi \geqq 0$ の時の $u(t,x)$ の挙動を調べればよい。$\xi \geqq 0$ とすれば，$\theta < 0$ の時，

$$f(\xi,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\xi u^0(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int_\theta^\rho v^0(\sigma)d\sigma\right)d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\xi u'(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}\int_\theta^0 v^0(\sigma)d\sigma\right)d\rho,$$

$$u'(\rho) = u^0(\rho)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\rho v^0(\sigma)d\sigma\right\}$$

となるから，

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{2}\int_0^\xi u'(\rho)d\rho, \quad \xi \geqslant 0,$$

$$\beta(\theta) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_\theta^0 v^0(\sigma)d\sigma\right\}, \quad \theta < 0$$

とおけば，$\xi \geqq 0$, $\theta < 0$ において，

$$f(\xi,\theta) = \alpha(\xi)\beta(\theta)$$

である。したがって，$\eta < 0$ のとき

$$\frac{1}{2}\int_\eta^\xi v^0(\theta)e^{-f(\xi,\theta)}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\xi v^0(\theta)e^{-f(\xi,\theta)}d\theta + \frac{1}{2}\int_\eta^0 v^0(\theta)e^{-\alpha(\xi)\beta(\theta)}d\theta$$

ここで，$\rho = \beta(\theta)$ と変換すれば，

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\beta(\theta)}\left(-\frac{1}{2}v^0(\theta)\beta(\theta)\right)d\theta = -\frac{1}{2}v^0(\theta)d\theta$$

だから，

(11) $$\frac{1}{2}\int_\eta^\xi v^0(\theta)e^{-f(\xi,\theta)}d\theta \geqq \int_1^{\beta(\eta)} e^{-\alpha(\xi)\rho}\frac{d\rho}{\rho}$$

となる。

さて，$v^0 \notin L^1(-\infty,0)$ とすれば，(8)を満足する $\psi(\xi)$ が

とれる(実は，ξ は discrete でよい)。また，$u(x)=O(x^{\gamma})$

と，$\alpha(\xi)$ の定義から，$\xi\downarrow 0$ のとき，(8)より

(12) $\alpha(\xi)\,\beta(-\psi(\xi)) \geqq 1, \quad \xi\downarrow 0.$

である。今，$0\leqq\gamma<\infty$ に対し，$\varepsilon>0$ を固定して，

$0\leqq\gamma<1/(e^{\varepsilon}-1)$ を満たすようにとる。

(11)(12)より，$\alpha(\xi)\downarrow 0$，$\xi\downarrow 0$，を考慮すれば，

$$\frac{1}{2}\int_{-\psi(\xi)}^{\xi} v^{0}(\theta)\, e^{-f(\xi,\theta)}\,d\theta \geqq \int_{\alpha(\xi)}^{\varepsilon} e^{-\rho}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\geqq \frac{1}{e^{\varepsilon}}\left(\log\frac{1}{\alpha(\xi)} - \log\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \xi\downarrow 0$$

故に，$t=\frac{1}{2}(\xi+\psi(\xi))$，$x=\frac{1}{2}(\xi-\psi(\xi))$ の時，

$$u(t,x) \geqq C_{\varepsilon}\, u^{0}(\xi)\,\alpha(\xi)^{-1/e^{\varepsilon}}, \qquad \xi\downarrow 0, \quad C_{\varepsilon}>0,$$

である。ところが，

$$u^{0}(\xi)\,\alpha(\xi)^{-1/e^{\varepsilon}} = O(\xi^{-\delta}), \qquad \xi\downarrow 0,$$

$$\delta = -\gamma + (\gamma+1)/e^{\varepsilon} = e^{-\varepsilon}\{1-(e^{\varepsilon}-1)\gamma\} > 0$$

であるから，$\xi\downarrow 0$ のとき，

$$u(t,x)\to\infty, \quad t=\tfrac{1}{2}(\xi+\psi(\xi)),\ x=\tfrac{1}{2}(\xi-\psi(\xi)). \quad \text{(証終)}$$

(P)を考慮すれば，つぎの系が得られる。

命題2.2. $u^{0}(x)=0$，$x<a$，かつ $u^{0}(x)=O((x-a)^{\gamma})$，$x\downarrow a$，$0\leqq\gamma<\infty$，とする。さらに，$u^{0}(x)=0$，$x>b\,(>a)$ の時，

$u(t,x)$ が有界に留まるための必要十分条件は，$v^0 \in L^1(-\infty, a)$ である。

注意　これらの命題は，ある意味で v^0 が少いとき，進路に v^0 が充分豊富にあれば（i.e. $v^0 \notin L^1(-\infty, a)$），$u$ はどんどん太って行くことを意味するものと考えられる。これに対し，§1で述べたような状況は，v^0 がある意味で至る所にあるために，その進路の v を食い合うために太らないということであろうか。

さらに，山口教授が以前与えられた例（山口[1]）を補足しておこう。$V > 0$ を固定し，$-\infty < r < \infty$ に対して，

$$\tilde{\varphi}_1(r) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{r} u^0(s)\, e^{Vs}\, ds$$

とおけば，(10)式中の $f(\xi, \theta)$ については，$v^0 \leq 2V$ のとき，

$$f(\xi, \theta) \leqq e^{-V\theta}\, \tilde{\varphi}_1(\xi) = \tilde{\varphi}(\xi, \theta), \quad \theta < \xi$$

である。したがって

$$u(t,x) \geqq u^0(\xi) \exp F(\xi, \eta), \quad \xi = x+t,\ \eta = x-t,$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\int_{\eta}^{\xi} v^0(\theta)\, e^{-\tilde{\varphi}(\xi,\theta)}\, d\theta$$

となる。ここで，$p(\theta) = e^{-V\theta}$ とすれば，

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{2V}\int_{p(\xi)}^{p(\eta)} \tilde{v}^0(p)\, e^{-p\,\tilde{\varphi}_1(\xi)}\, dp/p,$$

ただし、 $\tilde{v}_0(\rho) = v^0(\frac{1}{V}\log\frac{1}{\rho})$ とする。今 $\eta \leqq 0$、また、

$u^0(x)e^{Vx} \in L^1(-\infty, \infty)$ とすれば、

$$F(\xi,\eta) \geqq c_1 \int_{\rho(\xi)}^{1} \tilde{v}^0(\rho)\, d\rho/\rho, \quad c_1 = \frac{e^{-c}}{2V}, \quad \tilde{\varphi}_1(\xi) \leq c,$$

$$= c_1 \int_0^{\xi} v^0(\theta)\, d\theta.$$

以上により、

$$u(t,x) \geqq u^0(\xi)\exp\left(c_1 \int_0^{\xi} v^0(\theta)\, d\theta\right), \tag{13}$$

$$\xi = x+t, \quad \eta = x - t \leqq 0,$$

かつ、 $v^0 \leqq 2V$, $u^0(x)e^{Vx} \in L^1(-\infty,\infty)$ としてある。

これによって、次の命題を得る。

<u>命題2.3.</u> $u^0(x)e^{Vx} \in L^1(-\infty,\infty)$, $v^0(x) \leqq 2V$, $V>0$, $v^0 \notin L^1(0,\infty)$ とする。もし、点列 $\xi_n \to +\infty$ があって、

$$u^0(\xi_n)\exp\left(c_1 \int_0^{\xi_n} v^0(\theta)\, d\theta\right) \longrightarrow +\infty$$

ならば、 $u(t_n, x_n) \to +\infty$, $n \to \infty$, $t_n = (\xi_n - \eta)/2$, $x_n = (\xi_n + \eta)/2$ $(\eta \leqq 0)$。特に、点列 $\xi_n \to +\infty$ に対して、 $u^0(\xi_n) \geqq \delta > 0$ がなりたつならば、すべての $v^0 \notin L^1(0,\infty)$, $v^0 \leqq 2V$, に対して、 $u(t_n, x_n) \to +\infty$, $n \to \infty$, $t_n = (\xi_n - \eta)/2$, $x_n = (\xi_n + \eta)/2$ が成立する。 $(\eta \leqq 0)$。

最後に、より具体的な例を挙げよう。

例2.1.（cf. 山口[1]）$a(x)$ は, $[-1,1]$ に台を持つ函数とし, $a(0)=1$, $0\leqq a(x)\leqq 1$ とする。

$$u^0(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ a\left(\dfrac{x-2n}{d_n}\right), & 2n-1\leqq x\leqq 2n+1, \quad n=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

ただし,
$$d_n = e^{-2n\nu-\nu}\,2^{-n}$$

とすれば, $u^0(x)e^{\nu x}\in L^1(-\infty,\infty)$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu x}u^0(x)dx \leqq 1\right)$, かつ $u^0(2n)=1$ である。

例2.2. $a(x)$ は前例と同じとする。

$$u^0(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ b_n\, a\left(\dfrac{x-2n}{d_n}\right), & 2n-1\leqq x\leqq 2n+1, \quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

d_n は前例と同じにとり, $b_n\leqq 1$ は, ν^0 によって決めよう。たとえば, $\nu^0\equiv 2\nu$ ならば, $b_n=e^{-kn}$, $k<2e^{-1}$ にとれば, $u(n,n)\to+\infty$, $n\to+\infty$.

§☆ 文献

[1] 山口昌哉： Boltzmannモデルと Volterraモデルについて, 京大数解研講究録 No.174, 1973年3月以降刊。

[付記] 本稿を書いた後，いくつか，さらにわかったことがある。詳しくは，山口教授との共著

On the behavior of solutions to a certain semi-linear system of partial differential equations

を見られたい。たとえば，次のようなことがいえる（証明は例によって初等的だから省略する）。

> __命題付-1.__ $v^0 \in L^1(-\infty, \infty)$，$v^0(x) = 0$，$x > a$ $(v^0 \not\equiv 0)$ とする。$u^0 \notin L^1(a, +\infty)$ ならば，$-1 < c \leq 1$，$x^0 \in \mathbb{R}$ に対し，
>
> $$u^0(\xi(t)) \leq u(t, ct + x^0) \leq e^{\alpha(t)} u^0(\xi(t)), \quad t \gg 1.$$
>
> ただし，$\xi(t) = (1+c)t + x^0$，$\alpha(t) = \alpha(t; c, x^0, u^0, v^0) \geq 0$ かつ，$\alpha(t) \longrightarrow 0$，$t \to +\infty$，である。

> __命題付-2.__ $k(x) \geq 0$，$k \in C^1$，$x \geq a$，とする。しかも，$\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-k(x)} = 0$．今，$v^0 \in L^1(-\infty, \infty)$ かつ $x \geq a$ において $v^0(x) \leq M e^{-k(x)}$ がなりたつとする。もし，
>
> $$m(x) = \max\,(0, 2k'(x) - u^0(x)) \in L^1(a, +\infty)$$
>
> ならば，$-1 < c < 1$ に対し，命題付-1 と同じ結論がなりたつ。

多少，こじつけめいた考え方かも知れないが，これらの命題は，ある意味で，v^0 の量に比し，u^0 が多すぎる場合に，結

局，それが時間の経過と共にやせて行くことを意味するものと見られよう。そういう意味では，ある程度，常識的とも，言われうる結論であろうか。