

解が代数関数となる微分方程式について

部立大 理学部 松元 寛

(I)

任意の解が代数関数となる微分方程式のモノドロミー群は有限群であり、有限群をモノドロミーにもつような方程式の解は代数関数である。そこで、具体的に有限群を与えたときその群をモノドロミー群にもつ方程式が具体的に計算できるかを考える。計算に使う道具は、有限群に対する不変式と、射影変換で下変な微分式である。

(II)

G は (x_1, \dots, x_n) の上に作用する有限な一次変換群とする。 $S \in G$ により、 x_j は $x_j^{(S)}$ にうつるものとする。 x_1, \dots, x_n の有理関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が、任意の $S \in G$ について

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1^{(S)}, \dots, x_n^{(S)})$$

を満たすとき、 f の G の不変式 (algebraic invariant) という。

[注] 1. 上のような f は必ず存在する。

2. G の不変式で代数的に独立なものは n 個ある。

3. 代数的に独立な不変式を f_1, \dots, f_m とするとき、
他の不変式はこれらを用いて代数的に書ける。

(III)

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の変換で不変な微分式は、シュワルツの微分 (Schwarzian derivative)

$$(1) [S]_t = \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2} \left(\frac{S''}{S'} \right)^2, \quad / = \frac{d}{dt}$$

である。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の変換

$$(2) \begin{cases} x = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{aX + bY + c} \\ y = \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2}{aX + bY + c} \end{cases}$$

で不変な微分式は、

$$D = \begin{vmatrix} X' & X'' \\ Y' & Y'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} X' & X''' \\ Y' & Y''' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} X' & X^{IV} \\ Y' & Y^{IV} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} X'' & X''' \\ Y'' & Y''' \end{vmatrix}, \quad D_4 = \begin{vmatrix} X'' & X^{IV} \\ Y'' & Y^{IV} \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} X''' & X^{IV} \\ Y''' & Y^{IV} \end{vmatrix}$$

とすると、

$$(3) \begin{cases} I_1 = \frac{4D_1^2 - 3D(D_2 + 2D_3)}{D^2} \\ I_2 = \frac{6DD_1(D_2 + 4D_3) - 8D_1^3 - 9D^2D_4}{D^3} \end{cases}$$

である。

(IV)

3 階線形方程式

$$(4) \quad y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0 \quad (a, b, c \text{ は } x \text{ の有理関数})$$

の一次独立解を y_1, y_2, y_3 とし, $X = \frac{y_1}{y_3}, Y = \frac{y_2}{y_3}$ とおいて

I_1, I_2 を計算すれば

$$(5) \quad \begin{cases} I_1 = 4(a^2 + a' - b) \\ I_2 = 27 \{ 2a(a^2 + a') - 3ab - b' + c \} \end{cases}$$

となる。さらに

$$(6) \quad (y_3^3 d)' + 3ay_3^3 d = 0$$

から

$$(7) \quad y_3 = e^{-\int a dx} \cdot D^{-\frac{1}{3}}$$

を得る。

Prop. (4) の解が代数関数 \Leftrightarrow (5) の解が代数関数

例.

群の生成元が

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \quad p^n = 1$$

で与えられるとき, 不変式は, x, y を変数として,

$$xy, \quad x^n + y^n, \quad (x^n - y^n)^2$$

 t を独立変数として

$$t = \left(\frac{x^n + y^n}{x^n - y^n} \right)^2$$

$$\frac{x}{y} = w \quad \text{とおくと}$$

$$t = \left(\frac{w^n + 1}{w^n - 1} \right)^2$$

これから

$$\left(\frac{w'}{w} \right)^2 = \frac{1}{n^2 t (t-1)^2}$$

対数微分して

$$\frac{w''}{w'} - \frac{w'}{w} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right) \quad \textcircled{1}$$

①の両辺を微分

$$\frac{w'''}{w'} - \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 - \frac{w''}{w} + \left(\frac{w'}{w} \right)^2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{(t-1)^2} \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}^2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + \textcircled{2}$$

$$[w']_t + \frac{1}{2} \left(\frac{w'}{w} \right)^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{2}{(t-1)^2} \right)$$