数理解析研究所講究録
196巻 1973年 36-56

Borelの恒等式について

名大 教養　藤本坦孝

§1. 序.

1897年, E. Borelは次の結果を与えた.

定理([1]). 整関数 $a_0(z), a_1(z), \cdots, a_p(z)$; $h_0(z), h_1(z), \cdots, h_p(z)$ に対し, 各 $a_i(z)$ の絶対値の $\{|z|=r\}$ 上の最大値が, すべて $e^{\mu(r)}$ より小さく, $h_i(z)-h_j(z)$ $(i \neq j)$ のそれが, すべて $\mu(r)^2$ より大きくなる様な, 正値単調増加関数 $\mu(r)$ $(0<r<+\infty)$ が存在すると仮定する. もし,

$$a_0(z)e^{h_0(z)}+a_1(z)e^{h_1(z)}+\cdots+a_p(z)e^{h_p(z)} \equiv 0$$

ならば, 必らず

$$a_0(z) \equiv a_1(z) \equiv \cdots \equiv a_p(z) \equiv 0$$

である。

ここでは, 各 $a_i(z)$ が定数の場合に限れば, この結果が, H. Cartan の得た defect relation ([3]) を使う事によって, より精密化された形で証明できる事を示し, その応用として, 有理型関数の除外値に関する Picard の定理や, 有

理型関数の一意性に関する Pólya-Nevanlinna の定理の，N 次射影空間 $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合への拡張を考える。

§2. H. Cartan の defect relation.

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の $\{z;\ r_0 \leq |z| < +\infty\}$ $(r_0 \geq 0)$ を含む領域 D 上の共通零点を持たぬ p 個の正則関数の組 $f = (f_1, \cdots, f_p)$ に対し，

$$u(z) := \max_{1 \leq i \leq p} \log |f_i(z)|$$

とおく。

定義 2.1. H. Cartan ([3]) に従って，各 $r\ (> r_0)$ に対し

$$T(r, f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_0 e^{i\theta})\,d\theta$$

とおき，これを f の特性関数と呼ぶ。

D 上の有理型関数 $g(z)$ を，共通零点のない正則関数 f_1, f_2 によって $g = \dfrac{f_2}{f_1}$ とかく時，$f = (f_1, f_2)$ の特性関数は，定数項を無視すれば，R. Nevanlinna の意味の特性関数 (c.f. [10]) に等しい。有理型関数の場合と同様に，

(2.2) $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ が超越的，即ち，或 i, j $(\neq)$ に対し，$\dfrac{f_i}{f_j}$ が ∞ で真性特異点をもつ必十条件は

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

である。

定義 2.3. 集合 $\gamma_{r_0} = \{z;\ |z| = r_0\}$ 上零でない D 上の正則関数 $F(z)$ に対し

$$N_m(r, F) := \sum_\mu \min(m_\mu, m) \log\left|\frac{r}{a_\mu}\right|$$

と定義する。ここで，m は正整数で，$\sum_\mu$ は，$\{r_0 < |z| \leq r\}$ 内の，重複度が m_μ の $F(z)$ の零点 a_μ のすべての和を表わす。

共通零点のない正則関数の組 $\mathfrak{f} = (f_1, \cdots, f_p)$ の一次結合

$$F = a^1 f_1 + a^2 f_2 + \cdots + a^p f_p$$

に対し，γ_{r_0} 上 $F(z) \neq 0$ とする。この時，任意の m に対し，

$$(2.4) \qquad N_m(r, F) \leq T(r, \mathfrak{f}) + O(1)$$

が成り立つ。

定義 2.5. 上記の $\mathfrak{f}$, F に対する defect を

$$\delta_m(\mathfrak{f}, F) := 1 - \varliminf_{r\to\infty} \frac{N_m(r, F)}{T(r, \mathfrak{f})}$$

と定義する。

(2.4) より，つねに $0 \leq \delta_m(\mathfrak{f}, F) \leq 1$ である。

[3] において，H. Cartan は次の defect relation を得た。

定理 2.6. D 上共通零点をもたぬ正則関数の組 $\mathfrak{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ に対し，$q\ (> p)$ 個の一次結合

$$F_j = a_j^1 f_1 + a_j^2 f_2 + \cdots + a_j^p f_p \quad (1 \leq j \leq q)$$

を考える。ここで，行列 $((a_j^i\,;\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q))$ の任意の p 次の小行列式が零でなく，更に γ_{r_0} 上つねに Wronskian

$$W_{\mathfrak{f}}(z) := \begin{vmatrix} f_1, & f_2, & \cdots, & f_p \\ f_1', & f_2', & \cdots, & f_p' \\ & \cdots & & \\ f_1^{(p-1)}, & f_2^{(p-1)}, & \cdots, & f_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

且つ，$F_j(z) \not\equiv 0$ $(1 \leqq j \leqq q)$ とし，$r_0 > 0$ の場合には，f が超越的であると仮定する。この時

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_{p-1}(f, F_j) \leqq p$$

が成り立つ．

注意．定理 2.6 で $p = 2$ の場合は，R.Nevanlinna のいわゆる第II基本定理と本質的に同じものである．

§3. Borel の恒等式の精密化

$\mathbb{C}^n$ 内の領域 D 上の正則関数 $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ に対し，一点 $a \in D$ の近くで，f を級数

$$f(u_1+a_1, \cdots, u_n+a_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(u_1, \cdots, u_n)$$

に展開する。ここで，$P_m(u)$ は，恒等的に零か，又は m 次同次多項式を表わす．

定義 3.1. f の零点 a の重複度を

$$\nu_f(a) := \min\{m \,;\, P_m(u) \not\equiv 0\}$$

と定義する，ここで $f(a) \neq 0$ の時は $\nu_f(a) = 0$ とおく，

特に，$D = \mathbb{C}^n$ の場合は，次の事がいえる．

補題 3.2. 単位球面 $S^{2n-1} := \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ 内の適当な Lebesgue 測度零の集合 E に対し，$zu^0 := (z_1u^0, \cdots, z_nu^0)$ $(z = (z_1, \cdots, z_n) \in S^{2n-1} - E,\ u^0 \neq 0)$ とかける任意の $f(z)$ の零点について，$\nu_f(zu^0)$ が，u のみの関数 $f_z^*(u) = f(z_1u, \cdots, z_nu)$ の $u = u^0$ での零点の位数に等しい．

又、$D=\{|z_i|<r_i, 1\leq i\leq n\}$ の場合は、

補題 3.3. $\tilde{D}:=\{|z_i|<r_i, 2\leq i\leq n\}$ 内の適当な Lebesgue 測度零の集合 E に対し、$a=(a_1,\tilde{a})$ ($\tilde{a}=(a_2,\cdots,a_n)$ $\in\tilde{D}-E$) とかける任意の $f(z)$ の零点について、$\nu_f(a)$ が、$f(z_1,\tilde{a})$ を z_1 のみの関数とみての $z_1=a_1$ での零点の位数となる。

多変数有理型関数の真性特異点に関し、次の事が成り立つ。

補題 3.4. 領域 $D:=\{0<|z_1|<r_1, |z_i|<r_i, 2\leq i\leq n\}$ 上の有理型関数 $\varphi(z_1,\cdots,z_n)$ に対し、$\tilde{D}=\{|z_i|<r_i, 2\leq i\leq n\}$ 内の或 Lebesgue 測度正の集合 P に属する任意の $\tilde{z}$ に対する $f(z_1,\tilde{z})$ が、z_1 のみの有理型関数として意味をもち、$z_1=0$ が除き得る特異点であると仮定する。この時、$f(z)$ は $\{|z_i|<r_i, 1\leq i\leq n\}$ 全体の有理型関数に接続される。

いずれも証明を略す(c.f., [6])。尚、[8] によれば、最近、B. Shiffman が補題 3.4 と同じ結果を得た (unpublished) との事である。

以上の準備のもとに、Borel の結果を次の様に精密化する。

定理 3.5. 恒等的に零ではない n 変数整関数 $f_0, f_1, \cdots, f_p$ ($p\geq 2$) が、適当な正整数 m_i ($0\leq i\leq p$) に対し、以下の条件をみたすものとする。

a) $\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{m_i}<\frac{1}{p-1}$,

b) 各 f_i は重複度 $<m_i$ の零点をもたない。

c) $f_{i_0}, f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ $(0 \leqq i_\ell \leqq p,\ k \geqq 1)$ が共通零点 z_0 をもつ時,

$$\nu_\ell := \nu_{f_{i_\ell}}(z_0) - \min(\nu_{f_{i_0}}(z_0), \nu_{f_{i_1}}(z_0), \ldots, \nu_{f_{i_k}}(z_0)) > 0$$

なる任意の ℓ $(0 \leqq \ell \leqq k)$ に対し, $\nu_\ell \geqq m_{i_\ell}$ である.

d) 任意の $i, j(\neq)$ に対し $\dfrac{f_i}{f_j} \not\equiv$ 定数である.

この時, $f_0, f_1, \ldots, f_p$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

注意 1. 各 $f_i(z)$ が或整関数 $h_i(z)$ によって $f_i(z) = e^{h_i(z)}$ とかける時, 零点をもたぬ事から, 十分大きな m_i に対し, 条件 a) ~ c) がみたされる. 従って, 定理 3.5 は, Borel の結果の $a_i(z) \equiv$ 定数の場合の精密化とみられる.

2. 定理 3.5 で, 各 f_i $(0 \leqq i \leqq p-1)$ が $f_i^{m_i}$ なる形をし, $f_p \equiv 1$ なる場合は, N. Toda によって研究された ([13]).

証明. 補題 3.2 によって, u のみの関数

$$(f_0)_z^*(u) := f_0(zu), \ \ldots\ldots, (f_p)_z^*(u) := f_p(zu)$$

が, 定理 3.5 の仮定 a) ~ d) をみたす $z \in S^{2n-1}$ が取れる. 又, $(f_0)_z^*, \ldots, (f_p)_z^*$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立なら, $f_0, f_1, \ldots, f_p$ も一次独立故, 定理 3.5 は, $n = 1$ の場合にのみ証明すれば十分である. そこで, 定数 $c^0, c^1, \ldots, c^p$ に対し,

$$c^0 f_0 + c^1 f_1 + \cdots + c^p f_p = 0$$

とする. どれかの i に対し $c^i = 0$ なる事を示せば十分である. 実際, これがいえれば, f_i $(0 \leqq i \leqq p)$ から任意に選んだ p 個についても条件 a) ~ d) が成り立つ事に注意すれば,

定理 3.5 は，p に関する数学的帰納で容易に証明される．$c^i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq p)$ と仮定する．零点が，位数もこめて，丁度 f_i $(1 \leqq i \leqq p)$ の共通零点である様な整関数 g をとり，$g_i = \frac{c^i f_i}{g}$ $(0 \leqq i \leqq p)$ とおく．正則関数の組 $\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_p)$ は共通零点なく，条件 b), c) より，$g_0 = -(g_1 + \cdots + g_p)$ および g_i $(1 \leqq i \leqq p)$ が，夫々，重複度 $< m_i$ $(0 \leqq i \leqq p)$ の零点をもち得ない．更に，帰納法の仮定から，$g_1, \cdots, g_p$ は一次独立，従って，Wronskian $W_{\mathfrak{g}}(z) \not\equiv 0$ である．必要なら原点をずらせて，$W_{\mathfrak{g}}(0) \neq 0$，$g_i(0) \neq 0$ $(0 \leqq i \leqq p)$ としてよい．この時，定義 2.3 および (2.4) から

$$
\begin{aligned}
N_{p-1}(r, g_i) &\leqq (p-1) N_1(r, g_i) = \frac{p-1}{m_i} m_i N_1(r, g_i) \\
&\leqq \frac{p-1}{m_i} N(r, g_i) \\
&\leqq \frac{p-1}{m_i} (T(r, \mathfrak{g}) + O(1))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．これより，$\delta_{p-1}(\mathfrak{g}, g_i) \geqq 1 - \frac{p-1}{m_i}$ $(0 \leqq i \leqq p)$ がいえ，定理 2.6 を使えば，

$$
\sum_{i=0}^{p} \left(1 - \frac{p-1}{m_i}\right) \leqq p
$$

となる．これは条件 (a) に矛盾する．よって定理 3.5 を得る．

Borel の恒等式の次の形の精密化も成り立つ．

定理 3.6．領域 D $(\subset \mathbb{C}^n)$ およびその既約解析的集合 S $(\subsetneqq D)$ に対し，$D - S$ 上の恒等的に零でない正則関数 $f_0, f_1, \cdots, f_p$ が定理 3.5 の条件 a) ～ c) をみたし，更に，

d') 任意の $\frac{f_i}{f_j}$ ($i \neq j$) を, D全体の有理型函数として接続できない。

とする. この時, D上の有理型函数 $\alpha^0, \alpha^1, \cdots, \alpha^p$ に対し,

$$\alpha^0 f_0 + \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^p f_p \equiv 0$$

ならば, つねに

$$\alpha^0 \equiv \alpha^1 \equiv \cdots \equiv \alpha^p \equiv 0$$

である.

証明は, 先ず, 補題 3.3 および補題 3.4 を使って一変数の場合へ帰着させた上, 定理 2.6 の $r_0 > 0$ の場合を適用して, 定理 3.5 と同じ方針で与える。詳細は略す (c. f., [6]).

§4. Picard の定理の拡張.

いわゆる Picard の小定理は, "$\mathbb{C}$ から Riemann 球 $P_1(\mathbb{C})$ への正則写像の像が 三点を除外すれば定数に限る" という形でのべられる. 前節の結果を使って, この定理を, $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合に拡張する.

領域 $D (\subset \mathbb{C}^n)$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f は, 各点の十分小さな近傍 U 上では, $P_N(\mathbb{C})$ の斉次座標を使って, U 上の正則函数 $f_i(z)$ $(0 \leq i \leq N)$ によって $f(z) = f_0(z) : f_1(z) : \cdots : f_N(z)$ と表わされる. 更に, ここで

$$\operatorname{codim}\{ f_0(z) = f_1(z) = \cdots = f_N(z) = 0 \} \geq 2$$

をみたす様にできる。以後, この様な f の表示を, U 上での

admissible representation と呼ぶ事にする。$P_N(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$H : a^0 w_0 + a^1 w_1 + \cdots + a^N w_N = 0$$

を考える。$f(D) \not\subset H$ なる仮定のもとに，正則関数 $F := a^0 f_0 + a^1 f_1 + \cdots + a^N f_N$ を使って，$\nu(f, H) := \nu_F$ とおく。これは，f の局所的な admissible representation の取り方に関係せずきまり，D 全体で確定した意味をもつ。

さてそこで，$P_N(\mathbb{C})$ 内に，q $(:= N + t + 1 > N + 1)$ 個の一般の位置にある超平面 H_i $(0 \leqq i \leqq N + t)$ を取る。各 H_i が

$$H_i : w_i = 0 \qquad 0 \leqq i \leqq N$$

$$H_j : a_j^0 w_0 + a_j^1 w_1 + \cdots + a_j^N w_N = 0 \qquad N+1 \leqq j \leqq N+t$$

として与えられる様な斉次座標 $w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ を固定する。そこで，添字の集合 $I := \{0, 1, \cdots, N\}$ の任意の分割 $J = (J_1, \cdots, J_p)$ を考える。ここで $I = \bigsqcup_{\ell=1}^{p} J_\ell$，$J_\ell \cap J_m = \phi$ $(\ell \neq m)$ 且つ $p \geqq 2$ とする。又，写像 $\chi : \{1, 2, \cdots, t\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, p\}$ を任意に取り，$\ell \neq \chi(s)$ なるすべての ℓ，s $(1 \leqq \ell \leqq p,\ 1 \leqq s \leqq t)$ に対し，$\sum_{i \in J_\ell} a_{N+s}^i w_i = 0$ をみたす $P_N(\mathbb{C})$ の点 $w = w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ の全体を $E_{J,\chi}$ とおく。

定理 4.1. $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f が，上述の $\{H_i : 0 \leqq i \leqq N + t\}$ に対し，次の条件をみたすとする。

適当な正整数 m_i $(0 \leqq i \leqq N + t)$ に対し

a) 任意の $1 \leqq s \leqq t$ なる s に対し

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{N+s}} < \frac{1}{N},$$

b) $f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$ $(0 \leqq i \leqq N+t)$ で，且つ，$\nu(f, H_i)(z) > 0$ なる z でつねに $\nu(f, H_i)(z) \geqq m_i$，

c) $f(z^0) \in H_{i_0} \cap H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}$ $(z^0 \in \mathbb{C}^n,\ 0 \leqq i_\ell \leqq N+t,\ k \geqq 1)$ なる時，任意の ℓ $(0 \leqq \ell \leqq k)$ に対し，

$$\nu_\ell := \nu(f, H_{i_\ell})(z^0) - \min_{0 \leqq \ell \leqq k} \nu(f, H_{i_\ell})(z^0)$$

が，零か，さもなければ $\geqq m_{i_\ell}$，

この時，f は定数となるか，又はその像が或 $E_{J,\chi}$ の $\leqq p-1$ 次元の線型部分空間に含まれる．ここで，p は分割 J における類の数を表わし，つねに $p \leqq \frac{t+N+1}{t+1}$ である．

証明．$\mathbb{C}^n$ 全体での f の admissible representation $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_N$ を取り，$\frac{f_i}{f_j} \equiv$ 定数．なる i，j を同じ類 J_ℓ に入るとして $\{0, 1, \cdots, N\}$ の分割 $J = (J_1, \cdots, J_p)$ を考える．$p = 1$ となるのは f が定数の場合だから，$p \geqq 2$ とする．各 J_ℓ から一つづつ代表元 N_ℓ を選び，$c_j^\ell := \sum_{i \in J_\ell} a_j^i \frac{f_i}{f_{N_\ell}}$ $(1 \leqq \ell \leqq p,\ N+1 \leqq j \leqq N+t)$ とおく．この時，

$$F_j = a_j^0 f_0 + \cdots + a_j^N f_N = c_j^1 f_{N_1} + c_j^2 f_{N_2} + \cdots + c_j^p f_{N_p}$$

なる関係式をうるが，F_{N+s} $(1 \leqq s \leqq t)$ は，どれかの f_{N_λ} $(=: f_{N_{\chi(s)}}$ とおく$)$ との比が定数である．もしそうでなければ，F_{N+s}，f_{N_1}，$\cdots$，f_{N_p} に定理 3.5 を適用して矛盾に達するからである．上の式を

$$C_{N+s}^{1} f_{N_1} + \cdots + \left(C_{N+s}^{\chi(s)} - \frac{F_{N+s}}{f_{N_{\chi(s)}}}\right) f_{N_{\chi(s)}} + \cdots + C_{N+s}^{p} f_{N_p} = 0$$

とかきなおし，f_{N_l} $(1 \leq l \leq p)$ に再び定理 3,5 を適用すれば，$C_{N+s}^{l} = 0$ $(l \neq \chi(s),\ 1 \leq l \leq p)$ を得る．これは，写像 $\chi : s \longmapsto \chi(s)$ に対し，$f(\mathbb{C}^n) \subset E_{J,\chi}$ となる事を意味する．更に，同じ J_l 内の i, j に対し $\frac{f_i}{f_j} \equiv$ 定数 となる事に注意すれば，$f(\mathbb{C}^n)$ が $\leq p-1$ 次元部分空間に含まれる事は明らかである．又，$p \leq \frac{t+N+1}{t+1}$ は，組み合わせ論的な考察で容易に得られる（c.f.，[5]）．

注意．1．定義からわかる様に，$\bigcup_{J,\chi} E_{J,\chi}$ は個々の f によらない．又，$E_{J,\chi} \not\subset \{w_i = 0\}$ $(0 \leq i \leq N)$ なる任意の $E_{J,\chi}$ に対し $\dim E_{J,\chi} \leq N-(p-1)t \leq N-t$ が容易に示される．

2．$f(\mathbb{C}^n) \cap H_i = \phi$ $(0 \leq i \leq N+t)$ なる時，十分大きな m_i に対し，条件 a) ～ c) がみたされる，この特別の場合は，[5] および [7] で与えられた．又，特に $t = N = 1$ とした場合が Picard の小定理である．

3．定理 4.1 で $N = n = t = 1$，従って $q = 3$ の場合は，条件 a) の不等式は或意味で best possible である．例えば，相異なる実数 α, β, γ に対し

$$z(w) = \int_0^w (t-\alpha)^{\frac{1}{m_1}-1} (t-\beta)^{\frac{1}{m_2}-1} (t-\gamma)^{\frac{1}{m_3}-1} dt$$

の逆関数 $w = w(z)$ は，$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1$ の時，一価となり，$w(z)-\alpha$，$w(z)-\beta$，$w(z)-\gamma$ の零点の重複度

は，夫々，m_1，m_2，m_3 の倍数ばかりである（c.f., [10], p. 278）．

系 4.2．$d > N(N+2)$ に対し，$P_{N+1}(\mathbb{C})$ 内の超曲面

$$V^d : \quad w_0^d + w_1^d + \cdots + w_{N+1}^d = 0$$

への，$\mathbb{C}^n$ からの任意の正則写像 f は，添字 $0, 1, \cdots, N$ を適当にいれかえ

$$f = a_0 f_1 : a_1 f_1 : \cdots : a_{N_1} f_1 : a_{N_1+1} f_2 : \cdots : a_{N_2} f_2 : \cdots\cdots : a_{N_p} f_p$$

とかかれる．ここで，$0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_p := N+1 \ (p \geqq 1)$，$a_i$ は $\sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{i=N_\ell} a_i^d = 0$，$(a_0, a_1, \cdots, a_{N+1}) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ なる定数，f_i は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数である．

証明．整関数 f_i によって $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_{N+1}$ と表示する．ここで，$f_i \not\equiv 0 \ (0 \leqq i \leqq N+1)$ としてよい．この時，$P_N(\mathbb{C})$ への写像 $g = f_0^d : f_1^d : \cdots : f_N^d$，および，$P_N(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$H_i : \quad w_i = 0 \qquad 0 \leqq i \leqq N$$

$$H_{N+1} : \quad w_0 + w_1 + \cdots + w_N = 0$$

に対し，$m_0 = m_1 = \cdots = m_{N+1} = d$ として，定理 4.1 の条件 a) ～ c) がみたされる．系 4.2 はこれより明らかである．

定理 3.6 を使えば，定理 4.1 の類比として次の事がいえる．

定理 4.3．f を，領域 D から既約解析的集合 $S (\subsetneq D)$ を除いた所からの $P_N(\mathbb{C})$ への正則写像とし，一般の位置にある超平面 $\{H_i : 0 \leqq i \leqq N+k\}$ に対し，定理 4.1 の条件 a) ～ c) の類比が成り立つとする．この時，f は，D から $P_N(\mathbb{C})$ への有

理型写像に拡張されるか，又は，$f(D-S)$ が或 $E_{J,\chi}$ に含まれる．

証明は略す．

§5. $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の一意性．

Borel の恒等式の，今一つの応用として，$P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の一意性定理を与える．

f, g を $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像，H_i $(0 \leqq i \leqq N+k)$ を $q := N+k+1$ 個の一般の位置にある超平面とする．$f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$, $g(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$ $(0 \leqq i \leqq N+k)$ とし，更に，$\nu(f, H_i) = \nu(g, H_i)$ が成り立つものとする．この仮定のもとに f と g の間の関係を考察する．

斉次座標 $w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ を固定し，各 H_i が

$$H_i \ : \ a_i^0 w_0 + a_i^1 w_1 + \cdots + a_i^N w_N = 0$$

で与えられるとし，f, g の admissible representation $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_N$, $g = g_0 : g_1 : \cdots : g_N$ に対し，正則関数

$$F_i^f = a_i^0 f_0 + a_i^1 f_1 + \cdots + a_i^N f_N$$
$$F_i^g = a_i^0 g_0 + a_i^1 g_1 + \cdots + a_i^N g_N .$$

を考える．仮定により，$h_i := \dfrac{F_i^g}{F_i^f}$ は到る所零でない整関数である．ここで，連比 $h_0 : h_1 : \cdots : h_{N+k}$ は，斉次座標，admissible representation 等の取り方によらず一定である．

今，h_i の中から，任意に $2N+2$ 個を選び，それを改め

て，h_0, h_1, $\cdots$, h_{2N+1} とする．

補題 5.1. 上述の h_i $(0 \leqq i \leqq 2N+1)$ の間に

$$\sum_{0 \leqq i_0 < i_1 < \cdots < i_N \leqq 2N+1} A_{i_0 i_1 \cdots i_N} h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N} \equiv 0$$

なる関係式が成り立つ。ここで，$A_{i_0 i_1 \cdots i_N}$ は H_i のみによってきまる零でない定数である．

証明．斉次座標を取り換えて，各 H_i $(0 \leqq i \leqq N)$ が $H_i = \{w_i = 0\}$，即ち，$a_j^i = \delta_j^i$ $(0 \leqq i, j \leqq N)$ としてよい。この時，$f_i = F_i^f$, $g_i = F_i^g$ $(0 \leqq i \leqq N)$ だから，$h_i F_i^f = F_i^g$ $(0 \leqq i \leqq 2N+1)$ から，

$$a_j^0 (h_j - h_0) f_0 + a_j^1 (h_j - h_1) f_1 + \cdots + a_j^N (h_j - h_N) f_N = 0 \quad (N+1 \leqq j \leqq 2N+1)$$

が成り立つ。これから，f_0, f_1, $\cdots$, f_N を消去すると

$$\Psi := \begin{vmatrix} a_{N+1}^0 (h_{N+1} - h_0), & a_{N+1}^1 (h_{N+1} - h_1), & \cdots, & a_{N+1}^N (h_{N+1} - h_N) \\ a_{N+2}^0 (h_{N+2} - h_0), & a_{N+2}^1 (h_{N+2} - h_1), & \cdots, & a_{N+2}^N (h_{N+2} - h_N) \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{2N+1}^0 (h_{2N+1} - h_0), & a_{2N+1}^1 (h_{2N+1} - h_1), & \cdots; & a_{2N+1}^N (h_{2N+1} - h_N) \end{vmatrix} \equiv 0$$

が得られる．これを h_0, h_1, $\cdots$, h_{2N+1} の多項式として展開して，その係数をみる．行列 $((a_j^i))_{\substack{0 \leqq i \leqq N \\ N+1 \leqq j \leqq 2N+1}}$ の任意の小行列式が零でない事に注意すれば，補題 5.1 にいう形の関係式が容易に得られる．

補題 5.1 で，各 $h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}$ が零点をもたぬ整関数である事から，定理 3.5 とそれへの注意 1 を適用すれば，任意の $i_0, i_1, \cdots, i_N$ $(0 \leqq i_0 < \cdots < i_N \leqq 2N+1)$ に対し，$\dfrac{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \cdots h_{j_N}} \equiv$ 定数

となる様な $j_0, j_1, \cdots, j_N$ ($0 \leqq j_0 < \cdots < j_N \leqq 2N+1$, $\{i_0, \cdots, i_N\} \neq \{j_0, \cdots, j_N\}$) が取れる．以下の議論で次の補題が基本的である．

補題 5.2. g個の恒等的には零ではない整関数 h_i ($0 \leqq i \leqq L := g-1$) を考える．ここから勝手なM個を選ぶ時，その中の任意の相異なるN+1個 $h_{i_0}, h_{i_1}, \cdots, h_{i_N}$ に対し，これとは組合わせとして異なる $h_{j_0}, \cdots, h_{j_N}$ を，選んだM個の中から取って

$$\frac{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \cdots h_{j_N}} \equiv 定数$$

となる様にできると仮定する．ここで $g \geqq M > N+1$ ($N \geqq 0$) とし，$k := g - M$ とおく。この時，与えられたg個のh_iの内の適当な$k+2$個について，互いの比が定数となる．

証明．Nとgの二重帰納法による．先ず，$N=0$の時をみる．任意のg個のh_iに対し，その中の一つ，例えばh_0，との比が定数となるものがh_0も含めて$\leqq k+1$個とすると，g個から適当なk個を除き，残りM個の中にh_0は含むが，h_0自身の他は，h_0との比が定数となるものは含まない様にできる．これに仮定を適用すれば矛盾に逢着する．よってこの場合は正しい。

次に，任意のNに対し$g = N+2$の時をみる．この時，$k=0$である．N+2個の元から，N+1個の元からなる相異なる二組の組み合わせをとれば，夫々の中の一つづつを除いて他が等しくなる事から，この場合も補題5.2は正しい．

そこで，$\leqq N-1$ なる N については，任意の q に対し，又，N については，$\leqq q-1$ なる任意の q に対し補題 5.2 は正しいと仮定して結論を導びく．この~~為~~，各 h_i $(0 \leqq i \leqq L)$ が定数 d_i，整数 r_i (>0) および s_{ij} によって

$$(*) \qquad h_i^{r_i} = d_i g_1^{s_{i1}} g_2^{s_{i2}} \cdots g_k^{s_{ik}}$$

の形に書ける様な整関数 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ を考えて，その中で個数 k が最小となる様な組を取る，ここで $h_0, h_1, \cdots, h_L$ 自身上の g_j の性質をもつ故 $k \leqq q$ である．この様な $g_1, \cdots, g_k$ を以下で minimal generator と呼ぶ事にする．この時，整数 $s_1, s_2, \cdots, s_k$ に対し，$g_1^{s_1} g_2^{s_2} \cdots g_k^{s_k} \equiv$ 定数 $(=: c)$ ならば，必らず $s_1 = s_2 = \cdots = s_k = 0$ である．実際，例えば，$s_1 \neq 0$ とすると，$g_1^{s_1} = c g_2^{-s_2} \cdots g_k^{-s_k}$ と書け，r_i，d_i，s_{i1} 等をとりかえて，各 h_i が $g_2, \cdots, g_k$ のみで $(*)$ の形に書ける事になり，k の選び方に反するからである．又，$(*)$ で $r_0 = r_1 = \cdots = r_L = 1$ としてよい．なぜなら，明らかに，r_i をすべて，その最小公倍数に置きかえてよいし，更に h_i の代りに $h_i' = h_i^r$ を考えれば，これに対しても $g_1, \cdots, g_k$ は minimal generator であり，$h_0', h_1', \cdots, h_L'$ に対して結論がいえれば，$h_0, h_1, \cdots, h_L$ にもいえるからである．

補題 5.2 をみるには，或 j_0 に対し $s_{ij_0} \neq s_{i'j_0}$ $(i \neq i')$ なる i, i' が存在するとしてよい．そうでなければ，すべての i，

j に対し，$\frac{h_i}{h_j}$＝定数 となるからである（ここで，$g \geqq k+2$ がつねに成り立つ事に注意）．以後 $s_i := s_{ij_0}$ $(0 \leqq i \leqq L)$ と略記する．ここで添字 $0, 1, \cdots, L$ をつけかえ，又，s_N と等しいものに注目して

$$s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_{L_1-1} < s_{L_1} = \cdots = s_N = \cdots = s_{L_1+L_2} < s_{L_1+L_2+1} \leqq \cdots \leqq s_L$$

とする．仮定から，$L_1 > 0$ か，又は $L_1 + L_2 < L$ である．この時

(5.3) $i_0, i_1, \cdots, i_N$ $(i_0 < \cdots < i_N)$ を $i_0 = 0,\ i_1 = 1, \cdots, i_{L_1-1} = L_1 - 1$ とし，残りを $L_1, L_1+1, \cdots, L_1+L_2$ から任意に選んで，

$$\frac{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \cdots h_{j_N}} = 定数$$

となる $j_0, j_1, \cdots, j_N$ $(0 \leqq j_0 < \cdots < j_N \leqq L)$ を取れば，必らず，$j_0 = 0,\ j_1 = 1, \cdots, j_{L_1-1} = L_1 - 1$ 且つ $L_1 \leqq j_\ell \leqq L_1 + L_2$ $(L_1 \leqq \ell \leqq N)$ である．

実際，上の式の分子分母を，$g_1, g_2, \cdots, g_K$ で表わし，g_{j_0} の指数と比較すれば，先にみた様に等しいはずである；故に

$$s_{i_0} + s_{i_1} + \cdots + s_{i_N} = s_{j_0} + s_{j_1} + \cdots + s_{j_N}$$

即ち，

$$(s_{j_0} - s_0) + \cdots + (s_{j_{L_1-1}} - s_{L_1-1}) + (s_{j_{L_1}} - s_{i_{L_1}}) + \cdots + (s_{j_N} - s_{i_N}) = 0$$

となる．添字のきめ方から，各項は $\geqq 0$，従って $= 0$ となる．$s_{j_0} = s_0, \cdots, s_{j_N} = s_{i_N}$ から (5.3) の結論を得る．

これより，$L_2 - k > N - L_1$ となる．なぜなら，$L_1 + L_2 \leqq N + k$ とすると，h_i $(0 \leqq i \leqq L)$ から $h_0, h_1, \cdots, h_N$ を残し，$h_{N+1}, \cdots, h_{L_1+L_2}$ を含む k 個を除いての残りの M 個に，

補題5.2を適用して，$\frac{h_0 h_1 \cdots h_N}{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}$ ＝定数 となる $i_0, i_1, \dots, i_N$ $(0 \le i_0 < \cdots < i_N \le L)$ を取ろうとしても，$i_0 = 0$, $i_1 = 1$, $\dots$, $i_N = N$ となってしまうからである．又，(5.3)を使えば，$h_{L_1}, \dots, h_{L_1+L_2}$ から任意の k 個を選んで除いておき，残りの L_2+1-k 個から $i_{L_1}, \dots, i_N$ を勝手に取り $h_0 h_1 \cdots h_{L_1-1} h_{i_{L_1}} \cdots h_{i_N}$ との比が定数になる様な h_i の $N+1$ 個の積を考える事によって，$N' = N - L_1$，$q' = L_2 + 1$，$M' = q' - k$ として，補題5.2の仮定がみたされる事がわかる．$L_1 > 0$ ならば $N' < N$ だし，$L_1 = 0$ ならば $q' = L_1 + L_2 + 1 < L + 1 = q$ だから，帰納法の仮定が適用される．従って，$h_{L_1}, h_{L_1+1}, \dots, h_{L_1+L_2}$ の中の適当な $k+2$ 個に対し互いの比が定数となる．よって補題5.2は証明された．

定理5.4. f, g を，$\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への二つの有理型写像とする．一般の位置にある $3N+1$ 個の超平面 H_i $(0 \le i \le 3N)$ に対し，$\nu(f, H_i) = \nu(g, H_i)$ ならば，$P_N(\mathbb{C})$ の適当な一次変換 L に対し $L \circ f = g$ となる．

証明．本節初めの様な整関数 $h_0, h_1, \dots, h_{3N}$ を考えれば，補題5.1の後の議論により，$q = 3N+1$，$M = 2N+2$ として補題5.2の仮定が成り立つ．従って，h_i の中の適当な $k+2$ $(= 3N+1-(2N+2)+2 = N+1)$ 個について，互いの比が定数となる．連比 $h_0 : h_1 : \cdots : h_{3N+1}$ のみが問題故，h_i の $N+1$ 個が定数と考えてよい．よって，適当な座標を使って

の f, g の admissible representation $f=f_0:f_1:\cdots:f_N$ および $g=g_0:g_1:\cdots:g_N$ に対し，定数 x_i によって $g_i=x_if_i$ $(0\leqq i\leqq N)$ とかける．この時，

$$L:\quad w_i'=x_iw_i\qquad(0\leqq i\leqq N)$$

なる一次変換を考えれば，$Lf=g$ である．

定理 5.5. f, g を $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への非退化な，即ち，像がいかなる超平面にも含まれない様な有理型写像とする．もし，一般の位置にある $3N+2$ 個の超平面 H_i $(0\leqq i\leqq 3N+1)$ に対し，$\nu(f,H_i)=\nu(g,H_i)$ ならば $f=g$ である．

注意．$n=N=1$ の場合，定理 5.4 および定理 5.5 は，finite genus の整関数に対し，G. Pólya によって [11] で初めて示された．後に R. Nevanlinna が，一般の整関数の場合に証明した．この場合，定理 5.5 では，重複度は考えず，逆像が一致するという仮定のみでよい．N が一般でも，十分大きな d に対し，$\nu(f,H_i)-\nu(g,H_i)$ が，すべて d の倍数という仮定で同様の議論ができるが，ここでは，これには立ち入らない．

証明．定理 5.4 の証明と同様の議論をやり，今度は $N+2$ 個の h_i を定数と考えてよい．定数 x_i による $g_i=x_if_i$ $(0\leqq i\leqq N)$ なる関係式の他に，新しい定数 x_{j_0} を取って

$$a_{j_0}^0g_0+a_{j_0}^1g_1+\cdots+a_{j_0}^Ng_N=x_{j_0}(a_{j_0}^0f_0+\cdots+a_{j_0}^Nf_N)$$

なる関係式を得る。これは、$f_0, f_1, \ldots, f_N$ の定数係数の一次式に帰されるが、f が非退化の仮定から係数はすべて零，従って $x_0 = x_1 = \cdots = x_N = x_{j_0}$ を得る。これは $f = g$ を意味する。よって定理5.5は証明された。

参考文献

[1] E. Borel, Sur les zéros des fonctions entières, Acta math., 20 (1897), 357–396.

[2] H. Cartan, Sur les systèmes de fonctions holomorphes a variétés linéaires lacunaires et leurs applications, Ann. de ENS., 45 (1928), 255–346.

[3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Math., 7 (1933), 5–31.

[4] H. Fujimoto, Riemann domains with boundary of capacity zero, Nagoya Math. J., 44 (1971), 1–15.

[5] H. Fujimoto, Extensions of the big Picard's theorem, Tôhoku Math. J., 24 (1972), 415–422.

[6] H. Fujimoto, Meromorphic maps into the complex projective space, to appear.

[7] M. L. Green, Holomorphic maps into the complex projective space omitting hyperplanes, Trans. A.M.S., 169 (1972), 89–103.

[8] M. L. Green, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, thesis, Princeton, 1972.

[9] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math., 48 (1926), 367-391.

[10] R. Nevanlinna, Analytic functions, Springer, Berlin, 1970.

[11] G. Pólya, Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, Math. Tidsscrift B, Kobenhavn 1921, 16-21.

[12] E. M. Schmid, Some theorems on value distributions of meromorphic functions, Math. Z., 120 (1971), 61-92.

[13] N. Toda, On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f^{n_i} = 1$, Tôhoku Math. J., 23 (1971), 289-299.