数理解析研究所講究録
196巻 1973年 10-23

波動方程式の初期値問題について

東大 理　木村俊房

§1 序

波動方程式の初期値問題

$$(W)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

$$u(0, x) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x),$$

の解は次の様に具体的に与えられる。

$n \geqq 3$ が奇数のとき

$$u(t, x) = \frac{1}{(n-2)!!}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\,\omega[f; t, x]\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\,\omega[g; t, x]\right)\right\},$$

$n \geqq 2$ が偶数のとき,

$$u(t,x) = \frac{1}{(n-2)!!}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[f;\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^t \omega[g;\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho \right\},$$

こゝで,

$$(n-2)!! = \begin{cases} (n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & n:奇 \\ (n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & n:偶, \end{cases}$$

$$\omega[f;t,x] = \frac{1}{\sigma_{n-1}}\int_{\|\xi\|=1} f(x_1+t\xi_1,\cdots,x_n+t\xi_n)\,d\omega,$$

σ_{n-1} は $n-1$ 次元球面の面積,

$d\omega$ は $n-1$ 次元単位球面の面積要素.

本稿の目的は Laplace の方程式の半空間における Dirichlet 問題, Neumann 問題の公式から上の公式を導くことにある.

§2 Laplace の方程式の半空間における Dirichlet, Neumann 問題

$n+1$ 変数の Laplace の方程式

$$(L) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \Delta u = 0, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

を考える。$\mathbb{R}^{n+1}$ の半空間

$$x_0 > 0$$

に対する Dirichlet 問題

$$u(0, x) = f(x)$$

と Neumann 問題

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}(0, x) = g(x)$$

の解はそれぞれ

$$\varphi(x_0, x) = \frac{2x_0}{\sigma_n}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi_1, \cdots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n}{\left(x_0^2 + (x_1-\xi_1)^2 + \cdots + (x_n-\xi_n)^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \tag{2.1}$$

$$\psi(x_0, x) = \frac{-2}{(n-1)\sigma_n}\int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\xi_1, \cdots, \xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n}{\left(x_0^2 + (x_1-\xi_1)^2 + \cdots + (x_n-\xi_n)^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} \tag{2.2}$$

で与えられる。

こゝで $(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ と仮定したが、複素変数にしても

$$r^2 = x_0^2 + (x_1-\xi_1)^2 + \cdots + (x_n-\xi_n)^2 \neq 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

なる $(x_0, x) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、$\varphi(x_0, x)$ と $\psi(x_0, x)$ は定義され複素解析的である。$x_1, \cdots, x_n$ は実変数とし、x_0 を複素変数として、

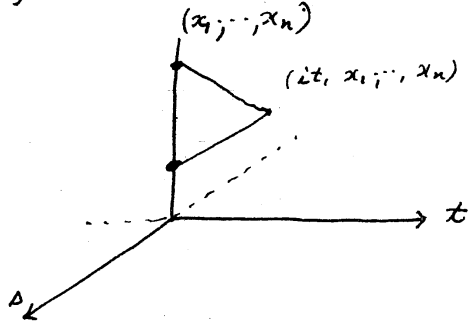
$$x_0 = s + it$$

とおく．

$s>0$ or $s<0$ ならば (2.3) は成りたつから，φ と ψ は $\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n$ の2つの半空間

$$s>0,$$
$$s<0$$

の各々で定義されそこで x_0 について holomorphic である．一方与えられた $(it, x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}^n$ に対し $r=0$ となる点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ は $n-1$ 次元の球面を作る．



§3. 方針

変換

$$x_0=it$$

によって Laplace の方程式 (L) は波動方程式 (W) に移る．したがって，(L) の1つの解 $u(x_0, x)$ に対して $v(t, x)=u(it, x)$ は意味をもつ限り (W) の解となる．しかし，(L) の解 $\varphi(x_0, x)$，$\psi(x_0, x)$ に対しては直接

$$x_0=it$$

とおくことができない。 $s>0$ とすると

$$\varphi(s+it, x),\quad \varphi(-s+it, x)$$

$$\psi(s+it, x),\quad \psi(-s+it, x)$$

は意味をもっている。

(2.1) から

$$\varphi(s, x) = -\varphi(-s, x),$$

したがって

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial s}(-s, x).$$

これと

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

に注意して、

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(s, x) - \varphi(-s, x)\right) \to f(x) \qquad (s \to 0)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, x) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(-s, x)\right) \to 0 \qquad (s \to 0)$$

を得る。

(2.2) から

$$\psi(s, x) = \psi(-s, x)$$

したがって

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}(s, x) = -\frac{\partial\psi}{\partial s}(-s, x).$$

ゆえに

$$\frac{1}{2i}\left(\psi(s,x)-\psi(-s,x)\right)\to 0 \qquad (s\to 0),$$

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}(s,x)-\frac{\partial\psi}{\partial t}(-s,x)\right)\to g(x) \qquad (s\to 0)$$

を得る.

以上の考察から, $s\to 0$ のとき

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(s+it,x)-\varphi(-s+it,x)\right)$$

は波動方程式 (W) の

$$u(0,x)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$$

をみたす解に,

$$\frac{1}{2i}\left(\psi(s+it,x)-\psi(-s+it,x)\right)$$

は (W) の

$$u(0,x)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)$$

をみたす解に収束することが期待される.

これが実際成りたつことを示すのが方針である.

解 $\varphi(x_0,x)$, $\psi(x_0,x)$ は, $\omega[f;t,x]$, $\omega[g;t,x]$ を使って, 次のように書き直される

$$\varphi(x_0,x)=\frac{2\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\,x_0\int_0^\infty \omega[f,\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\rho,$$

$$\psi(x_0,x)=\frac{-2\sigma_{n-1}}{(n-1)\sigma_n}\int_0^\infty \omega[g,\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,d\rho.$$

以下，n は奇数のときは $\geqq 3$，偶数のときは $\geqq 2$ とする.

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

を使うと，

$$\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(n-2)!!}\dfrac{1}{\pi} & n:奇 \\ \dfrac{(n-1)!!}{2(n-2)!!} & n:偶 \end{cases}$$

§4 積分の変形

積分

$$I = \int_0^\infty F(\rho)\frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\rho$$

を考える.

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho^{n-2}F(\rho)\frac{2\rho}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\rho$$

に部分積分を行って

$$I = \frac{1}{n-1}\left\{\left[-\rho^{n-2}F(\rho)\frac{1}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d}{d\rho}\left(\rho^{n-2}F(\rho)\right)\frac{d\rho}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}\right\}$$

右辺の第1項は消えると仮定して（以下同様の仮定を行う），

$$I = \frac{1}{n-1}\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{n-2}F(\rho)\right)\frac{\rho}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,d\rho.$$

この操作をくり返すことにより，

n が奇数のとき

$$I=\frac{1}{(n-1)!!}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\rho^{n-2}F(\rho)\right)\frac{\rho}{x_0^2+\rho^2}\,d\rho\,,$$

n が偶数のとき

$$I=\frac{1}{(n-1)!!}\int_0^\infty\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\rho^{n-2}F(\rho)\right)\frac{\rho}{\sqrt{x_0^2+\rho^2}}\,d\rho$$

を得る．これから

$$\frac{1}{2}\left\{\varphi(s+it,x)-\varphi(-s+it,x)\right\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)!!\,\pi}\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\rho^{n-2}\omega[f,\rho,x]\right)\left(\frac{s+it}{(s+it)^2+\rho^2}-\frac{-s+it}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho & (n:\text{奇})\\[2ex]\dfrac{1}{2(n-2)!!}\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\rho^{n-2}\omega[f,\rho,x]\right)\left(\frac{s+it}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{-s+it}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho & (n:\text{偶})\end{cases}$$

を得る．

積分

$$J=\int_0^\infty F(\rho)\frac{\rho^{n-1}}{(x_0^2+\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}}\,d\rho$$

も同様にして，

n が奇数のとき

$$J = \frac{1}{(n-3)!!}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^{\frac{n-3}{2}}(\rho^{n-2}F(\rho))\frac{\rho}{x_0^2+\rho^2}\,d\rho,$$

n が偶数のとき

$$J = \frac{1}{(n-3)!!}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^{\frac{n-2}{2}}(\rho^{n-2}F(\rho))\frac{\rho}{\sqrt{x_0^2+\rho^2}}\,d\rho.$$

これから,

$$\frac{1}{2i}\left\{\psi(s+it,x)-\psi(-s+it,x)\right\}$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)!!\,\pi i}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n-3}{2}}(\rho^{n-2}\omega[g;\rho,x])\left(\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2}-\frac{1}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho & (n:\text{奇}) \\[2ex] -\dfrac{1}{2(n-2)!!\,i}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n-2}{2}}(\rho^{n-2}\omega[g;\rho,x])\left(\frac{1}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho & (n;\text{偶}) \end{cases}$$

したがって問題は次の4つの積分

$$N_1(s) = \int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2}-\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho,$$

$$D_1(s) = \int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{s+it}{(s+it)^2+\rho^2}-\frac{-s+it}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho,$$

$$N_2(s) = \int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho,$$

$$D_2(s)=\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{s+it}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{-s+it}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho$$

の計算に着帰する.

ここで次の注意をしておく.

$$\int_0^t \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho=\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{d}{d\rho}F(\rho)\sqrt{t^2-\rho^2}\,d\rho$$

$$=\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\int_0^t F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho\,,$$

したがって,

$$\int_0^t\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^k F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho=\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^k\int_0^t F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho.$$

§5 積分の実行

積分

$$N_1(s)=\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2}-\frac{1}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\,d\rho$$

を考える.

$$N_1(s)=-i\int_0^\infty F(\rho)\frac{2st\cdot 2\rho}{(t^2-\rho^2-s^2)+(2st)^2}\,d\rho$$

と3つの部分

$$\int_0^{t-\delta}{}'' \quad , \quad \int_{t-\delta}^{t+\delta} \quad , \quad \int_{t+\delta}^{\infty}$$

に分ける.

$$\int_0^{t-\delta} \to 0, \quad \int_{t+\delta}^{\infty} \to 0 \qquad (s \to 0)$$

はすぐ分る. 2番目を計算して

$$\int_{t-\delta}^{t+\delta} \to \pi F(t) + \varepsilon(\delta) \qquad (s \to 0),$$

$$\varepsilon(\delta) \to 0 \qquad (\delta \to 0)$$

がいえる. これから

$$N_1(s) \longrightarrow -\pi i\, F(t) \qquad (s \to 0).$$

ゆえに, n が奇数のとき,

$$\frac{1}{2i}\left\{\psi(s+it, x) - \psi(-s+it, x)\right\} \to \underbrace{\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}}_{\frac{1}{(n-2)!!}} \left(t^{n-2}\,\omega[g; t, x]\right).$$

次に積分

$$D_1(s) = \int_0^{\infty} F(\rho)\left(\frac{s+it}{(s+it)^2+\rho^2} - \frac{-s+it}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\, d\rho$$

を考える.

$$D_1(s) = s\int_0^{\infty} F(\rho)\left(\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2} + \frac{1}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\, d\rho$$
$$+ it\int_0^{\infty} F(\rho)\left(\frac{1}{(s+it)^2+\rho^2} - \frac{1}{(-s+it)^2+\rho^2}\right)\rho\, d\rho$$

の右辺第1項は、$s\to 0$ のとき 0 に収束し、第2項は $s\to 0$ のとき $it(-\pi i)F(t)=\pi t F(t)$ に収束する。ゆえに、n が奇数のとき

$$\frac{1}{2}\left(\varphi(s+it,x)-\varphi(-s+it,x)\right)\longrightarrow \underbrace{\ }_{\frac{1}{(n-2)!!}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\,\omega[g,t,x]\right).$$

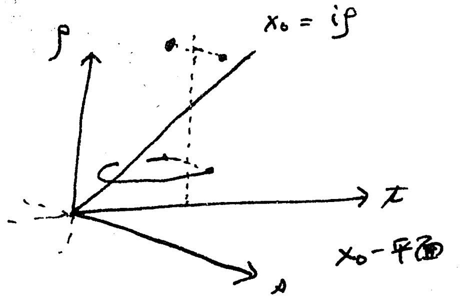
第3の積分

$$N_2(s)=\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho$$

を考える。$\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}$ と $\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}$ の分枝のとり方が問題である。$x_0^2+\rho^2=0$ の零点は $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 内の直線

$$x_0=\pm i\rho$$

である



$\rho>t$ のとき

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}=\lim_{s\to 0}\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}=\sqrt{\rho^2-t^2}>0,$$

$0<\rho<t$ のとき

$$\lim_{s\to 0}\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}=-\lim\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}=i\sqrt{t^2-\rho^2}$$

となるように分枝を定める。そのとき

$$N_2(s) = \int_0^t 〃 \quad + \int_t^\infty$$

において

$$\int_0^t 〃 \quad \to \frac{2}{i}\int_0^t F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho \qquad (s\to 0),$$

$$\int_t^\infty 〃 \quad \to 0 \qquad (s\to 0)$$

がいえる。ゆえに、n が偶数のとき

$$\frac{1}{2i}\left\{\psi(s+it,x)-\psi(-s+it,x)\right\} \to \frac{1}{(n-2)!!}\int_0^t\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\rho^{n-2}\omega[g;\rho,x]\right)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho$$

$$=\frac{1}{(n-2)!!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^t\omega[g;\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,d\rho.$$

最後に積分

$$D_2(s)=\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{s+it}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{-s+it}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho$$

を考える。

$$D_2(s)= s\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}+\frac{1}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho$$

$$+\,it\int_0^\infty F(\rho)\left(\frac{1}{\sqrt{(s+it)^2+\rho^2}}-\frac{1}{\sqrt{(-s+it)^2+\rho^2}}\right)\rho\,d\rho.$$

右辺の第1項は $s\to 0$ のとき 0 に近づく．第2項は $s\to 0$ とき

$$it\cdot\frac{2}{i}\int_0^t F(\rho)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho$$

に近づく．これから，n が偶数のとき，$s\to 0$ ならば．

$$\frac{1}{2i}\left\{\varphi(s+it,x)-\varphi(-s+it,x)\right\}$$

$$\to\frac{1}{(n-2)!!}\,t\int_0^t\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\rho^{n-2}\omega[f;\rho,x]\right)\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho$$

$$=\frac{1}{(n-2)!!}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^t\omega[f;\rho,x]\frac{\rho^{n-1}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}d\rho\,.$$