数理解析研究所講究録
196巻 1973年 1-9

解析的な第一積分

東大 理　髙野 恭一

この講演の目的は、非線型(解析的)常微分方程式の大域的性質についての、W. Kaplan の研究の一部([4], [5])を紹介することである。

§1、序.

考える方程式は

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \tag{1}$$

で、z は complex variable, w, f は complex n-vectors, $f(z, w)$ は entire あるいは meromorphic としておく。

よく知られているように、Bruns([2],[8])は3体問題において、6個の重心積分, 3個の角運動量積分, 1個のエネルギー積分以外には、代数的な積分が存在しないこと、また Poincaré([6], [8]), Siegel([7])は制限3体問題において、Jacobi の積分以外には、一価正則な、あるいは代数的な積分が存在しないことをそれぞれ証明している。(解の存在定

理と一意性定理より、local に積分が存在するのは、自明で、ここで問題にしているのは、global な積分である。）

Bruns, Poincaré, Siegel の結果は、一般の多価正則な積分の存在を排除している訳ではない。Kaplan は、積分の定義を拡げて、その存在を考察している。Kaplan のいう積分とは『$\mathbb{C}^{n+1}$ 上で、measure 0 なる点を除いたところで定義され、そこで多価正則な定数でない関数で、解の上で定数となるもの』である。

積分の存在を示すためには、初期条件 (z^0, w^0) なる (1) の解 $w = g(z; z^0, w^0)$ がどこまで解析接続できるか、考察する必要がある。そこで、次の定義をあらかじめしておく。

$$\mathcal{E}(z^0) \equiv \bigcup_{w^0 \in \mathbb{C}^n} \{ (z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \; ; \; w = g(z; z^0, w^0) \}$$

としたとき、

Def. ほとんどすべての z^0 に対して、$\mu(\mathbb{C}^{n+1} - \mathcal{E}(z_0)) = 0$ (μ: Lebesgue measure) なるとき、(1) は Property A をもつという。

以下、$n = 1$ の場合と $n \geq 2$ の場合と、別々に扱うが、使う道具は、Painlevé の定理、unit disk 上での bounded type な meromorphic function に関する諸定理、Fubini の定理などである。

§2. $n=1$ の場合

Th.1 $f(z,w)$ を entire とすると、(1) の任意の解、$w=g(z;z^0,w^0)$ は measure 0 の $E(\subset\mathbb{C})$ を除いて $\mathbb{C}$ 上解析接続できる。

(証明概略) $w=g(z;z^0,w^0)$ をあらゆる道にそって可能なかぎり解析接続してえられる open Riemann 面を $\mathcal{R}$ とし、$\mathcal{R}$ の universal covering surface を $\mathcal{R}^*$ とし、$\mathcal{R}^*$ を

$$z=\varphi^*(\zeta),\quad w=\psi^*(\zeta),\quad |\zeta|<\rho,\ (\rho=1 \text{ or } \infty)$$

とあらわす。

E の capacity が positive として矛盾を導く。まず $\rho=1$, φ^* : bounded type であることがわかる。よって、φ^* は $|\zeta|=1$ 上の measure zero の点を除いて、nontangential な道にそって近づいたとき、finite limit をもつ。この道にそって ζ を境界に近づけたとき、Painlevé の定理から $\psi^*(\zeta)\to\infty$ i.e. $\frac{1}{\psi^*(\zeta)}\to 0$. Meier の定理を用いると、ほとんどすべての θ に対して、$\frac{1}{\psi^*(\zeta)}$ (従って $\psi^*(\zeta)$) は任意の Stolz 領域 $S(\theta)$ 内で 0 を除いた (従って ∞ を除いた) あらゆる値を無限回とる。再び Painlevé の定理を用いると、矛盾 (Q.E.D.)

Th. 1 と Fubini の定理を用いると、ただちに、

Th.2 $f(z,w)$ を entire とすれば、(1) は Property A をもつ

Th.2 より、ある z^0 を適当にとると、$\mu(\mathbb{C}^2 - \mathcal{E}(z^0)) = 0$ であるから、ほとんどすべての (z, w) に対して、z^0 と z を結ぶ道 $\gamma(z, w, z^0)$ とある値 w^0 が存在して、$g(z; z^0, w^0)$ は $\gamma(z, w, z^0)$ にそって (z, w) まで接続可能。(z, w) に対して、この w^0 を対応させる関数を $\varphi(z, w)$ とおけば $\varphi(z, w)$ は明らかに、Kaplan の def. による積分である。よって、

<u>Th.3</u> <u>$f(z, w)$ を entire とすれば (1) は積分をもつ。</u>

§3. $n=1$ と $n \geqq 2$ の相違、Iversen property など。

$n=1$ の場合、既に示したように、Property A をもつが、M. Jurchescu ([3]) は、$f(z, w)$ が meromorphic であっても (1) は Iversen property をもつことを示した。Iversen property とは

「(1) の任意の解 $g(z; z^0, w^0)$ は、z^0 から出発する道 γ を任意にとったとき、γ にいくらでも近い道にそって解析接続できる」

ことである。

この節では、Bieberbach-Fatou の写像を用いて、$n \geqq 2$ の場合に、Property A も、Iversen property ももたない例を示

す。Bieberbach-Fatou の写像とは、$\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ の中への bi-holomorphic な写像で、その像写像 I が外点をもつものである。（[1]）。この写像を次のようにかく。

$$\begin{aligned} \phi_1(w_1, w_2) &= z_1 \\ \phi_2(w_1, w_2) &= z_2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} f_1(z_1, z_2) &= w_1 \\ f_2(z_1, z_2) &= w_2 \end{aligned} \right)$$

$(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$, $(z_1, z_2) \in I$.

z_2 を fix すると、

$$\frac{dw_k}{dz_1} = \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \qquad k=1, 2$$

であるから、

$$F_k(w_1, w_2) \equiv \frac{\partial f_k}{\partial z_1}(\phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \qquad k=1, 2$$

とおくと、F_k は entire である。そこで

$$(2) \qquad \frac{dw_k}{dz_1} = F_k(w_1, w_2) \qquad k=1, 2$$

なる方程式を考える。$\mathbb{C}^2 - I \supset U$ nonempty, open をとり、$V \equiv \{(z_1, w_1, w_2) ; (z_1^0 - z_1 + \phi_1(w_1, w_2), \phi_2(w_1, w_2)) \in U\}$ とすると、V は $\mathbb{C}^3$ の中の nonempty open set でかつ

$$\mathcal{E}(z_1^0) \cap V = \phi.$$

であることがたしかめられる。i.e. 方程式(2)に対しては、

「$\forall z_1^0$ に対して、$\mu(\mathbb{C}^3 - \mathcal{E}(z_1^0)) > 0$」

これより明らかに、(2)に対しては、Property A も Iversen property も成立しない。

§4. $n \geqq 2$ の場合の結果.

Th.4 $f(z, w)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ で meromorphic とする。ほとんどすべての (z^0, w^0) に対して、(1)の解 $w = g(z; z^0, w^0)$ は、ほとんどすべての z へ解析接続できるとする。であるとすると、(1)は n コの独立な積分 $\varphi_k(z, w)$ $k=1, \cdots, n$ をもつ。

(証明). Fubini の定理より、ほとんどすべての z^0 に対して、$\mu(\mathbb{C}^{n+1} - \mathcal{E}(z^0)) = 0$. あとは Th.3 と同様. (Q.E.D.)

次に、autonomous system

$$(3) \qquad \frac{dw}{dz} = f(w)$$

を考える。$f(w)$ は $\mathbb{C}^n$ 上で analytic とする。次の Lemma は、かんたんに証明できる。

Lemma. $\mathbb{C}$ 上の道 : $z = z(t)$, $0 \leqq t < 1$ をとる。初期値 (z^0, w^0) ($z^0 = z(0)$, $w^0 = w(z(0))$), なる解を $w(z(t))$ としたとき、$t \to 1_{-1}$ のとき, $w(z(t))$ が finite limit w^1 をもつとする。もし $z(t)$ が $t \to 1_{-1}$ のとき finite limit をもたなければ w^1 は f の zero 点である.

Th.4 と上の Lemma を用いると、次の定理を得る.

Th.5 $f(w)$ は entire で、かつその zero 点は高々可算個とすると、(3) は $n-1$ 個の積分 $\varphi_k(w)$, $k=1, \cdots, n-1$ をもつ。

(証明概略). 解 $w=g(z;\, z^0, w^0)$ ($f(w^0)\neq 0$) に対して、Riemann 面 $\mathcal{R}$, その上の universal covering surface $\mathcal{R}^*$ がきまる。$\mathcal{R}^*$ は次のように表わせる.

$$z=\varphi^*(\zeta),\quad w=\psi^*(\zeta),\quad |\zeta|<\rho,\ \rho=1, \infty.$$

少なくとも1つの $\psi_k^*(\zeta)$ は、ほとんどすべての値をとることを示す。

(i) $\rho=1$ の場合、

少なくとも1つの $\psi_k^*(\zeta)$ は unbounded type であることを示せば十分。すべての $\psi_k^*(\zeta)$ が bounded type とすると、ほとんどすべての $|\zeta|=1$ に対して、$\psi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもつ。また、$\psi^*(\zeta)$ は non-constant で、$f(w)$ の zero 点は countable であるから、ほとんどすべての $|\zeta|=1$ に対して、$\psi^*(\zeta)$ は、$f(w)$ の zero 点でない finite radial limit をもつ。このような、$\zeta=e^{i\theta}$ に対して、$\varphi^*(\zeta)$ は、finite radial limit をもたない。(Painlevé の定理より。).
よって、Lemma より、$\psi^*(\zeta)$ の limit は $f(w)$ の zero 点でなければならない。これは矛盾。

(ii) $\rho=\infty$ のときは、Picard の定理から明らか。

上の k を n としてよい。そこで

$$(4)\qquad \frac{dw_k}{dw_n}=\frac{f_k(w)}{f_n(w)}\qquad k=1,\cdots,(n-1),$$

を考えると、今示したことにより、ほとんどすべての w^0 (

$f(w^0) \neq 0$ でよい）に対して、(4)の解はほとんどすべての w_n に解析接続できる。従って Th.4 より本定理が之られる。(Q.E.D.)

autonomous system に関する Th.5 より non-autonomous system (1) に関する次の定理がでる。

<u>Th.6. $f(z,w)$ を entire とすれば、(1)は n 個の独立な積分 $\varphi_k(z,w)$, $k=1,\dots n$ をもつ。</u>

(証明.) $z = w_{n+1}$ とおけば、(1)と同値な autonomous system

$$\frac{dw_k}{dz} = f_k(w_{n+1}, w_1, \dots\dots w_n), \ k=1,\dots,n, \quad \frac{dw_{n+1}}{dz} = 1$$

が之られ，$(f_1, \cdots f_n, 1)$ の zero 点はない。(Q.E.D.)

(3), (1) の右辺が $f(w)/g(w)$, $f(z,w)/g(z,w)$ の場合にも，($g(w)$, $g(z,w)$ は scalar 関数)，f, g が entire $g \neq 0$, かつ $f(w)$ あるいは $(f(z,w), g(z,w))$ の zero 点の個数が高々可算個ならば，Th.5, Th.6 は正しいが，証明は省略する。

文献

[1] Bochner & Martin, Several complex variables, p.45–p.48, Princeton.

[2] Bruns, Acta Math. 11 p.25

[3]. M. Jurchescu, Asupra funcţiilor analitice definite prin ecuaţii diferenţiale nealgebrice, Bul. Şti. Sect. Şti. Mat. Fiz. 7 (1955), 347–354.

[4] W. Kaplan, Analytic ordinary differential equations in the large, Proceedings of United States - Japan Seminar on Differential and Functional Equations, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967, 133–151.

[5] W. Kaplan, Analytic first integrals of ordinary differential equations, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 205–212.

[6] Poincaré, Acta Math. 13 p. 259 ~

[7] C. L. Siegel, Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936) 225–233.

[8] E. T. Whittaker, Analytical Dynamics, Cambridge Univ. Press.