数理解析研究所講究録
197巻 1974年 80-83

統計量の$(\mathbb{B})_d$型漸近展開

創価大 経　池田貞雄
香川大 経　松縄 規

1. 統計量の漸近展開

確率変数 X_n が

$$X_n = Y_n + Z_n \quad , \quad n=1,2,\cdots \qquad (1.1)$$

の形に展開され, $Z_n \to 0$ (in prob.) が成立しているとする。ここで, X_n は k 次元確率変数で k は n に無関係に固定されているとする。もし, X_n, Y_n が, $X_n \sim Y_n \ (\mathbb{B})_d \ (n \to \infty)$ を満せば, (1.1) は $(\mathbb{B})_d$ 型の漸近展開とよんでよい。この報告では, (1.1) が $(\mathbb{B})_d$ 型の漸近展開を与えるための判定条件を与える。

2. $(\mathbb{B})_d$ 型漸近同等性の十分条件

R を k 次元ユークリッド空間, $\mathbb{B}$ を R の部分集合のつくる通常のボレル集合体とし, $\{h_n ; n=1,2,\cdots\}$ を R 上で定義された実関数列とする。$\{A_n ; n=1,2,\cdots\}$ を $\mathbb{B}$ に属する集合の列とす

るとき，$\{h_n\}$が$\{A_n\}$に関して漸近的に一様連続であるというのは，任意に与えられた$\varepsilon>0$に対して$\delta=\delta(\varepsilon)>0$と$N=N(\varepsilon)>0$が存在して

$$\sup\{|h_n(x)-h_n(x')| \mid |x-x'|<\delta,\ x, x'\in A_n,\ n\geq N\}<\varepsilon \tag{2.1}$$

が成立することである。

これについて次の結果が成り立つ。

補題1.「$\{p_n(x)\}$，$\{q_n(x)\}$をRから他の同じユークリッド空間への写像列とし，$\{\lambda_n\}$，$\{\mu_n\}$を共に一様有界な実数列とする。$\{p_n(x)\}$，$\{q_n(x)\}$がともにある$\{A_n\}$に関して漸近的に一様連続ならば，$\{\lambda_n p_n(x)+\mu_n q_n(x)\}$も$\{A_n\}$に関して漸近的に一様連続である。」

補題2「$\{A_n\}$をk次元区間の列で，A_nの最短辺の長さ$\Delta(A_n)$について，$0<\eta\leq\Delta(A_n)$，$n=1,2,\cdots$であるような実数ηが存在するとする。R上の確率変数$\{X_n\}$，$\{Y_n\}$のpdf.をそれぞれ$\{f_n\}$，$\{g_n\}$とし，これらはともに$\{A_n\}$に関して漸近的に一様連続であると仮定すれば，条件

$$X_n \sim Y_n \quad (M)d, \qquad (n\to\infty) \tag{2.2}$$

は，条件

$$\sup\{|f_n(x)-g_n(x)| \mid x\in A_n\}\to 0, \quad (n\to\infty) \tag{2.3}$$

を含む。」

以上二つの補題から，次のような$(B)d$型漸近同等性の判定

条件が得られる．

定理 1．「次の条件(i)—(iii)が同時に満されているとする．

(i) $X_n \sim Y_n\ (M)d,\quad (n\to\infty)$.

(ii) 任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対し，k 次元区間列 $\{A_n\}$ と $M=M(\varepsilon)>0$ が存在して，ある $N=N(\varepsilon)>0$ に対して

$$\mu(A_n)<M,\quad \text{かつ}\quad P^{Y_n}(A_n)>1-\varepsilon$$

がすべての $n\geq N$ で成立する．(μ はルベーグ測度.)

(iii) $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ は共に $\underbrace{\{A_n\}}_{\text{任意の}\varepsilon>0\text{に対する}}$ に関して漸近的に一様連続である。

このとき $X_n \sim Y_n\ (B)d,\quad (n\to\infty)$, が成り立つ．」

実用上は次の結果が役立つと思われる。

補題 3．「$\{h_n(x)\}$ が $\{A_n\}$ に関して漸近的に一様連続であるための十分条件は，各 n について，A_n を含むある開領域 E_n 上で微分可能で，かつ E_n 上で $|h_n'(x)|$ が一様に有界：$|h_n'(x)|<M$ で，M が n によらないことである．」

3．$(B)d$ 型漸近展開の判定条件

Ikeda (1968)[1] に与えられているように，(1.1) に対して，定理 1 の条件(i)が成立するためには，次の十分条件がある．

補題 4．「(1.1) で，$Z_n\to 0$ (in prob.) で，かつ $\{Y_n\}$ が性質 $C(S)$ をもつならば，$X_n \sim Y_n\ (M)d$ が成立する．」

ここで $\{Y_n\}$ が性質 $C(\mathcal{S})$ をもつというのは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，$N=N(\varepsilon)>0$ が存在して

$$\sup\{P^{Y_n}(E)\mid \mu(E)<\delta,\ E\in\mathcal{S},\ n\geq N\}<\varepsilon \qquad (*7)$$

が成立することである．ただし，$\mathcal{S}$ は k 次元区間全体の集合．

定理1の条件(ii)，(iii)があれば，この条件が満されていることは容易に証明できる．実際次の結果が成立する．

<u>補題5</u>．「$P^{Y_n}(A_n)\to 1$，$(n\to\infty)$，となる $\{A_n\}$ に関して，$\{g_n\}$ が漸近的に一様連続であれば，$\{Y_n\}$ は $C(\mathcal{S})$ をもつ．」

これから，次の結果が得られる．

<u>定理2</u>．「(1.1) に対して次の条件が満されているとする．

(i) $Z_n\to 0$ (in prob.)，$(n\to\infty)$．

(ii)，(iii) は定理1と同様．

以上の条件の下で，(1.1) は $(\mathrm{B})_d$ 型の漸近展開を与える．」

*) S. Ikeda (1968) "Asymptotic equivalence of real probability distributions," <u>Ann. Inst. Stat. Math.</u> <u>20</u>, 339-361