数理解析研究所講究録
197巻 1974年 33-47

経験分布を基にした決定関数の一致性

統数研　野田 一雄

§0 はじめに—問題の設定

D統計量を始めとしたKolmogorov-Smirnov型の統計量とかMises汎関数あるいはU統計量などは経験分布を基にした統計量である。このような経験分布を基にした決定関数としては，パラメーターの推定に限らず，回帰に関する問題や標本空間の分割など，関数を推定の対象にする場合にも有効な足がかりを与える。また，一般にBayes解やミニマックス解の形が複雑な場合，この性質を調べるのに，経験分布を基にした決定関数を媒介にすると考えやすくなることがある。このようなことから，経験分布を基にした決定関数を一般的にとりあつかうこと，さしあたりはその漸近的な性質を議論することは意味をもつと考えられる。

まず問題の定式化から述べる。

基底の確率空間を $(\Omega, \mathfrak{U}, \nu)$，標本空間を $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P\in\mathfrak{P})$

とする。標本は i.i.d であることを想定して、サイズ n の標本空間としては積空間 ($\mathfrak{X}^n$, $\mathfrak{B}^n$, $P^n \in \mathcal{P}^n$) を考える。また ($\mathfrak{X}^n$, $\mathfrak{B}^n$) 上の確率測度の全体を $\mathcal{D}^n$ であらわす。ある確率測度の族 $\mathcal{Q}$: $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}$ および行動の空間 ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{A}$) の上で定義される損失 $L(P, a)$, $P \in \mathcal{Q}$, $a \in \mathcal{A}$ が一定の正規性の条件のもとで与えられているとする。そして危険は

$$r_n(P, a) = \int_{\mathfrak{X}^n}\int_{\mathcal{A}} L(P, a)\,\varphi(da \mid x^{(n)})\,P^n(dx)$$

$$P \in \mathcal{Q},\quad \varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n \qquad (0.1)$$

なる線型構造をもつものとする。ただし $\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ は決定関数 φ ($A \mid x^{(n)}$), $A \in \mathfrak{A}$, $x^{(n)} \in \mathfrak{X}^n$ のある空間である。($\Phi_{\mathcal{Q}}^n$ は族 $\mathcal{Q}$ に依存して定められるものとする。この理由は §9 で述べる。)

与えられた損失 L の正規性から $\inf_{\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \varphi)$ を実現する $\varphi_P^* \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ が存在するものと仮定する。inf をとる範囲を $\Phi_{\mathcal{P}}^n$ に限定した場合、同じくこれを実現する $\varphi_P^* \in \Phi_{\mathcal{P}}^n$ が存在し、かつ $\inf_{\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n} r_n(P, \varphi)$ をも実現すると仮定する。そしてこれを、P に対する最適な決定関数と呼ぶことにしよう。

この場合、一般に $\varphi \in \Phi_{\mathcal{Q}}^n$ の良さは $r_n(P, \varphi) - r_n(P, \varphi_P^*)$ を考えればよいことになる。

次ぎに一般化された経験分布 $\tilde{P}_{(n)}$ を定義する。いま $\tilde{P}_{(n)}(B \mid x^{(n)})$ が、

① $B\in\mathfrak{B}$ を固定すれば，$x^{(m)}\in\mathfrak{X}^n$ の $\mathfrak{B}^n$-可測関数であり，$x^{(m)}\in\mathfrak{X}^n$ を固定すれば，$B\in\mathfrak{B}$ の確率測度であること。
② $\widetilde{P}_{(m)}(\cdot\mid x^{(m)}(\omega))$ が $P\in\mathfrak{P}$ に a.e. ω (ν) で弱収束すること。以上の条件があるとき，これを一般化された経験分布と呼ぶことにしよう。このような $\widetilde{P}_{(m)}$ の全体を $\widetilde{\mathfrak{P}}_{(m)}$ によって表わし，$x^{(m)}\in\mathfrak{X}^n$ を固定するとき，$\widetilde{\mathfrak{P}}_{(m)}\subset\mathfrak{Q}$ であると仮定する。

便宜上，$\{P_k ; k=1,2,3,\dots\}\subset\mathfrak{D}$ が $P_0\in\mathfrak{D}$ に弱収束するとき，$P_k\Rightarrow P_0$ によって表示することにする。

例　通常の意味における経験分布を $\hat{P}_{(m)}$ で表わすとすれば，これは $\mathfrak{X}$ が可分距離空間で $\mathfrak{B}$ がその Borel σ-代数であるときは，上記①，②の条件が満たされている。②については，一般化された Glivenko-Cantelli 定理から従う。例えば[4]参照。■

さて，$\widetilde{\mathfrak{P}}_{(m)}\to\Phi^n_{\mathfrak{Q}}$ なる写像で $\varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}(A\mid x^{(m)})$ と表現されるもの，即ち $x^{(m)}\in\mathfrak{X}^n$，$A\in\mathfrak{O}$ を固定するとき $\widetilde{\mathfrak{P}}_{(m)}\to\Phi^n_{\mathfrak{Q}}$ なる写像となるものを，一般化された経験分布 $\widetilde{P}_{(m)}$ を基にした決定関数と呼ぶことにしよう。（Bayes 解などを問題にするときは，族 $\widetilde{\mathfrak{P}}_{(m)}$ 上の一定の σ-代数を考え，これに関する $\varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}$ の可測性を考える必要が出てくる。）

前に定義された $\varphi^*_{\widetilde{P}_{(m)}}$ は同じく一般化された経験分布を基

にした決定関数であり，我々は危険に関する一致性

$$r_m(P, \Phi^*_{\hat{P}_{(m)}}) - r_m(P, \Phi^*_P) \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty) \qquad (0.3)$$

の成立を調べることを問題にしよう。すなわち，$\Phi^*_{\hat{P}_{(m)}}$ を未知である Φ^*_P のいわば推定量のごとく考え，その危険に関する一致性を求めようというわけである。

$\boxed{\text{例}}$ Mises の汎関数は上述の $\Phi^*_{\hat{P}_{(m)}}$ の例でもある。すなわち，実数空間 $(R^p, \mathcal{C}^p)$ を標本空間とし，分布関数 $F(x)$ をもつような i.i.d. 確率変数 $\{X_1, X_2, \ldots\}$ が与えられているとする。$g(x_1, \ldots, x_m)$ を変数に関して対称な $\mathcal{C}^{pm}$-可測実関数として，regular functional

$$\theta(F) = \int_{R^{pm}} g(x_1, \ldots, x_m) F(dx_1) \cdots F(dx_m) \qquad (0.4)$$

を $\mathcal{F} = \{F;\ |\theta(F)| < \infty\}$ の上で定義する。標本 $X^{(m)} = (X_1, \ldots X_m)$ をとって $\theta(F)$ を推定する量 $T(X^{(m)})$ として，その損失を最小二乗法で考えれば

$$L(F, T) = (T - \theta(F))^2 \qquad (0.5)$$

通常の意味での経験分布関数を $\hat{F}_{(m)}(x|X^{(m)})$ で表わせば，Mises の汎関数は

$$\theta(\hat{F}_{(m)}) = \int_{R^{pm}} g(x_1, \ldots, x_m) \hat{F}_{(m)}(dx_1|X^{(m)}) \cdots \hat{F}_{(m)}(dx_m|X^{(m)}) \qquad (0.6)$$

によって与えられる。

明らかに，$\theta(\hat{F}_{(m)})$ は (0.5) によって与えられる危険を最小にするものであって $\Phi^*_{\hat{F}_{(m)}}$ に一致する。■

§1. 距離 $d_{\mathcal{B}'}(P_{(n)}, P)$，$d_{\mathcal{F}}(P_{(n)}, P)$ の収束

一般化された経験分布を弱収束するものとして定義したことから，この節は数学的な準備として，危険と関係する次ぎのような距離を考えることにする。

今後 $\mathcal{X}$ はある距離 ρ による可分な距離空間とし，$\mathcal{B}$ はその Borel σ-代数としておく。

$\mathcal{B}'$ を $\mathcal{B}$ のある部分集合として，$\mathcal{D}$ 上の距離として

$$d_{\mathcal{B}'}(P_1, P_2) = \sup_{B \in \mathcal{B}'} \left| P_1(B) - P_2(B) \right| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{D} \tag{1.1}$$

を定義する。あるいは，$B(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を $\mathcal{X}$ 上の有界かつ $\mathcal{B}$-可測な実関数の全体として，$\mathcal{F}$ をそのある部分集合とし，

$$d_{\mathcal{F}}(P_1, P_2) = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \int_{\mathcal{X}} f\, dP_1 - \int_{\mathcal{X}} f\, dP_2 \right| \quad \text{for } P_1, P_2 \in \mathcal{D} \tag{1.2}$$

なる距離を定義する。

$\delta > 0$ として，$B \in \mathcal{B}$ に対し，B の δ-境界

$$\partial_\delta B = \{ x \,;\, \rho(x, B) < \delta,\ \rho(x, B^c) < \delta \}, \tag{1.3}$$

および δ-近傍

$$B^\delta = \{ x \,;\, \rho(x, B) < \delta \} \tag{1.4}$$

を考える。一般には $(\partial B)^\delta \subset \partial_\delta B$ であるが，$\mathcal{X}$ が局所連結であれば

$$\partial_\delta B = (\partial B)^\delta \tag{1.5}$$

が成立する。

$\mathfrak{F}$に関しては，$B \in \mathcal{B}$ の oscillation として，

$$w_{\mathfrak{F}}(B) = \sup\{\, |f(x) - f(x')| \; ; \; f \in \mathfrak{F},\ x, x' \in B \,\} \qquad (1.6)$$

を定義する。また $S(x, \delta)$ を $x \in \mathfrak{X}$ を中心とし，半径 δ の開球としておく。

このとき，Bilingsley - Topsøe [3] の結果を適用することによって直ちに次ぎの結果を得る。

$\boxed{\text{Prop. 1.1.}}$

一般化された経験分布 $\{\widetilde{P}_{(n)} \; ; \; n = 1, 2, \cdots\}$ に対し，

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P(\partial_\delta B) = 0 \qquad (1.7)$$

であれば $d_{\mathcal{B}'}(\widetilde{P}_{(n)}, P) \to 0 \quad (n \to \infty)$ a.e. $\omega(\mu)$ が従う。

なお $\mathfrak{X}$が局所連結であれば，条件 (1.7) は

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\partial B)^{\delta}) = 0 \qquad (1.7')$$

と置換えてよい。

$\boxed{\text{Prop. 1.2.}}$

一般化された経験分布 $\{P_{(n)} \; ; \; n = 1, 2, \cdots\}$ に対し，

① $$w_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) < \infty \qquad (1.8)$$

② $$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f \in \mathfrak{F}} P\{x \; ; \; w_f S(x, \delta) > \varepsilon\} = 0 \quad \text{for all } \varepsilon > 0 \qquad (1.9)$$

であれば $d_{\mathfrak{F}}(\widetilde{P}_{(n)}, P) \to 0 \quad (n \to \infty)$ a.e. $\omega(\mu)$ が従う。

$\boxed{\text{注意}}$ Prop. 1.1 および 1.2 の結果は，$\tilde{P}_{(n)}$ の P への弱収束が $P\in\mathcal{P}$ について一様であり，また (1.7) あるいは (1.9) の収束が $P\in\mathcal{P}$ について一様であれば，同じく距離 $d_{\mathcal{B}'}(\tilde{P}_{(n)},P)$, $d_{\mathcal{F}}(\tilde{P}_{(n)},P)$ の収束も $P\in\mathcal{P}$ について一様であることが従う。■

$\boxed{\text{例}}$ $\mathcal{D}$ について弱収束の位相と同値な関係にある Dudley[2] の距離 β は，この Prop. 1.2 の条件 ①, ② を満足している。

いま，$BL(\mathcal{X},\rho)$ を $\mathcal{X}$ 上の有界かつ Lipschitzian 実関数の全体の空間とする。そのノルムを

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_{\infty} + \|f\|_{L} = \sup_{x\in\mathcal{X}}|f(x)| + \sup_{x\neq x'}|f(x)-f(x')|/\rho(x,x') \qquad (1.10)$$

として定義し，これによって $\mathcal{D}$ の距離を

$$\beta(P_1,P_2) = \sup\left\{\int_{\mathcal{X}} f(dP_1-dP_2)\ ;\ \|f\|_{BL}\leq 1,\ f\in BL(\mathcal{X},\rho)\right\} \quad \text{for } P_1,\ P_2\in\mathcal{D} \qquad (1.11)$$

と定義する。

このとき，Prop. 1.2 より，一般化された経験分布 $\{\tilde{P}_{(n)}\}$ について，$\beta(\tilde{P}_{(n)},P)\to 0\ (n\to\infty)$ a.e. $\omega(\nu)$。■

なお，$\varphi^*_{\hat{P}_{(n)}}$ の収束の速さを問題にするときは，次ぎの結果が役に立つ。

$\mathcal{X}$ は可分な距離空間であるから，$\forall\varepsilon,\forall\delta>0$ に対し，$P(B)\leq\delta$ なるような $B\in\mathcal{B}'$ があって，$\mathcal{X}\sim B$ は有限個の ε-被覆でおおわれるようにすることができる。$B\in\mathcal{B}$ を適当に動かし，

ε-被覆の minimal number を $N(\mathfrak{X}, P, \varepsilon, \delta)$ で表わす。このとき，

$$H(\mathfrak{X}, P, \varepsilon, \delta) = \log N(\mathfrak{X}, P, \varepsilon, \delta) \qquad (1.12)$$

と定義すると，Hは一つの ε-entropy を表わす。この意味での entropic 次元を $k(\mathfrak{X}, P)$；

$$k(\mathfrak{X}, P) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} H(\mathfrak{X}, P, \varepsilon, \varepsilon) \Big/ \log(1/\varepsilon) \qquad (1.13)$$

として定義する。

このとき，次ぎの結果を得る。

$\boxed{\text{Th. 1.3.}}$

ある $s>0$，$C_P>0$ があって，

$$\sup_{B \in \mathcal{B}'} P((\partial B)^{\varepsilon}) \leq C_P \varepsilon^{s} \qquad (1.14)$$

が成立すると仮定する。$\mathfrak{X}$は局所連結として，$k_P = k(\mathfrak{X}, P)$ とするとき，$\forall \delta > 0$ について

$$\mathbb{E}_P\, d_{\mathcal{B}'}(\hat{P}_{(n)}, P) \leq (C_P + 1)\, n^{-\frac{s}{2s + k_P + \delta}} \qquad (1.15)$$

が従う。

$\boxed{\text{注意}}$ $\mathbb{E}_P\, d_{\mathfrak{F}}(\hat{P}_{(n)}, P)$ についても同様な関係が成立する。∎

§2. 一般化された経験分布 $\tilde{P}_{(n)}$ を基にした決定関数 $\Phi^{*}_{\tilde{P}_{(n)}}$ の一致性.

$\boxed{\text{Lem. 2.1.}}$

各 $x_0^{(m)} \in \mathfrak{X}^m$ に対し，

$$M(x_0^{(m)}) = \int_{\mathfrak{X}^m}\int_{\mathcal{A}} [L(\widetilde{P}_{(m)}, a) - L(P, a)]\, \varphi_P^*(da \mid x^{(m)})\, P^m(dx) + \int_{\mathfrak{X}^m}\int_{\mathcal{A}} L(\widetilde{P}_{(m)}, a)\, \varphi_P^*(da \mid x^{(m)}) [\widetilde{P}_{(m)}^m(dx \mid x_0^{(m)}) - P^m(dx)] \tag{2.1}$$

$$N(x_0^{(m)}) = \int_{\mathfrak{X}^m}\int_{\mathcal{A}} [L(\widetilde{P}_{(m)}, a) - L(P, a)]\, \varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}(da \mid x^{(m)})\, P^m(dx) + \int_{\mathfrak{X}^m}\int_{\mathcal{A}} L(\widetilde{P}_{(m)}, a)\, \varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}(da \mid x^{(m)}) [\widetilde{P}_{(m)}^m(dx \mid x_0^{(m)}) - P^m(dx)] \tag{2.2}$$

とおくとき，

$$r_m(P, \varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}) \leq |N(x_0^{(m)})| + \max\left(|M(x_0^{(m)})|,\ |N(x_0^{(m)})| \right) \tag{2.3}$$

が成立する。■

さて，$\mathfrak{X}^m$ 上の距離 $\rho^{(m)}$ としては，$x_i^{(m)} = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m})$ $(i=1,2)$

$$\rho^{(m)}(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}) = \sum_{i=1}^{m} \rho(x_{1,i}, x_{2,i}) \tag{2.4}$$

を考えており。$\mathfrak{B}^m$ は $\rho^{(m)}$ による位相の Borel σ- 代数と一致する。この意味で §0 で定義されたように $B(\mathfrak{X}^m, \mathfrak{B}^m)$ の部分族 $\mathfrak{F}^m$ を考える。

このとき，上記 Lem. 2.1 と §1 の Prop. 1.2 によって次ぎの関係を得る。

$\boxed{\text{Th. 2.2.}}$

最適な決定関数 φ_P^* および $\varphi_{\widetilde{P}_{(m)}}^*$ について次ぎの条件①，

②が成立のものと仮定する。

①
$$r_{P,\tilde{P}_{(m)}}(x^{(m)}) = \int_{\mathcal{A}} L(\tilde{P}_{(m)}, a)\, \varphi_P^*(da \mid x^{(m)}) \qquad (2.5)$$
$$r_{\tilde{P}_{(m)}}(x^{(m)}) = \int_{\mathcal{A}} L(\tilde{P}_{(m)}, a)\, \varphi_{\tilde{P}_{(m)}}(da \mid x^{(m)}) \qquad (2.6)$$

とおくとき，十分大なる n のすべてについて，$r_{P,\tilde{P}_{(m)}}$，$r_{\tilde{P}_{(m)}} \in \mathfrak{F}^n$。ただし $\mathfrak{F}^n$ は Prop. 1.2 の仮定を満足するものとする。

② 1° $$\int_{\mathcal{A}} [L(\tilde{P}_{(m)}, a) - L(P, a)]\, \varphi_P^*(da \mid x^{(m)}(\omega)) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{a.e. } \omega\ (\nu) \qquad (2.7)$$

2° $$\int_{\mathcal{A}} [L(\tilde{P}_{(m)}, a) - L(P, a)]\, \varphi_{\tilde{P}_{(m)}}^*(da \mid x^{(m)}(\omega)) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{a.e. } \omega\ (\nu) \qquad (2.8)$$

この条件より，

$$r_n(P, \varphi_{\tilde{P}_m}^*) - r_n(P, \varphi_P^*) \to 0 \ (n \to \infty) \qquad (2.9)$$

が従う。■

特に，写像 $\alpha : \mathcal{Q} \to \mathcal{A}$ が考えられる場合（例えば，各 $P \in \mathcal{Q}$ に対し，$\lim_{a \in \mathcal{A}} L(P, a)$ を実現する $a \in \mathcal{A}$ が存在するときは，この対応を $\alpha(P)$ と考えてよい。），Th.2.2 の関係は次ぎのように整理される。

$\boxed{\text{Th. 2. 3}}$

$\{P_m ; m = 0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathcal{Q}$ が $P_m \Rightarrow P_0 \ (m \to \infty)$ なるとき，常に次ぎのことが従うと仮定する。

$\mathcal{Q}$から$\mathcal{A}$へのある写像$\alpha(P)$が存在して，

① $L(P_m, \alpha(P_m))$がmについて有界。

② 1° $[L(P_m, \alpha(P_0)) - L(P_0, \alpha(P_0))] \to 0 \ (m \to \infty)$ (2.10)

2° $[L(P_m, \alpha(P_m)) - L(P_0, \alpha(P_m))] \to 0 \ (m \to \infty)$ (2.11)

が成立するとする。

このとき一般化された経験分布を基にする決定関数$\varphi^*_{\tilde{P}(m)}$について，

$$r_n(P, \varphi^*_{\tilde{P}(m)}) - r_n(P, \varphi^*_P) \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad (2.12)$$

が従う。■

$\boxed{\text{注意 1}}$ $\tilde{P}(m) \Rightarrow P$ a.e. $w(\nu)$が$P \in \mathcal{P}$に関し一様であり，条件②の収束が$P \in \mathcal{P}$について一様であること，および Prop. 1.2の条件②が$P \in \mathcal{P}$について一様であれば，Th. 2.2 あるいは Th. 2.3の結果は，また$P \in \mathcal{P}$について一様であることが従う。■

$\boxed{\text{注意 2}}$ Th. 2.3について。通常$L(P_m, \alpha(P_m)) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \cdots$)であり，$L(P_m, \alpha(P_0)) \to 0$，$L(P_0, \alpha(P_m)) \to 0$ ($m \to \infty$)を考えればよい。

特にパラメーター$\theta(P)$の推定の場合は，上のそれぞれは$L(\theta(P_m), \theta(P_0))$，$L(\theta(P_0), \theta(P_m))$となり，損失$L$の$P \in \mathcal{Q}$に関する連続性に帰着する。$\tilde{P}(m) \in \tilde{\mathcal{P}}(m)$を直接基にして考えるならば，$L(\theta(P), \theta(\tilde{P}(m)))$の収束が問われることになるが，

$\check{P}_{(n)}$ として通常の意味での経験分布 $\hat{P}_{(n)}$ をとると，これは結局Mises汎関数の一致性の問題に帰着することになる。■

§3 経験分布を基にした決定関数 $\varphi_{\check{P}_{(n)}}$ の構成

この節の標題に掲げた問題の中心は $\check{P}_{(n)}$ の構成を考えることである。ところで通常の意味における経験分布を基にした決定関数 $\varphi^*_{\hat{P}_{(n)}}$ を直接用いることが出来ない場合がある。すなわち，$\varphi^*_{\hat{P}_{(n)}} \notin \Phi^n_{\mathcal{P}}$ であって，かつ決定関数として $\Phi^n_{\mathcal{P}}$ のそれしか用いることが出来ない場合である。例えば，制約条件

$$r_n'(P,\varphi) \leq \beta, \quad P \in \mathcal{P} \qquad (3.1)$$

が与えられ，対象となる決定関数 φ が $\mathcal{P}$ によって制限されるという問題がある。

このような意味において，$P \in \mathcal{P}$ であれば $\varphi^*_P \in \Phi^n_{\mathcal{P}}$ なることを仮定し，$\varphi^*_{\check{P}_{(n)}}$ の基になる経験分布 $\check{P}_{(n)}$ が $\omega \in \Omega$ を固定するとき，$\check{P}_{(n)} \in \mathcal{P}$ であるように $\check{P}_{(n)}$ を構成することを考えよう。

$\boxed{\text{Th. 3.1.}}$

次ぎの条件を仮定する。

① $\mathcal{P}$ は弱収束の位相を $\mathcal{Q}$ に導入するとき，σ-compact である。

② 次ぎの性質をもつ一般化された経験分布 $\check{P}_{(n)}$ が与えられ

ているとする。

1° $B\in\mathfrak{B}$ を固定した場合，$\check{P}_{(m)}(B|x^{(m)})$ は $\mathfrak{X}^m$ の有限個の点を除き，$x^{(m)}\in\mathfrak{X}^m$ の連続関数である。

2° ①によって，$\inf_{P\in\mathcal{P}} d_{\mathfrak{B}'}(\check{P}_{(m)},P)$ を実現する $P\in\mathcal{P}$ が，$x^{(m)}\in\mathfrak{X}^m$ を固定するとき，存在するが，ある除外集合 $W\in\mathcal{U}$; $\nu(W)=0$ があって，$\omega\notin W$ であれば，$x^{(m)}(\omega)$ を固定するとき，上述の $P\in\mathcal{P}$ が一意に定まる。（$\mathfrak{B}'$ は Prop. 1.1 の仮定を満足すると仮定する）

以上の条件の下で，一般化された経験分布 $\hat{P}_{(m)}$ を $x^{(m)}\in\mathfrak{X}^m$ を固定するとき，$\hat{P}_{(m)}(\cdot|x^{(m)})\in\mathcal{P}$ なるように，しかも $\omega\notin W$ であれば $\inf_{P\in\mathcal{P}} d_{\mathfrak{B}'}(\check{P}_{(m)},P)$ を実現するように構成することができる。■

注意1. 距離 $d_{\mathfrak{F}}$ についても同様な議論ができる。■

注意2 特に，$\mathcal{P}$ が μ に支配され（μ は $(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ 上の σ-有限測度）$P\in\mathcal{P}$ の μ に関する密度 $dP/d\mu$ が μ について自乗可積分であるような μ が存在するときは，$d_{\mathfrak{B}'}$ あるいは $d_{\mathfrak{F}}$ よりも，μ に関する L_2-ノルムが可能な空間 $\mathcal{Q}'\supset\mathcal{P}$ を考えた方が，より具体的な議論ができる。すなわち，$\mathcal{P}$ が $\mathcal{Q}'$ において完備かつ凸であることを仮定すれば，$\check{P}_{(m)}$ からの $\mathcal{P}$ への射影を $\hat{P}_{(m)}$ とすればよいことになる。その場合 $\check{P}_{(m)}$ としては，例えば Parzen [1] などの密度 $dP/d\mu$ の推定関数を用いればよい。この辺の具体的な展開は紙数の関係で省略することにする。■

§4. Bayes 解，ミニマックス解の一致性への応用

§2, §3 の結果として Bayes 解，ミニマックス解の一致性を示すのに，$\phi^*_{P_{m}}$ を応用することができる。その場合，§2 の注意1に示されているように，収束の $P\in\mathcal{P}$ に関する一様性を前提にしておく。また Bayes 解の存在をいうときは，ϕ^*_P，$\phi^*_{P_{m}}$ の $P\in\mathcal{P}$ に関する可測性がまず問題にされなければならない。これらの議論は紙数の都合上省略する。

§5. 特殊な場合への応用 —— 最適領域の推定の問題.

$\mathfrak{X}$ を ρ による完備，可分な距離空間としておく。この領域 ϕ とは，$0\le\phi(x)\le 1$ なるような $\mathfrak{B}$-可測関数である。この ϕ の全体を Φ とする。$(\mathfrak{X},\mathfrak{B})$ 上の σ-有限測度 μ について，

$$\int_{\mathfrak{X}} f(x)\phi(x)\,d\mu \le c \quad (\text{or} = c) \tag{5.1}$$

を制約条件として，

$$\int_{\mathfrak{X}} g(x)\phi(x)\,dP, \quad P\in\mathcal{P} \tag{5.2}$$

を最大にする $\phi^*_P\in\Phi$ を推定するのが問題となる。ただし f, g は μ-可積分な与えられた実関数。

情報の空間として $(\mathfrak{X}^m,\mathfrak{B}^m,\mathcal{P}^m)$ を考え，ϕ^*_P の推定として $\phi(x,x^{(m)})$ を考える。損失，危険を

$$L(P,\phi) = \int_{\mathfrak{X}} g(x)\left(\phi^*_P(x) - \phi(x,x^{(m)})\right)P(dx) \tag{5.3}$$

$$r_m(P,\phi) = \int_{\mathfrak{X}^m}\int_{\mathfrak{X}} g(x)\left(\phi^*_P(x) - \phi(x,x^{(m)})\right)P(dx)P^m(dx) \tag{5.4}$$

とする。$\mathcal{P} \ll \nu$である場合は，ϕ_P^*, $\phi_{\tilde{P}(m)}^*$ の explicit form を求めることができる。[5]。この結果に Prop. 1.1. を適用すると，$\phi_{\tilde{P}(m)}^*$ の一致性の十分条件として，次ぎの関係を得る。

各$x_0^{(m)} \in \mathfrak{X}^m$を固定するとき，

$$(\partial\phi_{\tilde{P}(m)}^*(x, x_0^{(m)}))^\delta = \{ (x, x_0^{(m)}) \; ; \; g(x)\frac{d\tilde{P}(m)}{d\mu}(x, x_0^{(m)}) - \lambda_{(m)}(x, x_0^{(m)})f(x) = 0 \}^\delta \qquad (5.5)$$

として，($\partial\phi_{\tilde{P}(m)}^*$ を与えるものとして$\lambda_{(m)}$が存在する[5])

$$\sup_n P((\partial\phi_{\tilde{P}(m)})^\delta) \to 0 \; (\delta \to 0) \qquad (5.6)$$

が a.e. ω (ν) について成立することである。

収束の一様性，Bayes 解，ミニマックス解については略。

文　献

[1] Parzen, E.: "On estimation of a prob. density func. & mode," A.M.S., 33 (1962)

[2] Dudley, R.H.: "Convergence of Baire measures", Studia Math., 27 (1966)

[3] Billingsley & Topsøe: "Uniformity in weak convergence", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, verw. Geb. 7, 1~16 (1967).

[4] Parthasarathy, K.R., "Prob. measures on metric spaces", Academic Press (1967)

[5] Noda & Taga, "Minimax estimation method for the optimum decomposition of a sample space based on prior information," A.I.S.M., Vol. 23, 1971.