数理解析研究所講究録
197巻 1974年 23-25

一般化されたフィッシャーの情報量と漸近理論

釜江哲朗（大阪市大・理）

§1. フィッシャーの情報量の一般化

$\mathcal{X}$：距離空間

$C(\mathcal{X})$：$\mathcal{X}$ 上の実数値有界連続関数空間

Θ：実数空間上の 0 を含む開区間

$(P_\theta\ ;\ \theta\in\Theta)$：$\mathcal{X}$ 上の確率ボレル測度の系、

$P\equiv P_0$

<u>仮定</u>　$\mathcal{X}$ 上の全有界な（signed）ボレル測度 Q が存在し

$$w\text{-}\lim_{h\to 0}\frac{P_h-P}{h}=Q$$

（i.e. $\forall\varphi\in C(\mathcal{X})$ に対して $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\int\varphi\,dP_h-\int\varphi\,dP}{h}=\int\varphi\,dQ$）

となる。

$Q=Q^c+Q^s$ 且つ $Q^s=Q^{s+}-Q^{s-}$ とする。但し，Q^c は P に関して絶対連続。Q^s は P と互いに singular。また，Q^{s+} 及び Q^{s-} は互いに singular な非負測度。

$\|Q^{s\pm}\|\equiv Q^{s\pm}(\mathcal{X})$（符号同順）と書く。$\varphi\in C(\mathcal{X})$ 且つ $\varphi\geq 0$ となる φ に対して，$J(\varphi)\equiv\dfrac{\left(\int\varphi\,dQ\right)^2}{\int\varphi\,dP}$ と定義する。

但し，$\int \varphi\, dP = 0$ のとき $J(\varphi)=0$ とする。$\mathcal{X}$ 上の非負連続関数の有限系 $\{\varphi_i\,;\, i=1,2,\cdots,n\}$ は $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i = 1$ をみたすとき $\mathcal{X}$ の有限連続分割と呼ぶ。

$$I \equiv \sup_{\{\varphi_i\}:\text{有限連続分割}} \sum_i J(\varphi_i)$$

$$I^c \equiv \int \left|\frac{dQ^c}{dP}\right|^2 dP$$

と定義する。

定理1. (1) $Q^s = 0$ のとき，$I = I^c$

(2) $Q^s \neq 0$ のとき，$I = \infty$

(3) I はフィッシャーの情報量の拡張になっている。

定理2.（クラーメル＝ラオの不等式の拡張）

$$\inf\left\{ V_P[\hat\theta],\ \hat\theta \in C(\mathcal{X}),\ E_P[\hat\theta]=0,\ E_Q[\hat\theta]=1 \right\} = \frac{1}{I}$$

但し，V は分散，E は平均を意味する。また，$\frac{1}{\infty}=0$ と考える。

§2. $Q^s \neq 0$ の場合の考察

$Q^s \neq 0$ のとき，$I=\infty$ となる。このような場合，　情報の量を表わす目安として

$$I^S \equiv \| Q^{S+} \|^2 + \| Q^{S-} \|^2$$

を考えるのが妥当のように思える。実際，

<u>定理 3</u>

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup \left\{ \sum_i J(\varphi_i),\ \{\varphi_i\} \text{は有限連続分割で} \int \varphi_i \, dP > \varepsilon \ (\forall i) \text{となるもの} \right\} \cdot \varepsilon = I^S$$

が成立する。