数理解析研究所講究録
198巻 1974年 24-27

W. Browder 教授講演記録

Manifold と homotopy theory

京都大学 西田吾郎 記.

1. Smoothing PL-manifold. 多様体を, homeo, PL-home, diffeo.等で分類する問題を考えるとき, 例えば有限表示をもつ任意の群πは, ある4次元多様体 M の $\pi_1(M)$ として実現されることなどから, 多様体にあらかじめいくつかの structure を仮定しておかなければならない. 例として, PL-manifold の smoothing を考える. Milnor, Hirsch, Mazur, Cairns, Lashof. Rothenberg 等による解答は次のとおりである.

M^nを PL-manifold, τ_M を PL tangent bundle とする.

定理. i) Mが compatible smooth structure をもつ $\Leftrightarrow$ τ_M が linear bundle と PL-bdle として同値.

ii). Mの smooth structure の concordance class の全体は, τ_Mの linearization の equivalence class 全体と一対一~~無~~対応する。

2. Surgery theory. 一つのホモトピー型 Xが与えら

たとき，いつ $X \underset{h.e}{\simeq} M$ (smooth manifold) となるかを考える。このようなXは Poincaré space である。つまり

$\exists [X] \in H_m(X)$，$[X]\cap ; H^q(X) \to H_{m-q}(X)$ は同型.

Poincaré space X 上には，spivak normal fibre space $\xi ; E_0(\xi) \longrightarrow X$ と，map $\alpha ; S^{m+k} \longrightarrow T(\xi) = X \cup CE_0(\xi)$ が存在し，α_* は H_{m+k} 上で degree 1 である。またこのような (ξ, α) は fibre homotopy equivalence を除いて unique である。smooth manifold M に対し，$h ; M \xrightarrow{\simeq} X$ ならば，$\nu_M \to \xi$ は fibre homotopy equivalence．従って ξ は linearization をもつ。

Surgery exact sequence

$\mathcal{S}(X) = \{(M^m, h) ; M : \text{smooth},\ h ; M \xrightarrow{\simeq} X\} / \text{concordance}$

$\mathcal{L}(\xi) = \{\text{equiv. class of linearization of } \xi\} = [X, G/O]$

また，X は すべての local coefficient system に対して Poincaré duality をみたすとし，$\pi_1(X) = \pi$，$m = \dim X \geq 5$ とする。このとき，次の exact sequence がある。

$$L_{m+1}(\pi) \overset{w}{\dashrightarrow} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{\sigma} L_m(\pi)$$

ここで，$L_i(\pi)$ は Wall 群で，w は $L_{m+1}(\pi)$ の $\mathcal{S}(X)$ への作用である。

3. Kを compact Lie group. Kの作用 $K\times X \to X$ をもつ空間を K-space という。

<u>Def.</u> equivariant map $f; X \longrightarrow Y$ が isovariant とは、$K \ni g$, $X \ni x$ に対し、$gf(x)=f(x) \Rightarrow gx=x$ になることをいう。

<u>Def.</u> $K \supset H$ に対し、$\{H\}$をHの conjugacy class とする。$X^{\{H\}} = \{x \in X \,;\, \{K_x\} > \{H\}\} = GX^H$ とおく。Category $\mathcal{C}_K$を、object は、K-space Xで $^\forall H' \subset {}^\forall H \subset K$ に対し、$X^{\{H\}} \subset X^{\{H'\}}$ が linear K-normal bundle をもつものとし（この bundle を $\nu_{H,H'}$ とする）、morphism $f; X \to Y$ は isovariant map で $f|_{E(\nu_{H,H'})}$ が linear bundle map となるものと定義する。

<u>Def.</u> $\mathcal{S}_K(X) = \{(M, h) \,;\, M$ は smooth K-manifold, $h; M \to X$ は $\mathcal{C}$における homotopy equivalence$\}/\sim$.
ここで $(M_0, h_0) \sim (M_1, h_1) \Leftrightarrow {}^\exists F; W \longrightarrow X \times [0,1]$ homotopy equivalence in $\mathcal{C}$, $\partial W = M_0 \cup M_1$, $F|_{M_i} = (f_i, i)$ である。

<u>定理</u>. Xを smooth K-manifold で、smallest isotropy subgroup Eに対し、$\dim X^{\{E\}}/K \geq 5$ とする。このとき exact sequence

$$L_{m+1}(X) \to \mathcal{S}_K(X) \longrightarrow [X/K,\ G/O] \to L_m(X)$$

が存在する。ここで L_m は $\mathcal{C}_K \longrightarrow \mathcal{Ab}$ なる covariant functor で.

i). periodic mod 4 in m.

ii) $f: X \longrightarrow Y$ in $\mathcal{C}_K$ が, すべての orbit type の π_1 の同型をみちびけば, $f_*: L_m(X) \longrightarrow L_m(Y)$ は同型.

$L_m(X)$ の一つの幾何学的定義は.

$$L_m(X) = \{ (W, f);\ f: W \longrightarrow X \times [0.1] \text{ in } \mathcal{C}_K,\ \partial W = X \cup X',\ f|_X = id,\ f|_{X'} \text{ は homotopy equivalence} \}/\sim$$

で与えられる。また, 次の exact sequence がある。$H \subset K$ を largest ~~isotro~~ isotropy subgroup とすると,

$$L_m(X - X^{\{H\}}) \to L_m(X) \to L_m(X^{\{H\}}) \to L_{m-1}(X - X^{\{H\}})$$

ここで, $X^{\{H\}}$ は 1 orbit type で $X - X^{\{H\}}$ は X より orbit type が一つ少くなっている.