数理解析研究所講究録
1巻 1964年 1-70

代数曲線に附随する二，三の解析的構造

本稿は，数理解析研究所の事業の一つとして1964年7月6，7，8日に京都大学で行つた講義”超アーベル函数へのステツプ“と，そのための予備講義との内容をまとめたものである。まとめるに当つては適当に内容を加えまたは削つたが，主に大学院初級の人を対象にした予備講義（第一章および附録）と，第二，三章とでは多少色合いがちがつてしまつた。

第一章では，代数曲線上のアーベル積分について復習し，その理論即ちアーベル函数の理論が，この代数曲線上の複素直線バンドルの族のパラメーター空間における函数論に，他ならないことを示す。

第二章では，複素多様体の変形・解析的フアイバーバンドルの変形についての，小平・スペンサーの理論を紹介する。〔6〕，〔8〕我々に特に必要なのは§7であつて，第二章の記述全体が§7の定理7.1乃至7.4のためのものである。これらの定理によつて，複素多様体または解析的バンドルの変形族のパラメーター空間に，ある条件の下には複素多様体の構造が入り，この族が解析的な変形族となることが示される。

第三章では，第二章の結果を（主として代数曲線上の）バンドルの族に適用する。§8ではPicard 多様体に対し§7の定理を適用する。§9では複素直線上のアフィン変換群を構造群とするバンドルの族（基底空間は代数曲線）を論ずる。§11は代数曲線の基本群の，既約ユニタリー表現に対応するバンドル族の理論で，M.S. Narasimhan と，C.S. Seshadri の結果〔12〕の紹介である。これは A. Weil が Généralization de fonctions abéliennes（J. Math. Pures Appl. Vol. 17, 1938）において扱つた場合に相当するもので，このバンドル族のパラメーター空間が解析空間としてコンパクト化され，そこに興味ある函数論が展開されうるならば，それこそ超アーベル函数論の名にふさわしいものであろう。今の所まだまだそれには至つていない。僅に一つのステツプを踏み出した所といえよう。附録として外微分式，調和微分式に関する必要な概念と結果を掲げたが，層に関することは既知とした。これらの詳細は秋月〔1〕又は de Rham〔15〕とWeil〔16〕などから知りうる。

第一章　代数曲線とヤコビ多様体

§1　閉リーマン面とその普遍被覆面

閉リーマン面，即ち複素一次元の連結複素多様体Γを考えよう。これに対してよく知れている二，三の事実をあげる。その殆んどは岩沢〔5〕にみられる。（Γはコンパクト）

定理1.1　Γ上の有理型函数の全体Kは，複素数体C（$\mathbb{C}\ni a$ — 定数aに等しい函数）上の一変数代数函数体をなす。即ちKは定数でない元zをふくみ，$[K:\mathbb{C}(z)]<\infty$である。

定理1.2　Kの生成元の系　$z_1 \cdots\cdots z_N$　を適当にとれば，$\Gamma\ni x\to(1:z_1(x):\cdots\cdots:z_N(x))\in P^N(\mathbb{C})$　によつて，ΓはN次元複素射影空間内に一対一双正則に写像される。従つてΓは射影空間内の代数曲線とひとしい解析的構造をもつ。

可附号閉曲面の位相幾何からわかるように，Γの位相的性質はそのGenus　g　によつてきまる。

g＝0のとき，Γはリーマン球面に他ならない。このときKは有理函数体である。

g＝1のときΓの普遍被覆面$\widetilde{\Gamma}$は複素平面$\mathbb{C}$であり，基本群Πは$\mathbb{C}$上に平行移動の群として作用する。従つてΓは複素円環面に他ならない。Γ上の有理型函数とは，（$\mathbb{C}=\widetilde{\Gamma}$上では）二重周期の有理型函数，即ち楕円函数に他ならない。

$g\geqq 2$　のとき，$\widetilde{\Gamma}$は単位円の内部$\{\zeta\mid\zeta\in\mathbb{C},\ |\zeta|<1\}$と解析的に同型であり，$\Pi$の元は$\zeta$に対しては一次分数変換として作用する。

定理1.3　Γの基本群Πは，2g個の生成元a_1，b_1，$\cdots\cdots a_g$，b_g　で生成され，ただ1つの関係　$e=\prod_{i=1}^{g}(a_i\, b_i\, a_i^{-1}\, b_i^{-1})\ (=a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}\cdots\cdots a_g b_g a_g^{-1}\ b_g^{-1})$　によつてきめられる群である。即ちFをa_1，$\cdots\cdots$，b_g　で生成される

自由群，Nは$\Pi a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ で生成される正規部分群であるとすると，$\Pi \cong F/N$.

系：Γのgenus がgならば，Γの1次元 Betti 数は2gである。

閉リーマン面上の函数論では，微分という概念が大切な役目をはたした。Γ上の微分ωとはΓ上の解析的な1次の微分式のことである。（附録§§A，B参照）Γを座標近傍$\{U_j\}$で覆い，U_jでの解析的局所座標をz_jとすれば，U_jでは$\omega = \varphi_j dz_j$，（φ_jはU_jでの有理型函数）であつて，$U_j \cap U_k$では$\varphi_j = \varphi_k \cdot \dfrac{dz_k}{dz_j}$となつている。考える点$x$が$U_j$内にあるとき，$\varphi_j$が$x$において正則なら$\omega$は$x$において正則であるという。$\varphi_j$が$x$において0または極をもつとき，その位数，$x$における留数も局所座標に無関係にきまる。

各点で正則な微分は第1種であるといわれる。また（慣用には一致しないかも知れないが，），Γの各点で正則かまたは1位の極をもち，そのでの留数が整数であるような微分を第3種の微分という。

<u>Proposition 1.4</u> 第3種微分の極の数は有限で，その留数の総和は0にひとしい。

$\widetilde{\Gamma}$をΓの普遍被覆面とし，$\pi : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$をその写像とする。$\Pi$は$\widetilde{\Gamma}$に右から作用するとする。$\omega$が第1種微分であるとき

$$f(\widetilde{x}) = \int_{\widetilde{0}}^{\widetilde{x}} \pi^* \omega \qquad (\widetilde{x}\text{は}\widetilde{\Gamma}\text{の動点，}\widetilde{0}\text{は定点})$$

とおくと，$f(\widetilde{x})$は$\widetilde{\Gamma}$上の正則函数であつて，

$$f(\widetilde{x}\sigma) = f(\widetilde{x}) + \omega(\sigma)\ , \quad (\omega(\sigma)\text{は}\widetilde{x}\text{に無関係})$$

がなりたつ。即ちfは加法的函数である。$\omega(\sigma)$はσのきめるhomology classにおけるωの積分（ωの周期）であり，

$$\omega(\sigma\tau) = \omega(\sigma) + \omega(\tau)$$

がなりたつ。即ち $\Pi \ni \sigma \to \omega(\sigma) \in \mathbb{C}$ はΠの表現である。逆に$\widetilde{\Gamma}$上の加法的正則函数の微分は，Γ上の第1種微分となる。

定理1.5　Γの genus が g ならば，第1種微分の全体は$\mathbb{C}$上にg次元の vector spaceをなす。$\Pi\to\mathbb{C}$の表現はすべて上の $\omega(\sigma)$ と $\overline{\omega(\sigma)}$ との結合によつてえられる。

同様に 第3種微分ωに対し，

$$v(\tilde{x})=exp\left(\int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}}\pi^{*}\omega\right)$$

を考える。ここに$\tilde{0}$も積分の道も，ωの極をさけてとるのである。このvは$\tilde{\Gamma}$上の有理型函数（$\neq 0$）で

$$v(\tilde{x}\sigma)\equiv\chi(\sigma)v(\tilde{x})$$

をみたす。即ちvは乗法的函数である。$\chi(\sigma)=\exp\left(\int_{\sigma}\omega\right)$であつて$\chi$は$\Pi\to\mathbb{C}^{*}$の表現である。逆に$\tilde{\Gamma}$上の乗法的函数$v$をとると，d log vはΓ上の微分であつて，第3種である。第3種微分ωに対し，適当な第1種微分を加えると，ωの極・留数は不変のまま，その周期がすべて純虚数になるようにできる。従つて第3種微分に対し，$\Pi\to U(1)$ の表現χを対応させることができる。

定理1.6　すべての表現$\Pi\to U(1)$が，乗法函数の multiplier としてえられる。

第3種微分ωの極のうち，留数の値が正なるものを y_1，……，y_k，そこでの留数を m，……，m_k とし，留数が負なるものを z_1，……z_l，そこでの留数を n_1……n_l とする。そのとき，乗法的函数 $v(\tilde{x})=\exp\left(\int_{\tilde{0}}^{\tilde{x}}\pi^{*}\omega\right)$ は，$\pi(\tilde{y})=y_j$ なる点$\tilde{y}$ではm_i位の零点を，$\pi(\tilde{z})=z_j$ なる点$\tilde{z}$では n_j 位の極をもつ。それでΓ上の因子[*)] $D=\sum_i m_i y_i-\sum_j n_j z_j$ をvの因子という。prop. 1.5 によりDの次数 $n(D)=\Sigma m_i-\Sigma n_j$ は0である。

定理1.7　Γ上の次数0の因子Dに対し，Dを因子とする乗法函数が，零でない定数因数を除き，一つただ一つ存在する。

＊）　Γの点で生成される自由アーベル群の元をΓの因子という。

§2.　ヤコビ多様体・ピカール多様体

genus　g（$\geqq 1$）の代数曲線Γを考える。Γ上の第1種微分で，$\mathbb{C}$上に独立なものの一組ω_1，……，ω_g　をとる。一方Γの一次元（整係数）ホモロジー群の基底γ_1，‥‥，γ_{2g}　をとる。ω_a　の　γ_j　における周期を　ξ_{aj}　とすると，$(n, 2n)$ー行列　Ξ $=(\xi_{aj})$ がえられる。これを$\{\omega_a\}$の周期行列という。Ξの列ベクトルを，$\mathbb{C}^g$　のベクトルとみれば，Ξは　$\mathbb{C}^g$　内の2g個のベクトルをあたえる。これで生成される$\mathbb{C}^g$　の部分群をもΞとかくことにする。

Proposition 2.1　　Ξは　$\mathbb{C}^g$内でdiscrete　な　，rank　$2n$　の部分群である。従つて$J=\mathbb{C}^g/\Xi$　は複素円環体である。

定理2.2　Jは複素射影空間内の代数多様体と一対一，双正則な対応をなす。

定義　JをΓのヤコビ多様体という。

prop.2.1定理2.2を証明するには，附録を援用する。まず$\{\omega_a\}$　の周期行列をΞとすれば，$\{\bar{\omega}_a\}$の周期は行列$\bar{\Xi}$をなす。ところが　ω_1，……ω_g，$\bar{\omega}_1$，……，$\bar{\omega}_g$　はΓ上の1次調和微分式の基底をなす。（§Dの（b），代数曲線においては，任意のHermitean metric　が　Kähler　であり，1次調和微分式はmetric　によらずきまつている。）従つてde　Rham　の定理により，$\det\begin{pmatrix}\Xi\\ \bar{\Xi}\end{pmatrix}\neq 0$　でなければならない。これでProp.2.1がわかる。（定理1.5もこれと同内容であつた。）

つぎに定理2.2を示すには，γ_1，‥‥，γ_{2g}　が　$KI(\gamma_i\circ\gamma_{g+j})$ $=-KI(\gamma_{g+j}\circ\gamma_i)=\delta_{ij}$　$(i, j=1, \cdots, g)$ をみたすものと仮定してよい。それはH_1（Γ，Z）の生成元のとりかえによつて実現でき，それによつて部分群Ξは変らない

からである。附録 §A の記号θを使えば，

$$\xi_{aj}=\int_{\gamma j}\omega_a=KI\,(\gamma_i\circ\theta\,(\omega_a))\ .$$

従つて

$$\theta\,(\omega_a)=-\sum_{i=1}^{n}\xi_{a,\,n+i}\,\gamma_i+\sum_{j=1}^{n}\xi_{a,j}\gamma_j\ .$$

そこで関係式

$$0=\int_{\Gamma}\omega_a\wedge\omega_\beta=KI\,(\theta(\omega_a)\circ\theta(\omega_\beta))\ ,$$

$$0\leqq\int_{\Gamma}(\sum_a v_a\omega_a)\wedge^*(\overline{\sum_a v_a\omega_a})=\sqrt{-1}\sum_{a,\beta}v_a\bar{v}_\beta\int\omega_a\wedge\bar{\omega}_\beta$$

$$=\sqrt{-1}\ \sum v_a\bar{v}_\beta KI(\theta\,(\omega_a)\circ\theta\,(\bar{\omega}_\beta))\ .$$

をξ，$\bar{\xi}$でかいてみれば，

$$\Xi J\,\Xi^t=0\ ,\ -\sqrt{-1}\ \Xi J\,\Xi^t>0$$

がえられる。§Fの定理により，Jは射影空間内に一対一，双正則に写像できる。

Jの性質を一，二挙げると，

定理 2.3　oをΓの定点とするとき，写像λ；　$\Gamma\ni x\to\mu\,(x)=(\int_0^x\omega_a)\ \mathrm{mod}\,\Xi$

$\in J$はΓからJ内への正則な写像である。Γから任意の複素円環体T内への任意の解析的写像μは，$\mu\,(x)=\rho\circ\lambda\,(x)+\mu\,(0)$，$\rho$は$J\to T$の（複素リー群としての）準同型写像，とかける。

定理の後半は，$T = \mathbb{C}^q/D$ とかき，$\mathbb{C}^q$ の座標を u_1，……，u_q とするとき，$\mu^*(du_\beta)$ が Γ 上の第一種微分になることからわかる。

定理2.4　Γ 上の次数0の因子の群を $\widehat{\mathscr{g}_a}$ とし，$\widehat{\mathscr{g}_a}$ から J への写像 Φ

$$\widehat{\mathscr{g}_a} \ni D = \sum y_j - \sum z_j \to \quad (D) = (\sum_j \int_{zj}^{yj} \omega_a) \bmod \Xi$$

を考えると，これは $\widehat{\mathscr{g}_a}$ から J 上への準同型で，その Kernel は $\widehat{\mathscr{g}_l} = \{D \mid D=(f)$，$f$ は Γ 上の有理函数$\}$ に他ならない。(f) は函数 f の因子である。（§1での乗法函数の因子と同じように理解される。）

この定理の内容は代数函数論におけるアーベル定理に他ならない。

この J に別の解釈を与えうることを述べたいのであるが（§3），そのために n 次元射影的代数多様体に拡張しておく方が都合がよい。

X^n を複素射影空間内の代数的多様体とし，附録 §D で導入した標準的なKähler metric を入れる。そこでのように $\theta(\Omega) = Y$ とおく。

H_1 $(X, \mathbb{R})$ の基底　γ_1，……，γ_{2q}

H_{2n-1} $(X, \mathbb{R})$ の基底 Γ_1，……，Γ_{2q}

を，それぞれ整係数サイクルの類からとり，$KI(\gamma_i \circ \Gamma_j) = \delta_{ij}$ であるようにとる。

X上の型（1，0）の調和微分式の基底を φ_1，……，φ_q とすると，

φ_1，……，φ_q，$\overline{\varphi}_1$，……，$\overline{\varphi}_q$ は1次調和微分式の基底，

$*\varphi_1$，……，$*\varphi_q$，$*\overline{\varphi}_1$，……$*\overline{\varphi}_q$ は（$2n-1$）次調和微分式の基底である（§D）。

そこで $\{\varphi_a\}$，$\{*\varphi_a\}$ の，$\{\gamma_j\}$，$\{\Gamma_j\}$ に関する周期行列をそれぞれ Ξ，Ξ' とする。即ち

$$\xi_{aj} = \int_{\gamma j} \varphi_a \,, \qquad \xi'_{aj} = \int_{\Gamma j} *\varphi_a$$

<u>定理2.5</u>　複素円環体 $\mathcal{A} = \mathbb{C}^q/\Xi$，$\mathcal{P} = \mathbb{C}^q/\Xi'$ は射影的代数多様体である。

（証明）　代数曲線の場合と同様にして，$\theta(\varphi_\alpha) = \sum_j \xi_{\alpha j}\Gamma_j$ であることがわかる。

一方 $\varphi_\beta = -\sqrt{-1}\ \dfrac{1}{(n-1)!} L^{n-1}\varphi_\beta$ から

$$\theta\ {*\varphi_\beta}) = -\sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!}\ \sum_j \xi_{\beta j}\ Y^{n-1} \circ \Gamma_j$$

$$= -\sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!}\ \sum_{j,k} \xi_{\beta j} C_{jk} \gamma_k .$$

ここに $C_{jk} = KI\ (Y^{n-1}\cdot\Gamma_j\cdot\Gamma_k)$ で，これは整数，かつ $C_{jk} = -C_{kj}$ である。

しかも各のおのの γ_j に対し $\theta^{-1}(\gamma_j)$ が（$2n-1$）次調和微分式で代表され，後者は $L^{n-1}\varphi$，$L^{n-1}\overline{\varphi}$ の1次結合ちから，γ_j は $Y^{n-1}\circ\Gamma_k$ の1次結合となる。これから $C = (C_{jk})$ は正則な行列であることを知る。さて

$$0 = \int_X \varphi_\alpha \wedge *\varphi_\beta = -\sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!} KI\ (\sum_i \xi_{\alpha i}\Gamma_i \circ \sum_j \xi_{\beta j} C_{jk}\gamma_k)$$

$$= -\sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!}\ (\Xi C\ \Xi)_{\alpha\beta}$$

および，$\varphi = \Sigma\, u_\alpha \varphi_\alpha$ に対して

$$0 \leqq \int \varphi \wedge \overline{\varphi} = \sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!}\ \Sigma KI\ (\sum_i \xi_{\alpha i}\Gamma_i \circ \sum_{j,k} \xi_{\beta j} C_{jk}\gamma_k)$$

$$\times\ u_\alpha \overline{u}_\beta = -\sqrt{-1}\ \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha,\beta} (\Xi\, C^t\, \overline{\Xi})_{\alpha\beta} u_\alpha \overline{u}_\beta$$

から，ΞはCを principal matrix とする Riemann 行列である。

同様に $\xi'_{\alpha j}=\int_{\Gamma_j} *\varphi_\alpha$ を計算すれば，$\Xi'=\sqrt{-1}\ \dfrac{1}{(n-1)!}\ \Xi C$ がえられる。

従つてΞ' はC^{-1}（の適当な整数倍）をprincipal matrix とする Riemann 行列である。

<u>定義</u> $\mathcal{A}$，$\mathcal{P}$をそれぞXのAlbanese 多様体，Picard 多様体という。

$\mathcal{P}$ の定義はX上のmetric のとり方によるように見えるが，実はXの複素構造だけからきまるのである。それはつぎのprop. 2. 6からもわかるが，Weil〔16〕に従えばもつとelegant であろう。ここでは微分式の周期という初等的な考えを生かすために，このような記述をした。

Xの次元nが1のときは，$\mathcal{A}$，$\mathcal{P}$ はJと一致するが，一般には両者は違う円環体（互に双対的な円環体）である。そして定理2.3は$\mathcal{A}$に対し，定理2.4は$\mathcal{P}$に対して拡張される。

<u>Proposition 2.6</u> X上の（0，1）型調和微分式の空間を$\bar{A}$とかき，

$$D=\left\{\ \bar{\psi}\in\bar{A}\,\middle|\,\int_\gamma(\bar{\psi}-\psi)\equiv 0\ (\bmod \sqrt{-1}\ \mathbb{Z})\ \text{for}\ \gamma\in H_1(X,\mathbb{Z})\ \right\}$$

とおけば，$\mathcal{P}\cong\ \bar{A}/D$（複素円環体として同型）である。

（証明） 従来の記号をそのまま使うことにする。$\bar{A}$の基底として$\sqrt{-1}\bar{\varphi}_1,\cdots\cdots$，$\sqrt{-1}\bar{\varphi}_q$をとり，$\bar{\psi}=\sqrt{-1}\ \sum_\alpha t_\alpha\bar{\varphi}_\alpha$ がDに属する条件を書きあらわしてみる。

$\psi=-\sqrt{-1}\sum_\alpha\bar{t}_\alpha\varphi_\alpha$ であるからこの条件は，

$$\int_{\Gamma_j}(\bar{\psi}-\psi)=\sqrt{-1}\ \sum_\alpha(\bar{t}_\alpha\ \xi_{\alpha j}+t_\alpha\bar{\xi}_{\alpha j})\ \equiv 0\ \ (\bmod\sqrt{-1}\ \mathbb{Z})\ ,$$

即ち

$$(t_1\cdots\cdots t_q\ \bar{t}_1\cdots\cdots\bar{t}_q)\begin{pmatrix}\bar{\Xi}\\ \Xi\end{pmatrix}\equiv 0\qquad(\bmod\ \mathbb{Z})$$

ところが定理 2.5の証明に出てきたように,

$$\begin{pmatrix} \Xi \\ \bar{\Xi} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} {}^t\Xi & {}^t\bar{\Xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}\,H \\ \sqrt{-1}\,\bar{H} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (H > 0)$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} \bar{\Xi} \\ \Xi \end{pmatrix}^{-1} = C\,(\,{}^t\Xi, {}^t\bar{\Xi}\,) \begin{pmatrix} -\sqrt{-1}\,\bar{H}^{-1} & 0 \\ 0 & +\sqrt{-1}\,H^{-1} \end{pmatrix}$$

となる。従つて上の条件をみたす行ベクトル $(t, \bar{t})$ は,この式の右辺の行ベクトルの整係数一次結合に他ならない。列ベクトル ${}^t(t_1, \cdots t_q)$ についていえば,それは

$-\sqrt{-1}\,H^{-1}\cdot {}^t\Xi C = (n-1)!\ H^{-1}\cdot \Xi'$の列ベクトルの整係数結合ということになる。$(n-1)!\ H^{-1}$ は複素ベクトル空間$\mathbb{C}^q$での複素同型をあらわすにすぎないから$\mathcal{P} \cong \bar{A}/D$ をうる。

§ 3. 複素直線バンドルとPicard 多様体

$\mathbb{C}^* = GL(1, C)$ を構造群とし,$\mathbb{C}$をファイバーとする解析的なファイバーバンドルを複素直線バンドルという。代数多様体Xの基本群Πから$\mathbb{C}^*$への表現χがあるときは,これに対応して複素直線バンドルがつぎのように定まる: $\tilde{X}$をXの普遍被覆空間とすると$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$は,X上$\Pi$を構造群とする主バンドルである。$\tilde{X} \times \mathbb{C}$において,$(\tilde{x}\sigma, \xi) \sim (\tilde{x}, \chi(\sigma)\xi)$ によつて同値関係を入れ,これによる商空間をBとすると,BはX上の複素直線バンドルとなる。これを表現χに対応するバンドルという。当然 $\pi^* B$は$\tilde{X}$上の直積バンドルである。

一般にXが多様体,Πが(discrete な又はLie 一)群で,$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ がX上のΠ一主バンドル,Gが別に与えられた群なるとき,X上のG一主バンドルFで$\pi^* F = \tilde{X} \times G$ なるものは,"$\tilde{X} \times \Pi \to G$の factor " の同値類と一対一に対応する。foctor とは $\tilde{X} \times \Pi \to G$ の 写像fであつて

$$f(\tilde{x}, \sigma\tau) = f(\tilde{x}, \sigma)\cdot f(\tilde{x}\sigma, \tau)$$

をみたすもののことである。二つの factors f , g が同値であるとは,$\tilde{X} \to G$の写像φがあつて,

$$g(\tilde{x}, \sigma) = \varphi(\tilde{x})^{-1} f(\tilde{x}, \sigma)\,\varphi(\tilde{x}\sigma)$$

となることである。

factor f が与えられたとき，$\widetilde{X}\times G$内で同値関係 $(\widetilde{x}, \xi) \sim (\widetilde{x}\sigma, f(\widetilde{x}, \sigma)^{-1}\xi)$ を考え，　その商空間をFとすると，FはX上のG－主バンドルとなり，$\pi^{*}F = \widetilde{X}\times G$となる。この構成によつて，上の主張がなりたつことは容易にわかる。ここにバンドルを複素解析的なものと考えるならば，fやφもすべて複素解析的な写像とすればよいのである。

特に factor f が $\widetilde{x}$に無関係ならば，fは$\Pi\to G$の準同型である。上記基本群の表現に対応するバンドルはこの場合の例である。

そこで射影的代数多様体X上で基本群Πの表現$\Pi\xrightarrow{\chi}\mathbb{C}^{*}$を考える。$\mathbb{C}^{*}$は可換であるから，$\chi$は$\Pi/[\Pi, \Pi] = H_1(X, \mathbb{Z})$から$\mathbb{C}^{*}$への表現と考えてよい。

$H_1(X, \mathbb{Z})$の torsion 部分上では trivial であるような表現を考える。このような表現は special であるという。χが special ならXは適当な第一種1次微分ω，θを使つて，

$$\chi(\gamma) = \exp\left(2\pi\int_{\gamma}(\bar{\omega}+\theta)\right)$$

とかける。$\widetilde{X}$上の正則函数$\varphi(\widetilde{x}) = \exp\left(2\pi\int_{\widetilde{0}}^{\widetilde{x}}(\theta')\right)$によつて，$\chi$を同値な factor に変換すると，$\chi$は表現 $\exp\left(2\pi\int_{\gamma}\bar{\omega}\right)$とも，ユニタリー表現

$$\chi'(\gamma) = \exp\left(2\pi\int_{\gamma}(\bar{\omega}-\omega)\right)$$

とも同じ複素直線バンドルを定め，ことなるユニタリー表現はことなるバンドルを定めることがわかる。

これから，考えている種類のバンドルは $\bar{A}/D \cong \mathcal{P}$ と自然な一対一の対応をなしていることがわかる。即ち，Xの Picard 多様体とは，Xの基本群の$\mathbb{C}^{*}$内への special な表現に対応するバンドルの族を parametrize して，そのパラメーター空間に複素構造を入れたものに他ならないことがわかる。（この parametrization の自然さについ

ては§8で論ずることにする。）

附記　すべての表現に対応するバンドルの族が$\mathcal{P}$であるかのような錯覚におちいったので，講義でそのように話してしまった。（ここと違った扱いをしたので，誤りが目立たなかったのである。）

special な表現は，すべての表現の群の中で有限位数の部分群をなすから，すべての表現に対応するバンドルの族は，有限個の$\mathcal{P}$の直和集合でparametrize されるわけである。

Xが代数曲線の場合は $H_1(X, \mathbb{Z})$ にtorsion がないから，special と non-special との区別はおこらない。

第二章　複素構造の変形

§4. 定義，基本補題

微分多様体$\mathcal{V}$, Mと，写像$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \to M$とがあつて，つぎの条件がなりたつとする。

（i）$\tilde{\omega}$はM上へのC^∞写像

（ii）$\tilde{\omega}$のJacobian の rank はつねに $m = \dim M$ にひとしい。

（iii）Mの任意の点tに対しその近傍Uがあつて，

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & X \times U \\ {\scriptstyle \tilde{\omega}} \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{id} & U \end{array}$$

が可換となるような diffeomorphism ϕ がある。ここにXは一つの微分多様体である。この際 $t \in M$に対し $V_t = \tilde{\omega}^{-1}(t)$ が$\mathcal{V}$の閉部分多様体でXに diffeomorphic なことは明らかである。Xがコンパクトなときは，（i）（ii）および（iii'）：$\tilde{\omega}$はproper から（iii）が導かれる。

以下この章ではMは連結であるとする。

定義4.1　上の条件をみたす$\varpi:\mathcal{V}\to M$において，さらにつぎの条件がなりたつとき，$\varpi:\mathcal{V}\to M$はMをパラメーター空間とする複素多様体の可微分（変形）族であるという。

(a) Mの各点tに対し，$V_t=\varpi^{-1}(t)$は複素多様体である。

(b) $\mathcal{V}$の各点pに対し，その近傍$\mathcal{U}$と$\mathcal{U}$における複素数値函数$z^1,\cdots\cdots,z^n$および実数値函数$t^1,\cdots\cdots,t^m$があつて

$(R_e z^\alpha,\ I_m z^\beta,\ t^\lambda)$は$\mathcal{U}$における$C^\infty$局所座標

$(z^1,\ \cdots\cdots,\ z^n)$は$V_t\cap\mathcal{U}$における$V_t$の解析的局所座標

$(t^1,\ \cdots,t^m)$は$\varpi(\mathcal{U})$上の函数で，そこでのMの局所座標

である。

実際$\{V_t\}_{t\in M}$は一つの微分多様体Xに入れた複素構造の一系である。$(z^\alpha,\ t^\lambda)$をadmissibleな局所座標系ということにする。

定義4.2　二つの変形族$\varpi:\mathcal{V}\to M$，$\varpi':\mathcal{V}'\to M'$において，

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V}' \\ \varpi\downarrow & & \downarrow\varpi' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M'\end{array}$$

が可換であるようなdiffeomorphisms Φ, φがあつて，ΦはV_tを$V'_{\varphi(t)}$上に解析的同型に写すならば，$\mathcal{V}$，$\mathcal{V}'$は同値な族であるという。

定義4.3　$\varpi:\mathcal{V}\to M$と$V_{to}\to t_o$との間に

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & V_{to} \\ \varpi\downarrow & & \downarrow\varpi \\ M & \xrightarrow{\text{const.map}} & t_o\end{array}\qquad\text{(可換)}$$

なるC^∞写像Φがあつて，各V_tがV_{to}に解析的同型に写されるならば，$\mathcal{V}\to M$はtrivialな族だという。

定義4.4　$\tilde{\varpi}:\mathcal{V}\to M$，$\tilde{\varpi}':\mathcal{V}'\to M'$において，

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{V}' \\ \tilde{\varpi}\downarrow & & \downarrow\tilde{\varpi}' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M'\end{array} \qquad \text{(可換)}$$

であるようなC$^\infty$写像Φ，φがあつて $V_t\cong V'_{\varphi(t)}$（解析的）であるとき，$\mathcal{V}\to M$は写像 $\varphi:M\to M'$ によつて$\mathcal{V}'\to M'$ から induce される変形族であるという。

$\mathcal{V}$，M，$\tilde{\varpi}$，Φ，φ等を複素多様体と解析的写像のカテゴリーで考えるとき，上と同様にして，解析的な変形族，解析的に同値な変形族，解析的に trivial な変形族などの概念がえられる。

定義4.5　$\mathcal{B}\to\mathcal{V}\xrightarrow{\tilde{\varpi}}M$なる manifolds と写像とがあつて，$\tilde{\varpi}:\mathcal{V}\to M$は複素多様体の$C^\infty$変形族$\mathcal{B}\to\mathcal{V}$は$C^\infty$ファイバー・バンドルで，構造群とファイバー とは複素解析的，$t\in M$に対しその上の部分$B_t\to V_t$ は解析的ファイバー・バンドルとなつているとき，この系は（$\mathcal{V}\to M$上の）解析的ファイバー・バンドルのC^∞変形族であるという。

$\tilde{\varpi}:\mathcal{V}\to M$を複素多様体の$C^\infty$変形族とする。（以下，ファイバーを除いては，すべてコンパクトな複素多様体の族を考える。）$\mathcal{V}$の接バンドル$\mathcal{T}(\mathcal{V})$ は，各V_t にそうての接ベクトルのバンドル$\mathcal{F}_1$ と，$\mathcal{T}(M)$ の逆像$\tilde{\varpi}^*\mathcal{T}(M)$ とから，extension をしてえられる：

$$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{T}(\mathcal{V})\to\tilde{\varpi}^*\mathcal{T}(M)\to 0 \qquad \text{(exact)}.$$

各V_t が複素多様体だから，$\mathcal{F}_1$ は holomorphic な接ベクトルのバンドル$\mathcal{F}$と，anti-holomorphic なものとの直和にわかれる。$\mathcal{T}(\mathcal{V})$ の中で，$\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$，$\dfrac{\partial}{\partial t^\lambda}$ の一次結合である接ベクトルの全体$\mathcal{E}$をとつて，

(4.1)　$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{E}\to\tilde{\varpi}^*\mathcal{T}(M)\to 0$

なる exact sequence ができる。

admissible coordinates $(z_j^\alpha, t_j^\lambda)$（$\mathcal{U}_j$において）を使つて書けば，$\mathcal{E}$のベクトルは $\sum_\alpha\theta_j^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha}+\sum v_j^\lambda\dfrac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ であらわされ，$v_j^\lambda=0$なるベクトルが$\mathcal{F}$に属する。

$\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$では

$$
(4.2) \quad \begin{cases} z_j^{\alpha} = g_{jk}^{\alpha}(z_k, t_k) \\ t_j^{\lambda} = t_{jk}^{\lambda} \quad (t_k) \end{cases} \qquad (g\text{はzにつき正則})
$$

であるから，(θ_j, v_j)と(θ_k, v_k)との関係は

$$
(4.3) \quad \begin{pmatrix} \theta_j^{\alpha} \\ \\ v_j^{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_{jk}^{\alpha}}{\partial z_k{}^{\beta}} & \dfrac{\partial g_{jk}^{\alpha}}{\partial t_k^{\mu}} \\ 0 & \dfrac{\partial t_{jk}^{\lambda}}{\partial t_k{}^{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_k^{\beta} \\ \\ v_k^{\mu} \end{pmatrix}
$$

で与えられる。

バンドルの変形族$\mathcal{B} \to \mathcal{V} \to M$に対してもこれを記述するのに都合のよい接バンドルを考えよう。そのため$\mathcal{B}$を，対応する princrial bundles の族$\mathcal{P}$でおきかえて$\mathcal{P} \xrightarrow{p} \mathcal{V} \xrightarrow{\widetilde{\omega}} M$を考える。

変形族$\mathcal{P} \longrightarrow M$に対して(4.1)を書けば

$$
0 \to (\mathcal{P}/M) \to \mathcal{E}(\mathcal{P}) \to (\widetilde{\omega} \circ p)^* \mathcal{T}(M) \to 0 \quad (\text{exact})
$$

がえられる。一方$\mathcal{P} \to \mathcal{V}$においてファイバーにそうての接ベクトルを考えれば

$$
0 \to \mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}/M) \to p^* \mathcal{F}(\mathcal{V}/M) \to 0 \quad (\text{exact})
$$

がえられる。

$\mathcal{P}$はGを構造群とする主バンドルであるから，Gは$\mathcal{P}$上に右から作用しており，その作用は faithful で，$\mathcal{P}$の各のファイバー上で transitive である。そこで$\mathcal{E}(\mathcal{P}) \ni (x, v)$，$(x', v')$に対し

$$
(x, v) \sim (x', v') \iff {}^{\exists} g \in G, \quad \begin{cases} x' = xg \\ v' = dg \quad v \end{cases}
$$

(dgはgの作用に伴う，接空間の写像）によって$\mathcal{E}(\mathcal{P})$に同値関係を入れると，これによる商空間 $\mathcal{R} = \mathcal{E}(\mathcal{P})/G$ は $\mathcal{P}/G = \mathcal{V}$上のベクトル・バンドルとなる。この際$\mathcal{F}(\mathcal{P}/M)$，$\mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})$もGで不変で，上の同値関係により$\mathcal{V}$上のベクトル・バンドル$\mathcal{M}$，$\mathcal{L}$を生ずる。$\mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})$は$\mathcal{P} \to \mathcal{V}$の各ファイバー($\cong G$)上では，左不変 holomorphic vector field（即ちGのLie algebra $\mathfrak{g}$）をファイバーとする直積バンドルに

なつている。これをGの元gでうつすことを考えると，$\mathcal{F}(P/\mathcal{V})$ 上では$dg=Ad(g^{-1})$となる。従って$\mathcal{L}$は，$\mathfrak{g}$をファイバーとし，作用Adによつて，$P\to\mathcal{V}$にassociate された，($\mathcal{V}$上の) バンドルである。

$(\tilde{\omega}\circ p)^*\mathcal{J}(M)/G$は明らかに$\tilde{\omega}^*\mathcal{J}(M)$に他ならない。従ってつぎのcommutative exact diagramをうる。

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{\omega}^*(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{M} \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{R} \arrow[r] \arrow[u] & \tilde{\omega}^*(M) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{L} \arrow[r] \arrow[u] & 0 & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

admissible coordinate system $\{\mathcal{U}_j\}$に関して，バンドル$\mathcal{R}$を local product representation で表わしておこう。$\mathcal{U}_j$上でPは直積だとする： 即ち$p^{-1}(\mathcal{U}_j)\longrightarrow\mathcal{U}_j\times G$． そうすれば $p^{-1}(\mathcal{U}_j)$ の点は座標(z_j, t_j, g_j)で与えられる。

$$\mathcal{U}_j\times G\ni(z_j, t_j, g_j)\sim(z_k, t_k, g_k)\in\mathcal{U}_k\times G$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} z_j^{\alpha}=g_{jk}^{\alpha}(z_k, t_k) \\ t_j^{\lambda}=t_{jk}^{\lambda}(t_k) \\ g_j=G_{jk}(z_k, t_k)\,g_k . \end{cases}$$

G上の左不変 Maurer-Cartan forms の基底$(\omega^1, \cdots\cdots, \omega^N)$とそれに双対的な$\mathfrak{g}$の基底$(l_1, \cdots\cdots, l_N)$とをきめておく。$(N=\dim_C G)$

$\mathcal{U}_j\times G$の接ベクトルl_a, $\dfrac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$, $\dfrac{\partial}{\partial t_j^{\lambda}}$ と，$\mathcal{U}_k\times G$の接ベクトルl_b, $\dfrac{\partial}{\partial z_j^{\beta}}$, $\dfrac{\partial}{\partial t_k^{\mu}}$

との間は，上の関係により

$$
\begin{cases}
l_a = l_a \\
\dfrac{\partial}{\partial z_k^\beta} = \sum\limits_a \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} \dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \Sigma < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial z_k^\beta} > (ad(\bar{g}_k^1) l_a) \\
\dfrac{\partial}{\partial t_k^\mu} = \sum\limits_\lambda \dfrac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \dfrac{\partial}{\partial t_j^\lambda} + \sum\limits_\alpha \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \Sigma < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial t_k^\mu} > \left(ad\ (\bar{g}_k^1)\ l_a\right)
\end{cases}
$$

によつて結びつけられる。これは一つの函数 $F(z_j, t_j, g_j) = F(g_{jk}(z_k, t_k),$ $t_{jk}(t_k), G_{jk}(z_k, t)g_k)$ に接ベクトルを作用させればわかる。従つて，$\mathcal{E}(\mathcal{P}/M)$ のベクトル $\sum\limits_a u_j^a l_a + \sum\limits_\alpha \theta_j^\alpha \dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \sum\limits_\lambda v_j^\lambda \dfrac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ の成分についてはtransirion relation

$$
\begin{pmatrix} u_j^a \\ \theta_j^\alpha \\ v_j^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_N & ad(g_k^{-1}) < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial z_k^\beta} > & ad(g_k^{-1}) < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial t_k^\mu} > \\ 0 & \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} & \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^b \\ \theta_k^\beta \\ v_k^\mu \end{pmatrix}
$$

がなりたつ。*) $\mathcal{R} = \mathcal{E}(\mathcal{P}/M)/G$ は，$\mathcal{P}$ の点 $y_j = \phi_j^{-1}(z_j, t_j, e)$ と $y_k = \phi_k^{-1}(z_k, t_k, e) = y_j \cdot G_{jk}(z, t)$ とにおけるベクトルを同一視してえられるのであつた。従つて $\mathcal{R}$ は transition matrix

$$
(4.5) \qquad \begin{pmatrix} Ad(G_{jk}) & Ad\, G_{jk} < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial z_k^\beta} >, & ad\, G_{jk} < G_{jk}^* \omega^a, \dfrac{\partial}{\partial t_k^\mu} > \\ 0 & \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial z_k^\beta} & \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k^\mu} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k^\mu} \end{pmatrix}
$$

---

*) $\overset{*}{G}_{jk}\omega$ は，$G_{jk}: U_j \cap U_k \to G$ における ω の逆像をあらわす。

によつて与えられる。$\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$がどのように与えられるかは，これからすぐ判る。

変形族におけるコホモロジーを微分式特に調和微分式であらわす必要がある。$\tilde{\omega}: \mathcal{V} \to M$があるとき，既出のバンドル$\mathcal{F}$に双対的な$\mathcal{F}^*$およびそれに複素共役な$\overline{\mathcal{F}}^*$を考え，それらの外積バンドル$(\overset{r}{\wedge}\mathcal{F}^*)\wedge(\overset{s}{\wedge}\overline{\mathcal{F}}^*)=\mathcal{F}^*(r, s)$を考える。

<u>定義 4.6</u>　$\mathcal{B} \to \mathcal{V} \to M$が$\mathcal{V}$上の解析的ベクトル・バンドルの族であるとき，$\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}^*(r, s)$の$C^\infty$−section を，$\mathcal{V}$上ファイバーにそうての，型$(r, s)$の$(C^\infty-)\mathcal{B}$−微分式という。$\mathcal{B}$が$\mathbb{C}$をファイバーとする直積バンドルの時，単に（ファイバーにそうての）微分式という。

(4.1) に双対的なバンドルの exact sequence を考えれば，ファイバーにそうての$\mathcal{B}$−微分式とは，$\mathcal{V}$上の通常の意味での微分式を modulo dt で考えたものに他ならない。あるいはtをパラメーターとするV_t上のB_t−微分式の族に他ならない。

各ファイバー上では微分式に対し，d_t, d'_t, d''_tなる演算が定義されており，d''_tは$\mathcal{B}_t$−微分式に対しても意味がある。$\varphi=\{\varphi_t\}_{t\in M}$がファイバーにそうての微分式〔$\mathcal{B}$−微分式〕ならば，$\{d_t\varphi_t\}_{t\in M}$, $\{d'_t\varphi_t\}_{t\in M}$, $\{d''_t\varphi_t\}_{t\in M}$〔$\mathcal{B}$−微分式については$\{d''_t\varphi_t\}_{t\in M}$だけ〕も，$\mathcal{V}$上ファイバーにそうての微分式〔$\mathcal{B}$−微分式〕であつて，それぞれ$d\varphi$, $d'\varphi$, $d''\varphi$であらわされる。

型(r, s)の$C^\infty\mathcal{B}$−微分式の$(\mathbb{C}-)$加群を$\mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{B})$とかく。また$\mathcal{B}$の$C^\infty$切断面で，各$V_t$上では正則なものの芽からなる層を$\mathcal{O}(\mathcal{B})$とかく。$V_t$の上への"restriction r_t"を考えると，$\mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{B}) \longrightarrow A^{r,s}(B_t)$, $\mathcal{O}(\mathcal{B}) \longrightarrow \Omega(B_t)$なる写像がえられる。ここで<u>後者の restriction とは，"函数の restriction をとつてその芽を考える"という意味であつて，r_tは層の restriction map ではない。</u>
以下でもこの意味のrestriction を考える。
$\{\sum_s \mathcal{A}^{r,s}(\mathcal{B}), d''\}$はchain complex をなす。そのコホモロジーに関してDolbeault の定理（附録§E）の拡張がなりたつ。即ち

<u>補題 4.1</u>

$$
\begin{array}{ccc}
H^q(\mathcal{V}, \mathcal{O}(\mathcal{B})) & \cong & H^q(\sum_s \mathcal{A}^{0,s}(\mathcal{B}), d'') \\
\downarrow & & \downarrow r_t \\
H^q(V_t, \Omega(B_t)) & \cong & H^q(\sum A^{0,s}(B_t), d''_t)
\end{array}
$$

なるcommutative diagram がなりたつ。

つぎに$\mathcal{V}$上にmetric を導入する：$\mathcal{E}$の構造群を$U(n)\times O(m)$ に reduce させると，それは$\mathcal{V}$上のRiemann metric で，各V_t 上ではHermitean なるものをきめたことになる。これによつてV_t上の微分式 φ_t, ψ_t に対し$*_t$, 内積$(\varphi_t, \psi_t)_{V_t}$ が定義される。$\mathcal{V}$上のファイバーにそうての微分式$\varphi=\{\varphi_t\}$に対して $*\varphi=\{*_t\varphi_t\}$ はやはり$\mathcal{V}$上の微分式で，φ，ψの内積は$(\varphi, \psi)=\int_M (\varphi_t, \psi_t)_{V_t}\, dM$（$dM$は$M$上の体積要素）によつて定義される。$\mathcal{B}$－微分式の場合も$B_t$上のmetric を$t$について$C^\infty$なように とつて，附録§Eと同様にして内積を定義する。

$\mathcal{B}$－微分式に対してd''の形式的な adjoint をϑとかく．（即ち$\vartheta=\{\vartheta_t\}$で，$\vartheta_t$は附録§D，§Eのように定義される）。今は各の$V_t$がコンパクトな場合を考えているから，は真の意味で$d''$の adjoint になる。

$$\square=d''\vartheta+\vartheta d''\ (=\{\square_t\},\ \square_t=d''_t\vartheta_t+\vartheta_t d''_t\ )$$

に関して調和微分式の理論を考えたい。

各のV_tの上では型(r, s)のB_t－調和微分式の加群$\mathcal{H}_t(r, s)$は有限次元であつて，B_t－微分式のHilbert 空間において$\mathcal{H}_t(r, s)$への射影作用素$H_t(r, s)$とGreen の作用素$G_t(r, s)$とがあつて

$$\varphi_t=H_t(r, s)\varphi_t+\square_t G_t(r, s)\varphi_t$$

なる分解がなりたつ。（附録 §E）．問題は $\varphi=\{\varphi_t\}$がC^∞ $\mathcal{B}$－微分式のとき，$\{H_t\varphi_t\}$ $\{G_t\varphi_t\}$がtに関してC^∞になるかどうかである。

<u>基本補題4.2</u> $\dim\mathcal{H}_t(r, s)$がtに無関係ならば，

$\varphi=\{\varphi_t\}$が型(r, s)のC^∞ $\mathcal{B}$－微分式 なるとき $H_t(r, s)\varphi_t$, $G_t(r, s)\varphi_t$ もtに関しC^∞になる。

補題 4.3　$\dim \mathcal{H}_t(r, s)$ が t に無関係なとき，型 (r, s) の $\mathcal{B}$－微分式に対する作用素 $H(r, s)$，$G(r, s)$ があつて，C^∞ 微分式を C^∞ 微分式にうつし，

$$\square H(r, s)\varphi = 0$$

$$\varphi = H(r, s)\varphi + \square \cdot G(r, s)\varphi$$

となる。

注意：　φ が C^∞ であれば既出の $(\varphi, \varphi) = \int_M (\varphi_t, \varphi_t) dM$ が収束しなくても，$H(r, s)$，$G(r, s)$ は定義されている。H，G の存在を示すには，M 上でコンパクトな台をもつ1の分割 $1 = \sum \rho_i$ を考えておいて，$\sum_i H(\rho_i \varphi) = H\varphi$，$\sum_i G(\rho_i \varphi) = G\varphi$ とおけばよい。

補題 4.4　同じ仮定の下に $\mathcal{H}(r, s) = \{\varphi \in \mathcal{A}^{r, s}(\mathcal{B}) \mid \square\varphi = 0\}$ とおけば，

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}(r, s) & \cong & H^s(\sum_q A^{r, q}(\mathcal{B}), d'') \\
r_t \downarrow & & r_t \downarrow \\
\mathcal{H}_t(r, s) & \cong & H^s(\sum_q A^{r, q}(B_t), d''_t)
\end{array}$$

なる commutative diagram がなりたち，r_t は surjective である。

補題 4.5　同じ仮定の下に，$\mathcal{H}_t(r, s)$ の基底が，（与えられた t_0 の近傍で）t に関し C^∞ にとれる。$\bigcup_{t \in M} \mathcal{H}_t(r, s)$ は M 上の C^∞ ベクトル・バンドルをなし，$\mathcal{H}(r, s)$ の元はその C^∞ cross section に他ならない。

これらは補題 4.3 からすぐ出てくる。基本補題 4.2 の証明は Kodaira-Spencer [7] にまかせる。なおそこにおける重要な結果を二，三引用しておく。

基本補題 4.6　$t_0 \in M$ に対し，その近傍において，

$$\dim H^q(V_t, \Omega(B_t)) \leqq \dim H^q(V_{t_0}, \Omega(B_{t_0}))$$

がなりたつ。

基本補題 4.7　$\dim H^1(V_t, \Omega(B_t))$ が t に無関係なら，$\dim H^0(V_t, \Omega(B_t))$

もtに無関係である。

複素解析的な変形族の場合には，つぎの事実がなりたつ。（Kodaira-Spencer [6]，定理18，

基本補題4.8　$\mathcal{B}\to\mathcal{V}\to M$が解析的ベクトル・バンドルの複素解析的変形族なるとき，$\dim H_t^o(V_t, \Omega(B_t))$ がtに無関係ならば，$H_t^o(V_t, \Omega(B_t))$ の基底が（与えられたt_oに対しそのある近傍で）tに関し正則になるようにとれる。

§5　Fundamental sheaves, local triviality

変形族$\tilde{\omega}: \mathcal{V}\to M$があるときバンドルの列

(4.1)　　$0\to\mathcal{F}\to\mathcal{E}\to\tilde{\omega}^*\mathcal{T}(M)\to 0$

を考える。$\mathcal{F}, \mathcal{E}$のC^∞- cross section で，各V_t上では正則になるものの芽が作る層をΘ，Ψとする。$\Lambda=\Psi/\Theta$とおくと，

$$0\to\Theta\to\Psi\to\Lambda\to 0$$

はexact である。

T_Mを，Mの接バンドル$\mathcal{T}(M)$のC^∞ cross section の芽の層とする。これはM上の層であるが，$\tilde{\omega}: \mathcal{V}\to M$における$T_M$の逆像を$T$とする。$T$は$\Lambda$のsubsheaf とみられ，ファイバー$V_t$の上では "constant である" ような，$V_t$へのnomal vector field の芽の層といつてよい。$\Psi\to\Lambda$におけるTの逆像をΠとすると，層の完全列

(5.1)　$0\to\Theta\to\Pi\to T\to 0$

がえられる。これを$\mathcal{V}\to M$に対するfundamental sheaves の完全列という。

局所座標系(z_j, t_j)，(z_k, t_k)・・・・に関して書けば，Πの元は $\sum_\alpha \theta_j^\alpha(z_j, t)\dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$ $+\sum_\lambda v_j^\lambda(t_j)\dfrac{\partial}{\partial t_j^\lambda}$ であらわされ，座標のとりかえに関し成分は（4.3）によつて変換される。即ち

$$\begin{cases} \theta_j^\alpha(z_j, t_j) = \sum_\beta \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k, t_k)}{\partial z_k{}^\beta} \theta_k^\beta(z_k, t_k) + \sum_\mu \dfrac{\partial g_{jk}^\alpha}{\partial t_k{}^\mu} v_k^\mu(t_k) \\ v_j^\lambda(t_j) = \sum \dfrac{\partial t_{jk}^\lambda}{\partial t_k{}^\mu} v_k^\mu(t_k) \end{cases}$$

このような特別な形のvector field を考える理由はつぎのとおりである。

<u>Proposition 5.1</u> $\pi \in \Gamma(\mathcal{V}, \Pi)$ が与えられたとき，NをM内でrelatively compact な開集合とすると，$\varepsilon > 0$と，$-\varepsilon < s < \varepsilon$に対して定義されたdiffeomorphism $\exp(s\pi) : \varpi^{-1}(N) \xrightarrow{\text{into}} \mathcal{V}$とがあつて，$\exp(s\pi)$ は一つのファイバー V_t $(t \in N)$ を一つのファイバー $V_{f(t,s)}$ に biregular に写像し，$\dfrac{d}{ds}(\exp(s\pi)(x)) = \pi(\exp(s\pi)(x))$ である。

（証明） 有限個のrelatively compact な admissible coordinate neighbourhoods$\{\mathcal{U}_j\}$ で$\varpi^{-1}(\bar{N})$ をおおうことができる。さらに$\mathcal{U}_j \supset \bar{\mathcal{U}}_j' \supset \mathcal{U}_j$，$\bigcup_j \mathcal{U}_j' \supset \varpi^{-1}(\bar{N})$ であるような$\{\mathcal{U}_j'\}$がとれる。

$\mathcal{U}_j$で微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} z_j^\alpha(s) = \theta_j^\alpha(z_j(s), t_j(s)) \\ \dfrac{d}{ds} t_j^\lambda(s) = v_j^\lambda(t_j(s)) \end{cases}$$

を考える。ここに$(\theta_j^\alpha, v_j^\lambda)$は$\pi$の成分である。

$\varepsilon > 0$を十分小さくとればこの微分方程式は，初期条件$(z_j^\alpha(o), t_j^\lambda(o)) = (\zeta_j^\alpha, \tau_j^\lambda) \in \mathcal{U}_j'$の下には，$-\varepsilon < s < \varepsilon$に対して一意的な解 $(z_j(s, (\zeta, \tau)), t_j(s, (\zeta, \tau)))$ をもち，$(z_j(s, (\zeta, \tau)), t_j(s, (\zeta, \tau))) \in \mathcal{U}_j$となる。

微分方程式の性質からつぎのことがいえる：

(i) 解は(ζ_j, τ_j)に関してC^∞である。

(ii) $t_j^\lambda(s, (\zeta, \tau))$ はζに無関係である。

(iii) $z_j^{\alpha}(s,(\zeta,\tau))$ はζについて正則である。

(iv) $z_j^{\alpha}(s,(g_{jk}(\zeta_k,\tau_k),t_{jk}(\tau_k)))$

$$=g_{jk}^{\alpha}(z_k(s,(\zeta_k,\tau_k)),\ t_k(s,\tau_k)))\ ,$$

$$t_j^{\lambda}(s,t_{jk}(\tau_k))=t_{jk}^{\lambda}(t_k(s,\tau_k))\ .$$

これによつてファイバーを保存するC^{∞}写像$\exp(s\pi)$が定義されることがわかる。$s=0$で$\exp(s\pi)$は恒等写像だから，$|s|$が十分小さければ$\exp(s\pi)$は diffeomorphism である。

主バンドルの変形族$\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$が与えられたときも，(4.4) の cross section の芽（のあるもの）のなす層の diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \Theta & \to & \Pi & \to & T & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & \Sigma & \to & \Gamma & \to & T & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & \Xi & & \Xi & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array} \qquad \begin{pmatrix}\text{exact}\\ \text{commutative}\end{pmatrix} \tag{5.2}$$

がえられる。ここにΘ，Π，Tは (5.1) におけるものであり，Ξ，Σはそれぞれ$\mathcal{L}$,$\mathcal{M}$の differentiable cross section で各V_t上で正則であるものの芽の層である。Γは縦の列が exact になるように決める。横列も自然に exact になる。この diagram をバンドルの変形族の fundamental diagram という。

(5.1)，(5.2) をV_tの上へ restrict することができる。この場合 restriction r_t とは，V_t 上で0になる sections の芽を modulo にして考えるという意味である。V_t 上の restriction を，添字tをつけて，Θ_t，Σ_t等とあらわす。Θ_tはV_t 上の接ベクトルの holomorphic field の芽の層に他ならない。

$\tilde{\omega}:\mathcal{V}\to M$なる写像があるとき，$\mathcal{V}$上の sheaf $\mathcal{S}$ に対し，その direct images と

よばれるM上の sheaves $\varpi_q(\mathcal{S})$ (又は $\mathcal{H}^q(\mathcal{S})$) が定まる。即ち$M$の開集合$U$に対して$H^q(\varpi^{-1}(U),\mathcal{S})$ を対応させると明らかな restriction により presheaf ができる。それできまる sheaf を$\mathcal{S}$の q-th direct image というわけである。

$$0 \to \mathcal{S}' \to \mathcal{S} \to \mathcal{S}'' \to 0$$

が$\mathcal{V}$上の exact sequence of sheaves であるとき，

$$0 \to \mathcal{H}^0(\mathcal{S}') \to \mathcal{H}^0(\mathcal{S}) \to \mathcal{H}^0(\mathcal{S}'')$$
$$\to \mathcal{H}^1(\mathcal{S}') \to \mathcal{H}^1(\mathcal{S}) \to \mathcal{H}^1(\mathcal{S}'') \to \cdots\cdots$$

なる exact sequence が生ずる。

これを複素多様体の変形族$\varpi: \mathcal{V} \to M$に対する fundamental sheaves (5.1) に適用すると，

$$0 \to \Theta \to \Pi \to T \to 0 \qquad (\text{exact})$$

から，

(5..3)　$\rho: \mathcal{H}^0(T) \to \mathcal{H}^1(\Theta)$

なる sheaf homomorphism がえられる。$\mathcal{H}^0(T)$ はM上の differentiable tangent vector fields の芽の層T_M に他ならない。

V_t 上への restriction によつて

(5.4)　$\rho_t: (T_M)_t \to H^1(V_t, \Theta_t)$

がえられる。$(T_M)_t$ はtにおけるMの接空間である。

<u>定理5.2</u>　$\rho: T_M \to \mathcal{H}^1(\Theta)$ が$t=0$ $(\in M)$ で0写像であれば，変形族$\mathcal{V} \to M$は locally trivial である。則ち0の近傍Uがあつて，$\varpi^{-1}(U) = \mathcal{V}|U$が trivial である。

(証明)　T_MはM上のC^∞函数芽の層に関して finitely generated である。従つて，0で$\rho=0$ならば，その適当な近傍Uで$\rho=0$である。

Uで局所座標$(t^1,\cdots,t^m)$をとる。$v = \dfrac{\partial}{\partial t^1}$ はU上のC^∞ vector field だから，$\rho=0$のため　$\pi \in H^0(\mathcal{V}/U, \Pi)$ でvはΠの像となる。

$\exp(s\pi)^{-1}$ により，$U_s=\{(t)\in U \mid t^1=s\}$ は U_o 上に C^∞ に写され，各 fibre は biregular に対応する。（以上の構成では，必要に応じて U を小さくとりかえるのであつた。）次元に関する帰納法により定理が証明される。

定理 5.2′　$\tilde{\omega}:\mathcal{V}\to M$ が複素解析的変形族なるとき $\rho: T_M\to H^1(\Theta)$ が $t=0$ で0写像なら，$\mathcal{V}\to M$ は $t=0$ の近傍で解析的に trivial である。

上の定理では sheaf の準同型 ρ が0写像であるということが条件であつた。各の V_t 上への restriction $\rho_t:(T_M)_t\to H^1(V_t,\Theta_t)$ を考えると，$\rho=0$ at $t=0$ なら $t=0$ の近傍で $\rho_t=0$ だが，逆は直ちにはいえない。

定義 5.1　変形族 $\mathcal{V}\to M$ が regular であるとは，dim $H^1(V_t,\Theta_t)$ が $t\in M$ によらず一定であることをいう。

Proposition 5.3　$\mathcal{V}\to M$ が regular な変形族ならば，すべての t に対し ρ_t が0写像のとき，$\mathcal{V}\to M$ は M の各点で locally trivial である。

Proposition 5.4　$H^1(V_o,\Theta_o)=0$ ならば，V_o をふくむ任意の変形族は，V_o において locally trivial である。

以上は補題 4.5，基本補題 4.6 と定理 5.2 とから直ちに出る。同じく § 4 の基本補題から出るつぎの命題は，後に利用する機会がある。

Proposition 5.5　変形族 $\tilde{\omega}:\mathcal{V}\to M$ が regular で，M 上の C^∞ tangent vector field $v(t)=\sum_\lambda v^\lambda(t)\dfrac{\partial}{\partial t^\lambda}$ *) に対し，$\rho_t(v(t))=0$ $(\forall t\in M)$ がなりたつとする。Admissible coordinate systems (z_j,t) in $\mathcal{U}_j$ を使うと $\rho_t(v(t))$ は $Z^1(\{\mathcal{U}_j\},\Theta_t)$ の cocycle$\{\theta_{ij}(t)\}$，$\theta_{ij}(t)=\sum_\alpha (v(t)g_{ij}^\alpha(z_j,t))\dfrac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$ で与えられるが，仮設の下に cochain

*) M は十分小さくて，一つの局所座標系 (t) が M 全体で使えるとして述べる。

$\{\theta_i(t)\} \in C^0(\{\mathcal{U}_j\}, \Theta_t)$ が，

$$(5.5)\quad \begin{cases} \delta\{\theta_i(t)\} = \{\theta_{ij}(t)\} \\ \theta_i(t) = \sum \theta_i^\alpha(z_i, t)\dfrac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \\ \theta_i^\alpha(z_i, t) \text{ は } t \text{ について } C^\infty \end{cases}$$

であるように，とれる。

バンドルの変形族$\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$があるとき， fundamental diagram(5.2) から，direct images の間の commutative diagram

$$(5.6)\quad \begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \overset{0}{\uparrow} & & \uparrow & \\ \to & \mathcal{H}^0(\Pi) & \to & T_M & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{H}^1(\Theta) & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \to & \mathcal{H}^0(\Gamma) & \to & T_M & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{H}^1(\Sigma) & \to \\ & \uparrow & & \uparrow & \searrow^{\tau} & \uparrow & \\ \to & \mathcal{H}^0(\Xi) & \to & 0 & \to & \mathcal{H}^1(\Xi) & \to \end{array}$$

ができる。（τ については後出，Prop.5.7の後）．ηが前のρと同じ役割を果す，即ち

定理5.6　$t=0$ においてηがO－写像ならば，0の適当な近傍Uがあって，U上では$\mathcal{P}|U\to\mathcal{V}|U\to U$が trivial である。

補足　$\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \Sigma_t)$ がtによらないなら．すべてのtに対し$\eta_t=0$　から，Mの各点で$\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$が locally trivial となる。

Proposition 5.7　$\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_t, \Sigma_t)$ がtによらず一定なるとき，MのC^∞ tangent vector field $v(t)$ が各tに対し$\rho_t(v(t))=0$をみたすならば，$\eta_t(v(t))$ を代表する1-cocycle $\{\theta_{ij}(t)\}\in Z^1(\{\mathcal{U}_j\}, \Sigma_t)$，（$t$に関し$C^\infty$），に対し$\delta\{\theta_i(t)\}=\{\theta_{ij}(t)\}$なるO-cochain $\{\theta_i(t)\}$ がtに関してC^∞であるようにとれる。

特に定まった複素多様体上のバンドルの変形族の場合，即ち$\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$において，$\mathcal{V}$が trivial な族 $=V\times M$である場合について考えると，当然ρは0であって，(5.6)に破線で示した写像τが定まり，上の結果でηをτでおきかえてよいことになる。

τを定義するには，$\mathcal{V}=V\times M$のため$\Pi\cong\Theta\oplus T$なる canonical decomposition があることを使う。これによって$T\subset\Pi$とみてよい。そこで fundamental diagram (5.2)における写像$\Gamma\to\Pi$におけるTの逆像を$\Gamma'(\subset\Gamma)$とすれば，(5.2)から commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & \to & T & \to & T & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Xi & \to & \Gamma' & \to & T & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \Xi & \to & \Xi & \to & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

がえられる。これによって定義される写像 $T_M\to H^1(\Xi)$ をτとおけばよい。$\mathcal{R}$の transition matrix (4.5)を見れば，$\dfrac{\partial g^{\alpha}_{jk}}{\partial t^{\mu}_{k}}=0$のため，$\mathcal{R}$のベクトル ${}^t(u^a_j,\ \theta^{\alpha}_j,\ v^{\lambda}_j)$において，$\theta^{\alpha}_j=0$なるものが subbundle をなす。この subbundle に対応するΓの subsheaf がΓ'なのである。

§6 変形族の存在について

Vを与えられたコンパクトな複素多様体とするとき，Vを一つのメンバーとするどのような変形族が存在するか？いいかえれば，Vの underlying manifold に，Vのに近い別の複素構造がどれくらい入れうるか？　ということは，変形の理論においては基本的な問題である。しかしこの問題はひどく難しいし，本稿の主目的とは離れているので，ここでは最も基本的な結果（Kodaira–Nirenberg–Spencer [9]）を引用するだけにする。

V_0をコンパクト複素多様体，Θ_0を接バンドルの正則な cross sections の芽の層

とする。Θ_oは Lie algebra の層であるため，コホモロジー加群 $\sum_{q=0}^{\infty} H^q(V_o, \Theta_o)$ はいわゆるgraded Lie algebra の構造をもつ。即ち

$$H^p(V_o, \Theta_o) \times H^q(V_o, \Theta_o) \to H^{p+q}(V_o, \Theta_o)$$

$$(f, \ g) \longrightarrow [f, \ g]$$

なる bilinear map が存在して

$$\begin{cases} [f^p, g^q] = (-1)^{pq+1}[g, f] \\ (-1)^{pr}[[f^p, g^q], h^r] + (-1)^{qp}[[g, h], f] + (-1)^{rq}[[h, f], g] = 0 \end{cases}$$

がなりたつ。(f^p によってfがH^pの元であることを示す)。

我々に必要な部分：$H^1 \times H^1 \to H^2$ だけをみると，V_o の開被覆$\{U_j\}$に関する Θ_o-valued 1-cocycles $\{\theta_{ij}\}, \{\varphi_{ij}\}$ に対し，

$$[\theta, \varphi]_{ijk} = \frac{1}{2}\{[\theta_{ij}, \varphi_{jk}] + [\varphi_{ij}, \theta_{jk}]\}$$

とおくと，これは2-cocycle をなし，そのコホモロジー類はθ，φのそれによって決まる。これが$[\theta, \varphi]$の定義である。

<u>Proposition 6.1</u> $\varpi: \mathcal{V} \to M$が変形族で $V_o = \varpi^{-1}(o)$ がその一つのメンバーであるとき， $\rho_o((T_M)_o) \ni \theta_o, \varphi_o$ ならば$[\theta_o, \varphi_o] = 0$である。

(証明) $(T_M)_o$ の元 v_o に対し，点0での値がv_oであるようなM上のvector fieldをvとする。(Mは必要に応じていくらでも小さくとり直す)。$\rho(v) = \theta$ とする。admissible coordinate neighbourhoods $\{\mathcal{U}_j\}$ による適当な$\mathcal{V}$の被覆をとると，各$\mathcal{U}_j$上で$\pi_j \in \Gamma(\mathcal{U}_j, \Pi)$ があって，$v = j(\pi_j)$ となる。(jは fundamental sequence (5.1) における$\Pi \to T$の写像である)。そしてθは cocycle $\{\theta_{ij}\}, \theta_{ij} = \pi_j - \pi_i$ によって定められる。

$\mu_{ij} = [\pi_i, \pi_j] \in \Gamma(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j, \Pi)$ とおくと，$j^*[\pi_i, \pi_j] = [j^*\pi_i, j^*\pi_j]$

$=[v,v]=0$ のため，$\mu_{ij}\in\Gamma(\mathcal{U}_i,\mathcal{U}_j,\Theta)$．従って$\mu=\{\mu_{ij}\}\in C^1(\{\mathcal{U}_j\},\Theta)$．

$$\begin{aligned}\{\delta\mu\}_{ijk} &= [\pi_j,\pi_k]-[\pi_i,\pi_k]+[\pi_i,\pi_j]\\ &= [\theta_{ij},\pi_k]+[\pi_i,\pi_j]\\ &= [\theta_{ij},\pi_k]-[\theta_{ij},\pi_j]+[\pi_j,\pi_j]\\ &= [\theta_{ij},\theta_{jk}].\end{aligned}$$

従って$[\theta,\theta]=0$となる。 V_o へ制限して$[\theta_o,\theta_o]=0$．

θ_o,φ_o $\rho_o((T_M)_o)$ のとき，$[\theta_o+\varphi_o,\theta_o+\varphi_o]=0$ から，$[\theta_o,\varphi_o]=0$ が えられる。

注意 実際$H^1(V_o,\Theta_o)$ の二元θ，φで$[\theta,\varphi]\neq 0$ となることがある。

定理6.2 コンパクトな複素多様体 V_o が $H^2(V_o,\Theta_o)=0$をみたし，$\dim_{\mathbb{C}}H^1(V_o,\Theta_o)=m$ ならば，$\mathbb{C}^m$における原点0の近傍Mと，複素解析的変形族$\tilde{\omega}$: $\mathcal{V}\to M$とがあつて，

(a) $\tilde{\omega}^{-1}(o)$ は与えられた V_oに他ならず，

(b) ρ_t：$(T_M)_t\to H^1(V_t,\Theta_t)$ は各$t\in M$に対しbijective である。

(c) $\mathcal{V}\to M$は，Mの各点でcomplex analytically complete である。

最後の主張の意味はつぎのようである。

$\tilde{\omega}'$: $\mathcal{W}\to N$を複素解析的な変形族で，$o'\in N$に対し $V'_{o'}=V_t$ であるとすると，Nにおけるo'の近傍からM内への正則な写像hがあつて，$h(o')=t$，そして，$\mathcal{W}$は$V'_{o'}$の近傍ではhによつて$\mathcal{V}$からinduce される。

$H^2(V_o,\Theta_o)=0$なるV_o に対しては，これは完全な結果だといえよう。

§7 変形族における複素構造

C^{∞}な変形族$\widetilde{\omega}$: $\mathcal{V}\to M$が与えられたとき，ある条件の下にはparameter space Mに複素構造が入ることがあり，$\mathcal{V}\to M$が解析的変形族になることがある。この§ではこの種の問題を論ずる。

<u>定理 7.1</u>　$\widetilde{\omega}$: $\mathcal{V}\to M$がコンパクトな複素多様体のregular なC^{∞}変形族で，Mの各点tに対しつぎの条件がなりたつとする。

(i)　$\rho_t : (T_M)_t \to H^1(V_t, \Theta_t)$ は injective である。

(ii)　$\rho_t((T_M)_t)$ は $H^1(V_t, \Theta_t)$ の $\mathbb{C}$-subspace である。

このときMには複素構造があつて，任意の解析的局所座標系$\tau^1, \cdots\cdot, \tau^m$ に対して

$\rho_t\left(\dfrac{\partial}{\partial\bar{\tau}^{\nu}}\right) = 0$　となる。このような複素構造はたゞ一つ決まる。

<u>定理 7.2</u>　regular なC^{∞}変形族$\widetilde{\omega}$: $\mathcal{V}\to M$においてMが複素構造をもち，任意の解析的座標 $t^1, \cdots\cdot, t^m$ に対し，Mの各点で $\rho_t\left(\dfrac{\partial}{\partial\bar{\tau}^{\nu}}\right) = 0$ だとする。このときMの任意の点tに対しその近傍Uがあり，$\mathcal{V}|U$上に複素解析的変形族の構造（CAF構造）で，各 V_tおよびMの複素構造と両立するものが入る。

<u>定理 7.3</u>　前定理の条件の上に，さらに $H^0(V_t, \Theta_t) = 0$　for all $t \in M$ なる条件があれば，前定理にいうCAF構造は一意的である。従つて$\mathcal{V}\to M$全体が複素解析的変形族となる。

<u>注意</u>　$H^0(V_t, \Theta_t) = 0$とは，V_tが正則な自己同型の連続群をもたないことを意味する。

バンドルの変形族に対しても同種の定理がなりたつ。

<u>定理 7.1′</u>　$\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$が，コンパクトな複素多様体上の解析的バンドルの$C^{\infty}$変形族で，dim $H^1(V_t, \Sigma_t)$がtによらず一定であるとする。Mの任意の点tに対し

(i)　$\eta_t : (T_M)_t \to H^1(V_t, \Sigma_t)$はinjective

(ii)　$\eta_t((T_M)_t)$　は $H^1(V_t, \Sigma_t)$の $\mathbb{C}$-subspace

ならば，Mはその解析的局所座標$\tau^1, \cdots, \tau^m$ に関し $\eta_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^\nu}\right)=0$ となるような，ただ一つの複素構造をもつ。

定理 7.2′ $\mathcal{P}\to\mathcal{V}\to M$は解析的バンドルの$C^\infty$変形族でdim $H^1(V_t, \Sigma_t)$は定数であるとする。Mが複素構造をもち，解析的局所座標に対して $\eta_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}^\nu}\right)=0$ がMの各点tでなりたつならば，Mの任意の点に対し，適当なその近傍Uがあつて，$\mathcal{P}|U$上に $P_t\to V_t$ やMの複素構造と両立するCAF構造が入る。

定理 7.3′ 前定理の条件の上に，さらに $H^0(V_t, \Sigma_t)=0$ がなりたつていれば，前定理にいうCAF構造は一意的で従つて$\mathcal{P}$全体で定義される。

定理 7.4 一定の複素多様体上のバンドルの変形族$\mathcal{P}\to V\times M\to M$を考える場合には，定理7.1′～7.3′において$\Sigma_t$を$\Xi_t$で，$\eta_t$を$\tau_t$で，おきかえてえられる命題がなりたつ。

以下定理7.1～7.3を証明する。その他のはこれらの変形にすぎない。

（定理7.1の証明）

仮定からMが偶数次元（$2m$次元）であることは明らかである。Mの座標近傍Uをとり，U上に複素数値局所座標 $t^1, \cdots, t^m$ を入れる。（(t)の実部，虚部がU上のC^∞局所座標であるようにする。） 一方 $H^1(V_t, \Theta_t)$ のC上の基底 $\beta_1(t), \cdots, \beta_k(t)$を，（例えば$\beta$を調和微分式によつて代表させて）$t$に関し$C^\infty$であるようにとる。Regularity からこれは可能である。そうすると，

$$\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}\right)=\sum_s a^s_\lambda(t)\beta_s(t)$$

$$(a^s_\lambda, b^s_\lambda \text{は} t \text{の} C^\infty \text{函数})$$

$$\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^\lambda}\right)=\sum_s b^s_\lambda(t)\beta_s(t)$$

とかける。今 $\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}\right)$ $\lambda=1, 2, \cdots, m$ が $\rho_t((TM)_t)$ の$\mathbb{C}$-basis をなすようにとつておくと，

$$\rho_t\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^{\mu}}\right)=\sum_{\lambda=1}^{m} h_{\bar{\mu}}^{\lambda}(t)\ \rho_t\left(\frac{\partial}{\partial t^{\lambda}}\right) \qquad (h\text{は}C^{\infty}\text{函数})$$

とかける。そこで

$$\omega^{\lambda}=d\,t^{\lambda}+\sum_{\mu} h_{\bar{\mu}}^{\lambda}(t)\,d\,\bar{t}^{u} \qquad (\lambda=1,\cdots\cdots,m)$$

とおき，これによつて，（即ち，これらのＰｆａｆｆ　形式が型（1.0）の微分式の基底をなすと定めて）Uに概複素構造（ＡＣ構造）を入れる。この入れ方は要するに $\rho_t((T_{\mathrm{M}})_t)$ の複素構造を $(T_{\mathrm{M}})_t$ にうつすということに他ならないから，ｌｏｃａｌｌｙ　に定義したＡＣ構造は実はM全体で定義されている。

このＡＣ構造の積分条件は

$$d\omega^{\lambda}\equiv o \quad (\omega^{1},\cdots,\omega^{n}).$$

であるが，ＡＣ構造の入れ方から積分条件は各点ごとに任意の複素数値局所座標系について示せば十分である。それ故与えられた点 t_o において$h_{\bar{\mu}}^{\lambda}(t_o)=o$ と仮定してよい。そうすると証明すべき式は

$$\left(\frac{\partial h_{\bar{\mu}}^{\lambda}}{\partial \bar{t}^{\nu}}\right)_{t=t_o}-\left(\frac{\partial t_{\bar{\nu}}^{\lambda}}{\partial \bar{t}^{\mu}}\right)_{t=t_o}=o$$

となる。

Ａｄｍｉｓｓｉｂｌｅ　ｃｏｏｒｄｉｎａｔｅ　(z_j,t)と，その間の変換式 $z_j^{\alpha}=g_{jk}^{\alpha}(z_k,t)$ を利用する。（(t) は共通であるとしてよい。）

$$\begin{cases} \theta_{jk|\bar{\mu}}^{\alpha}(z_k,t)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\mu}}\ g_{jk}^{\alpha}(z_k,t) \\[2ex] \theta_{jk|\bar{\mu}}^{\alpha}(z_k,t)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\mu}}\ g_{jk}^{\alpha}(z_k,t) \\[2ex] \theta_{jk|\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\alpha}(z_k,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial \bar{t}^{\mu}\partial \bar{t}^{\nu}}\ g_{jk}^{\alpha}(z_k,t) \end{cases}$$

とおく。（明示した変数を独立変数として考えている。）

$\rho_t\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\mu}}\right)=\sum_{\lambda} h^{\lambda}_{\bar{\mu}}(t)\,\rho_t\left(\dfrac{\partial}{\partial t^{\lambda}}\right)$ のため，これらを表わす

1-cocycles $\{\theta_{jk|\bar{\mu}}\}$, $\{\theta_{jk|\lambda}\}$ に対して

$$(*)\quad \theta^{\alpha}_{jk|\bar{\mu}}(z_k, t)=\sum_{\lambda} h^{\lambda}_{\bar{\mu}}(t)\ \theta^{\alpha}_{jk|\lambda}(z_k, t)$$
$$+\sum_{\beta}\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\ \varphi^{\beta}_{k|\bar{\mu}}(z_k, t)-\varphi^{\alpha}_{j|\bar{\mu}}(z_j, t)$$

なる関係をみたす 0-cochain $\{\varphi_{j|\bar{\mu}}\}$ がある。変形族が regular であるから，Prop.5.5. により $\varphi_{j|\bar{\mu}}$ はtについてC^{∞}であるようにとれる。

(*) に対して z_k, tを独立変数として $\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\nu}}$ を施し，$t=t_o$とおく。記号

$$\begin{cases}\varphi^{\alpha}_{j|\bar{\mu}\bar{\nu}}(z_j, t)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\nu}}\ \varphi^{\alpha}_{j|\bar{\mu}}(z_j, t)\\[2ex] h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(t)=\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}^{\nu}}\ h^{\lambda}_{\bar{\mu}}(t)\end{cases}$$

を用いると

$$\theta^{\alpha}_{jk|\bar{\mu}\bar{\nu}}=\sum_{\lambda} h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\theta^{\alpha}_{jk|\lambda}+\sum_{\beta}\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\varphi^{\beta}_{k|\bar{\mu}\bar{\nu}}-\varphi^{\alpha}_{j|\bar{\mu}\bar{\nu}}$$
$$+\sum_{\beta}\varphi^{\beta}_{k|\bar{\mu}}\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{k}}\left(\theta^{\alpha}_{jk|\bar{\nu}}\right)-\sum_{\beta}\theta^{\beta}_{jk|\bar{\nu}}\ \frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{j}}\ \varphi^{\alpha}_{j|\bar{\mu}}.$$

一方 (*) において$t=t_o$とおくと

$$\theta^{\alpha}_{jk|\nu}\ (t_o)=\sum\frac{\partial z_j{}^{\alpha}}{\partial z_k{}^{r}}\ \varphi^{r}_{k|\bar{\nu}}-\varphi^{\alpha}_{j|\bar{\nu}}.$$

従って$t=t_o$ で

$$\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{k}}\theta^{\alpha}_{jk|\bar{\nu}}=\sum_{r}\frac{\partial^2 z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}\partial z^{r}_{k}}\ \varphi^{r}_{k|\bar{\nu}}+\sum_{r}\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{r}_{k}}\ \frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{k}}\varphi^{r}_{k|\bar{\nu}}$$

$$-\sum_{\gamma}\frac{\partial z^{\gamma}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\quad\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}_{j}}\quad\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\nu}$$

$$\therefore\quad \theta^{\alpha}_{jk}|\bar{\mu}\bar{\nu}=\sum_{\lambda}h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\theta^{\alpha}_{jk}|\lambda+\{\sum_{\beta}\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\quad\varphi^{\beta}_{k}|\bar{\mu}\bar{\nu}-\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\mu}\bar{\nu}\}$$

$$+\sum\frac{\partial^{2}z_{j}^{\alpha}}{\partial z^{\beta}_{k}\partial z^{\gamma}_{k}}\;\varphi^{\beta}_{k}|\bar{\mu}\;\;\varphi^{\gamma}_{k}|\bar{\nu}$$

$$+\sum\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\gamma}_{k}}\varphi^{\beta}_{k}|\bar{\mu}\;\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{k}}\;\;\varphi^{\gamma}_{k}|\bar{\nu}\;-\sum\varphi^{\beta}_{k}|\bar{\mu}\;\frac{\partial z^{\gamma}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\;\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}_{j}}\;\;\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\nu}$$

$$-\sum\frac{\partial z^{\gamma}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\varphi^{\beta}_{k}|\bar{\nu}\;\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}_{j}}\;\;\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\mu}\;+\;\sum\varphi^{\beta}_{j}|\bar{\nu}\;\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{j}}\;\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\mu}$$

μ,νを入れかえてひくと

$$o=\sum_{\lambda}\;(h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}-h^{\lambda}_{\bar{\nu}\bar{\mu}})\;\theta^{\alpha}_{jk}|\lambda\;\;+\;\{\sum_{\beta}\frac{\partial z^{\alpha}_{j}}{\partial z^{\beta}_{k}}\;\zeta^{\beta}_{k}-\zeta^{\alpha}_{j}\}$$

となる。ここに $\zeta^{\alpha}_{j}=\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\mu}\bar{\nu}-\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\nu}\bar{\mu}\;+\;\sum_{\beta}\varphi^{\beta}_{j}|\bar{\mu}\;\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{j}}\;\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\nu}\;-$

$\sum_{\beta}\varphi^{\beta}_{j}|\bar{\nu}\;\frac{\partial}{\partial z^{\beta}_{j}}\;\varphi^{\alpha}_{j}|\bar{\mu}.$

上式{ }内は coboundary だから，これから

$$\sum_{\lambda}(h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(t_{o})-h^{\lambda}_{\bar{\nu}\bar{\mu}}(t_{o}))\;\rho_{t_{o}}\;(\frac{\partial}{\partial t^{\lambda}})=o$$

従つて

$h^{\lambda}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(t_{o})-h^{\lambda}_{\bar{\nu}\bar{\mu}}(t_{o})=o$ である。

定理7.2の証明のため，つぎの補題を使う。

補題7.5　コンパクトなC^{∞}多様体X上に，領域Dをうごくパラメーター s に関してC^{∞}又

は正則なAC構造の族が与えられ，それぞれ積分可能とする。このときXの十分細い開被覆$\{U_j\}$（Dの方も必要に応じ制限して）U_jにおける解析的局所座標$\zeta_j^\alpha=\zeta_j^\alpha(z_j^1,\cdots,z_j^n,s)$（$\alpha=1,\cdots,n$）が，$s$に関し$C^\infty$又は正則であるようにとれる。

（証明）　XのAC構造は，U_jにおける型（1.0）の微分式の基底（$\omega^1,\cdots,\omega^n$）を与えることによつて決められる。補題の条件はω^αが（Xの複素数値座標（z_j）とsとについて書き表わした時）sについてC^∞又は正則であることを意味する。

微分可能性については Newlander–Nirenberg [13] の最後の statement による。正則性については，$X\times D$上でAC構造（$\omega^\alpha, ds^\lambda$）を考えれば，$\omega^\alpha$が$s$に関し正則なことから，このAC構造が積分可能で，正則局所座標（$\zeta_j^\alpha(z_j,s), s^\lambda$）をもつ。$d\zeta_j^\alpha\equiv 0$（$\omega^\beta, ds^\lambda$）から$\partial\zeta_j^\alpha/\partial\bar{s}^\lambda=0$　がわかる。

（定理7.2，7.3の証明）

小さな近傍U（$\subset M$）をとり，その上で考える。

$\rho_t(\frac{\partial}{\partial\bar{t}^\lambda})=0$のため，$\frac{\partial}{\partial\bar{t}^\lambda}g_{jk}^\alpha(z_k,t)=\sum_\beta\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta}\varphi_{k\lambda}^\beta(z_k,t)-\varphi_{j\lambda}^\alpha(z_j,t)$

であるような$\{\varphi_{j\lambda}^\alpha\}$がとれる。これは$z_j$については当然正則だが，変形族の regularity のため，tについてもC^∞にとれる。そこで

$$\varphi_j^\alpha=\sum_\lambda\varphi_{j\lambda}^\alpha(z_j,t)\ d\bar{t}^\lambda$$

とおけば

$$(7.1)\qquad \sum_\lambda\frac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k,t)}{\partial\bar{t}^\lambda}d\bar{t}^\lambda=\sum_\beta\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta}\varphi_k^\beta-\varphi_j^\alpha$$

がなりたつ。そこで

$$(7.2)\qquad \omega_j^\alpha=dz_j^\alpha+\varphi_j^\alpha$$

とおくと，$\omega_j^\alpha=\sum_\beta\frac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta}\omega_k^\beta+\sum_\lambda\theta_{jk|\lambda}^\alpha dt^\lambda$　がなりたつ。従つて

(7.3)　　$(\omega_j^1, \cdots, \omega_j^n, dt^1, \cdots, dt^m)$

で決る$\mathcal{U}_j$上のAC構造は，$\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$上では$\mathcal{U}_k$上の同様なAC構造と一致し，$\mathcal{V}|U$全体にAC構造をあたえる。

このAC構造が，各 V_tおよびMの複素構造と両立することは明らかである。また後者の性質をもつAC構造は（7.1），（7.2）をみたすようなω_j^αによつて，（7.3）の形に与えられることもすぐわかる。

我々は（7.2）おけるφを適当に調節することによつて，（7.3）が積分可能になることを示そう。条件（7.1）のため，φの任意性は $\psi_j^\alpha(z_j, t) = \sum_\beta \dfrac{\partial z_j^\alpha}{\partial z_k^\beta} \psi_k^\beta(z_k, t)$ なるψをとつて $\varphi_j^\alpha \to \varphi_j^\alpha + \psi_j^\alpha$ と変換するだけしかない。これによつて $H^o(V_t, \Theta_t) = o$ のとき，CAF構造の一意性がわかる。

証明はMの次元mに関する帰納法による。

（a）　$m=1$のときには，積分条件はtrivially になりたつ。

（b）　$m-1$のとき定理がなりたつとして，mのときを考える。t^mをパラメーターとして固定して考えると，帰納法の仮定により$\mathcal{V}|U_{t^m}$（U_{t^m}は$t^m=\mathrm{const}$によるUの断面）にCAF構造が入る。それに関するadmissible coordinates を$(\zeta_j^\alpha, t^\lambda)_{\lambda=1,\cdots,m-1}$とすれば，$\zeta_j^\alpha$は$C^\infty$変形族としてのもとのadmissible coord. $(z_j^\alpha, t^\lambda)_{\lambda=1,\cdots\cdots,m}$につき$C^\infty$である。そして

(7.4)　　$\zeta_j^\alpha = g_{jk}^\alpha(\zeta_k, t^1 \cdots\cdots t^{m-1}, t^m)$，

ここに g_{jk}^α はζ_k，$t^1 \cdots\cdots t^{m-1}$ について正則である。

$(\zeta_j, t^1 \cdots\cdots t^m)$ はC^∞変形族としてのadmissible coordinate である。これに関して（7.1）をみたすφを作る。$\varphi_{j\lambda}^\alpha = o$（$\lambda = 1, \cdots\cdots, m-1$）ととつてよい。さらに

（§）　φ_{jm}^α は $t^1 \cdots t^{m-1}$ に関しては正則にとれる。

実際

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}^m} g^{\alpha}_{jk}\ (\zeta_k, t) = \sum_{\beta} \frac{\partial \zeta^{\alpha}_j}{\partial \zeta_k{}^{\beta}}\ \varphi^{\beta}_{km} - \varphi^{\alpha}_{jm}$$

に $\dfrac{\partial}{\partial\bar{t}^{\lambda}}(\lambda=1,\cdots,m-1)$ を施すと，（（7.4）が $t^1\cdots\cdot t^{m-1}$ につき正則なため，(ζ_j, t)，(ζ_k, t) のどちらを独立変数にとるかに関係なく，$\dfrac{\partial}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$ の意味は定まる。）

$$\frac{\partial\zeta_j{}^{\alpha}}{\partial\zeta_k{}^{\beta}}\ \frac{\partial\varphi_{km}{}^{\beta}}{\partial\bar{t}^{\lambda}} - \frac{\partial\varphi_{jm}{}^{\alpha}}{\partial\bar{t}^{\lambda}} = 0$$ となる。即ち

$$\Psi_{\lambda} = \{\frac{\partial\varphi_{jm}{}^{\alpha}}{\partial\bar{t}^{\lambda}}\} \in H^o\ (V_t, \Theta_t)$$

変形族 $\mathcal{V}\to M$ の regularity と基本補題 4.7，4.8 とから $H^o\ (V_t, \Theta_t)$ の基底 $(\Phi_1(t), \cdots, \Phi_r(t))$ が，$t^1, \cdots, t^{m-1}$ については正則，t^m についても C^{∞} であるようにとれる。（必要なら U を小さくとり直す）。そこで

$$\Psi_{\lambda}(t) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu\lambda}(t)\cdot\Phi_{\nu}(t) \qquad \alpha_{\nu\lambda}(t) \text{ は } C^{\infty}$$

とかく。作り方から $\partial\Psi_{\lambda}/\partial\bar{t}^{\mu} = \partial\Psi_{\mu}/\partial\bar{t}^{\lambda}$ $(\lambda, \mu<m)$ だから，$\dfrac{\partial\alpha_{\nu\lambda}}{\partial\bar{t}^{\mu}} = \dfrac{\partial\alpha_{\nu\mu}}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$ がなりたつ。U_{t^m} は $\mathbb{C}^{m-1}$ の poly-cyclinder と考えてよいから，C^{∞} 函数 $\beta_{\nu}(t)$ があつて，$\alpha_{\nu\lambda}(t) = \dfrac{\partial\beta_{\nu}(t)}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$ $(1\leqq\lambda\leqq m,\ 1\leqq\nu\leqq r)$ となる。そうすると φ^{α}_{jm} を $\varphi^{\alpha}_{jm} - \sum_{\nu}\beta_{\nu}\Phi^{\alpha}_{\nu j}$ でおきかえれば（§）がなりたつ。

これができた以上 $(\omega^1, \cdots, \omega^n, dt^1, \cdots, dt^m)$ が積分可能なことは（a）の場合同様自明である。

第三章　代数曲線上の解析的構成

§8　Picard 多様体再論

この§では，コンパクトなkähler 多様体VのPicard 多様体Mを考える。MがV上のある種の複素直線バンドルの族のparameter　space とみなしうることは，§3で見た所であるが，それに対し第二章の定理を適用したい。

$\widetilde{V}=V$の普遍被覆空間

$\pi=\widetilde{V}\to V$の被覆写像

$\overline{A}=\{\overline{\alpha}\mid\alpha$は$V$上の1次第一種微分式，$\overline{\alpha}$はその共役$\}$

$D=\{\overline{\alpha}\in\overline{A}\mid\int_{\gamma}(\overline{\alpha}-\alpha)\equiv 0\ (2\pi\sqrt{-1}\,\mathbb{Z})$ for $\gamma\in H_1(V,\mathbb{Z})\}$

とおくと，$M=\overline{A}/D$ である。

Vの基本群をΠとすれば，（Mの基本群はDであるから）$X=V\times M$の基本群は$\Delta=\Pi\times D$である。そこで

$$f(\widetilde{z},\overline{\alpha},\sigma,\overline{\delta})=\exp\left\{\int_{C(\sigma)}(\overline{\alpha}+\overline{\delta})+\int_{\widetilde{0}}^{\widetilde{z}}\pi\delta\right\}$$

とおくと，fは$\widetilde{X}\times\Delta\to\mathbb{C}^*$の複素解析的なfactor である。（ここに$\widetilde{0}$は$\widetilde{V}$の定点，$C(\sigma)$は$\sigma\in\Pi$の定める$V$の1次元ホモロジー類である。）これに対して，$V\times M$上の複素直線バンドル$\mathcal{B}$ができる。　$\mathcal{B}\to V\times M\to M$は$M$でparametrize された$V$上の複素直線バンドルの解析的変形族とみてよい。

Mの点t（およびその上にある$\overline{A}$の点$\overline{\alpha}$）をきめれば，複素直線バンドル$B_t\to V$は，$f(\widetilde{z},\overline{\alpha};\sigma,0)=\exp(\int_{C(\sigma)}\overline{\alpha})$なるfactor（実は$\Pi\to\mathbb{C}^*$の表現）に対応するバンドルに他ならない。

第二章におけるformulation とあわせるため$\mathcal{B}$を表わすtransition function を求めておく：

$V\times M$の十分細かい単純被覆$\{\mathcal{U}_j\}$をとり，*）$\widetilde{V}\times\overline{A}\to V\times M$における$\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)$の連結成分の一つ$\widetilde{\mathcal{U}}_j$をきめる。$\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k\ni(z,t)$のとき，$(z,t)$の逆像$(\widetilde{z}_j,\overline{\alpha}_j)\in\widetilde{\mathcal{U}}_j$と$(\widetilde{z}_k,\overline{\alpha}_k)\in\widetilde{\mathcal{U}}_k$との間には

$$\tilde{z}_k=\tilde{z}_j\cdot\sigma_{jk} \qquad \overline{\alpha}_k=\overline{\alpha}_j+\overline{\varepsilon}_{jk}$$

なる関係があり，σ_{jk}，ε_{jk} は j，k だけで決まる。

$\mathcal{B}$ の定義にあらわれる同値関係は

$$(\tilde{z}_j,\overline{\alpha}_j,\tilde{\xi}_j)\sim(\tilde{z}_k,\overline{\alpha}_k,\xi_k)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \xi_k=f(\tilde{z}_j,\overline{\alpha}_j;\sigma_{jk},\overline{\varepsilon}_{jk})^{-1}\xi_j.$$

であるから，$\mathcal{B}$ は $\{\mathcal{U}_j\times\mathbb{C}\}$ $j=1,2,\cdots\cdots\cdots$ を

$$\begin{cases} \xi_j=f_{jk}(z,t)\cdot\xi_k \\ f_{jk}(z,t)=f(\tilde{z}_j,\overline{\alpha}_j;\sigma_{jk},\overline{\varepsilon}_{jk}) \end{cases}$$

によつて結びつけてえられる。

$t\in M$ とその上の $\overline{\alpha}$ とを決めて B_t について考える。$U_j=\mathcal{U}_j\cap(V\times t)$ を V の開集合とみて，U_j 内に定点 A_j を，また $U_j\cap U_k\neq\phi$ なるとき，その中に定点 A_{jk} をとる。$\tilde{A}_j=\pi^{-1}(A_j)\cap\tilde{\mathcal{U}}_j$，$\tilde{A}_{jk}=\pi^{-1}(A_{jk})\cap\mathcal{U}_j$ $\tilde{A}'_{jk}=\pi^{-1}(A_{jk})\cap\tilde{\mathcal{U}}_k$ とおく。

$$\int_{C(\sigma_{jk})}^{a}\overline{\alpha}=\int_{\tilde{A}_{jk}}^{\tilde{A}'_{jk}}\overline{\alpha}\,, \qquad \int_{A_j}^{A_k}\overline{\alpha}=\int_{\tilde{A}_j}^{\tilde{A}_{jk}}\overline{\alpha}+\int_{\tilde{A}'_{jk}}^{\tilde{A}_k}\overline{\alpha}$$

のため

$$\int_{A_j}^{A_k}\overline{\alpha}+\int_{C(\sigma_{jk})}\overline{\alpha}=\int_{\tilde{A}_j}^{\tilde{A}_k}\overline{\alpha}=\int_{\tilde{B}}^{\tilde{A}_k}\overline{\alpha}-\int_{\tilde{B}}^{\tilde{A}_j}\overline{\alpha}$$

（$\tilde{B}$ は $\tilde{V}$ の定点）となる。これは B_t が transition function $\exp(\int_{C(\sigma_{jk})}\overline{\alpha})$ ででも，$\exp(-\int_{A_j}^{A_k}\alpha)$ ででも，与えられることを示している。

さて変形族 $\mathcal{B}$ に定理7.1′ 7.2′ を適用してみよう。考えている群は $\mathbb{C}^*$ であるから，そのLie algebra は $\mathbb{C}$ であり，adjoint operation はtrivial である。従つて t の如何にかゝわらず $\Xi=\Omega$（V 上の正則函数芽の層）である。$\overline{A}$ の基底 $\overline{\omega}_1,\cdots\cdots,\overline{\omega}_q$ をとり，$\overline{A}$ の元を $\overline{\alpha}=\Sigma t_\lambda\overline{\omega}_\lambda$ とあらわすと，M の点 $t_0=(t_{0\lambda})$ の近傍では $u_\lambda=t_\lambda-t_{0\lambda}$ が局所座標をなし，M の接ベクトル $\frac{\partial}{\partial u^\lambda}$ に対して $\tau_{t_0}(\frac{\partial}{\partial u^\lambda})$ は1-cocycle

$$\theta_{jk\lambda}=\frac{\partial}{\partial u^\lambda}\log\exp(\int_{A_j}^{A_k}\sum_\lambda(t_{0\lambda}+u_\lambda)\overline{\omega}_\lambda)=\int_{A_j}^{A_k}\overline{\omega}_\lambda$$

によつて与えられる。従つてτ_{t_0}は$(T_M)_{t_0}$を

$H^1(V,\Xi)$にisomorphicに写す。$\tau_{t_0}(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\lambda})=0$ も明らかである。

どうせ$\mathcal{B}$は複素解析族なのだから，定理7.1′を適用するまでもないのだが，"Picard多様体に与えた複素構造はこの意味で自然なものである"ということがこれから判る。

$H^0(V,\Xi)\cong \mathbb{C}^q$のため，定理7.3′は適用できない。

実はPicard多様体の基本性質として，つぎの命題がなりたつ。

Proposition 8.1　$\mathcal{B}'\to V\times N\to N$を$V$上の複素直線バンドルの任意の変形族とする。このとき写像$f:N\to M$があつて，Nの任意の点sに対して$B'_s=B'_{s_0}\otimes B_{f(s)}$となる。(即ち本質的には$\mathcal{B}'$は$\mathcal{B}$によつてinduceされる。$f$は$\mathcal{B}'$とともに$C^\infty$又はholomorphicである。

(証明) Vの十分こまかい単純被覆$\{U_j\}$に関しB'_sのtransition functionを$g_{jk}(x,s)$とする。$g_{jl}(x,s)=g_{jk}(x,s)\cdot g_{kl}(x,s)$のため

$$c_{jkl}(s)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\log g_{jk}+\log g_{kl}+\log g_{lj})$$

は整数であつて，cocycle$\in Z^2(\{U_j\},\mathbb{Z})$を定める。(そのコホモロジー類が$B_s$のChern classである。$c_{jkl}(s)$は$s$に関し連続でなければならないから実は一定である。従つて$h_{jk}(x,s)=g_{jk}(x,s)\,g_{jk}(x,s_0)^{-1}$で定められるバンドル$B'_s\otimes(B'_{s_0})^{-1}$に対しては$\log h_{jk}(x,s)$の分枝の適当なえらび方によつて

$$\log h_{jk}+\log h_{kl}+\log h_{lj}=0$$

とできる。C^∞函数による1の分割：$1=\Sigma\varphi_j(x)$，φ_jのCarrier$\subset U_j$をとつて

$\xi_k(x)=\sum_j\varphi_j(x)h_{jk}(x)$ とおくと，$\xi_k(x)$はU_kにおけるC^∞函数であつて，

$$\xi_k(x)-\xi_j(x)=h_{jk}(x)\qquad \text{in}\ U_j\cap U_j$$

従つて，$d''\xi_j(x)=d''\xi_k(x)$となり，$\psi=d''\xi_j$はV上で大域的に定義されたd''－closedな微分式である。調和微分式の理論により，

---

*) $U_{j0}\cap\cdots\cdots\cap U_{jq}\neq\phi$なら，この集合が一点にcontractibleなこと。U_jが十分細いとはこの際$\pi^{-1}(U_j)$の連結成分がπによつてU_jにhomeomorphicなことを意味する。(p.38への註)

$$\psi=\overline{\alpha}+d''\beta,\ \overline{\alpha}\in\overline{A},\ \beta \text{は} V \text{上の} C^{\infty} \text{函数}.$$

写像 f を $N\ni s\to\overline{\alpha}\,(\mathrm{mod}\,D)\in M$ と定めると，一方では $B'_s\otimes(B'_{s_0})^{-1}=B_{f(s)}$

他方 $s\to g_{jk}(x,s)\to\xi_j(x,s)\to\psi\to\overline{\alpha}$ なる対応は，最初の対応が C^{∞} 又は正則であるに従つて C^{∞} 又は正則である（$\psi\to\alpha=H\psi$ の対応は積分作用素である。　附録 §D）

注意　V 上のバンドルの"連続な変形族"を考えれば，それは M への連続写像 f によつて induce されることもすぐわかる。

§9　代数曲線上のアフイン直線バンドルの族

1° アフインバンドル．複素直線 $\mathbb{C}$ に作用するアフイン変換の群を G とする G の元は，$A=\begin{pmatrix} b & c\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ なる行列であらわされ，$\zeta\in\mathbb{C}$ に対して $\zeta\to b\zeta+c$ と作用する。代数曲線 Γ が与えられたとき，$\mathbb{C}$ をフアイバー，Gを構造群とする Γ 上の解析的バンドルの変形族と考えよう。

このような一つのバンドル E が，Γ の単純被覆 $\mathfrak{U}=\{U_j\}$ に関し，transition matrices $\{A_{jk}\}$, $A_{jk}=\begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ で与えられているとする。このとき $\{b_{jk}\}$ は Γ 上の複素直線バンドル B を定める。$\{c_{jk}\}$ の方は

$$c_{jl}=c_{jk}+b_{jk}c_{kl}$$

なる関係をみたすから，1－cocycle $\in Z^1(\mathfrak{U},\Omega(B))$ を与える。　そのコホモロジー類

$\gamma\in H^1(\Gamma,\Omega(B))$ が0ならば，E は正則な cross section をもち，各フアイバー上で原点をその cross section の値へうつす平行移動を行うことによつて，E は複素直線バンドル B に帰着する。$\gamma\neq 0$ の場合について考えると，0でない定数 d があつて，$\gamma'=d\cdot\gamma$ なるとき，そのときに限り，γ と γ' とは同一のバンドル E を定める。

何故なら transition matrices の系 $\left\{\begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ と $\left\{\begin{pmatrix} b_{jk} & c'_{jk}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ とが同値であるためには U_j で正則な行列 $\begin{pmatrix} d_j & e_j\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ があつて，$U_j\cap U_k$ で

$$\begin{pmatrix} b_{jk} & c_{jk}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_j & e_j\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_{jk} & c'_{jk}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_k & e_k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となることが必要かつ十分である。これから

$$\begin{cases} d_j=d_k \\ c_{jk}=d_j^{-1}(c'_{jk}-e_k+b_{jk}e_h)\end{cases}$$

$d_j = d_k = d$ は，Γ全体での正則函数で0にならないから，0でない定数である。第二式は $r \doteqdot d \cdot r$ をあらわす。

これから，一つのBをきめれば，これに対応するE（でBにreduceできないもの）の全体は$\{H^1(\Gamma, \Omega(B)) - (0)\}/C^*$なる射影空間の点で，自然に代表されることがわかる。

2° $H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$の作るバンドル・ΓのJacobi 多様体Jの点tであらわされる複素直線バンドルB_tに対応し，しかもB_tにreduceしないようなEについて考える。それらの全体をみるためには $\bigcup_{t \in J} H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$ を考察しなければならない。Riemann-Rochの定理により（B_tのChern classは0である。即ちB_tはdegree 0の因子で定められている）

$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\Gamma, \Omega(B_t)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = -(g-1)$

よつて$t=0$（B_tが直積バンドル）のとき，$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = g$，他のときは$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\Gamma, \Omega(B_t)) = g-1$となる。そこで$t_0 \neq 0$なる点$t_0$の近傍で，$H^1(\Gamma, \Omega(B_t))$の基底を$t$について$C^\infty$になるようにとることを試みる。それには$\Gamma$にKählermetricを入れ，$B_t$-valued 微分式の空間にもmetricを入れて，調和微分式を考える。

Γ上の第一種微分の基底$(\omega_1, \cdots\cdots \omega_g)$で，$\int_\Gamma \omega_\lambda \wedge \overline{\omega_\mu} = \delta_{\lambda\mu}$をみたすものをとつておく。$\Gamma$の単純被覆$\{U_j\}$をとり，$U_j$内に定点$a_j$をきめると，$B_t$のtransition functionは

(9.1) $$b_{jk}(t) = \exp\left(-\int_{a_j}^{a_k} \sum_\lambda (t_\lambda \overline{\omega}_\lambda - \overline{t}_\lambda \omega_\lambda)\right)$$

で与えられる。（§8における$\overline{A}$の基底として$(\overline{\omega}_\lambda)$をとり$\overline{A}$の座標$(t_\lambda)$によつて$J$の点$t$をきめている）

(9.2) $$\sigma_j(x) = \exp\left(\int_{a_j}^{x} \sum (t_\lambda \overline{\omega}_\lambda - \overline{t}_\lambda \omega_\lambda)\right) \qquad x \in U_j$$

とおけば

$$b_{jk}(t) = \sigma_j(x)^{-1} \sigma_k(x)$$

さてB_t-valued 微分式$\{\psi_j\}$ $\psi_j = b_{jk}(t)\psi_k$を考える。$|b_{jk}| = 1$だから，内積は$\int_\Gamma \psi_j \wedge * \overline{\psi_j}$によつてきめればよい。$\{\psi_j\}$が型(1，0)のとき$\{\varphi_j\}$，$\varphi_j = \psi_j^+ = -\sqrt{-1}\,\overline{\psi}_j$（§E参照）を考えると，これは型(1，0)の

B_{-t} －valued 微分式である。

$\{\psi_j\}$ が調和的であることは $\{\varphi_j\}$ が調和的であるのと同値で，それは $d''\varphi_j=0$ であらわされる。

$U_j\cap U_k$ で $\varphi_j=b_{jk}(t)^{-1}\varphi_k$ だから，$\sigma_j^{-1}\varphi_j=\sigma_k^{-1}\varphi_k$．これで決る Γ 全体での微分式を φ とおくと，条件 $d''\varphi_j=0$ は

$$d''\varphi+e\,(\sum_\lambda t_\lambda\overline{\omega}_\lambda)\,\varphi=0 \tag{9.3}$$

となる。ここに $e(\alpha)$ は，微分式 φ にその左から微分式 α をかけるという演算をあらわす。

今 $t_0=(t_{0\lambda})\in\overline{A}$ を，J の 0 に対応しない定点とすれば，その近傍で (9.3) の解は t について正則であるようにとれる。$\dim H^0(\Gamma,\Omega^1(B_t))=g-1$ ($t\neq 0$) だから，このことは基本補題 4.8 として判つていることであるが，直接にみるにはつぎのようにすればよい；

Γ 上の微分式の線型空間において内積 $(\varphi,\varphi')=\int_\Gamma\varphi\wedge *\overline{\varphi'}$ を考える。微分作用素 $d''(t_0)=d''+e\,(\sum t_{0\lambda}\overline{\omega}_\lambda)$ およびその adjoint $\delta''(t_0)$ を考え，

$\Box(t_0)=d''(t_0)\delta''(t_0)+\delta''(t_0)d''(t_0)$ を考えると，これに対しても調和微分式に関する基本定理（§C）がなりたち，特に Green の作用素 $G(t_0)$ が存在する。

$\tau_\lambda=t_\lambda-t_{0\lambda}$ とおくと，

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigl(-G(t_0)\delta''(t_0)e(\sum_\lambda\tau_\lambda\overline{\omega}_\lambda)\Bigr)^k\varphi(t_0) \tag{9.4}$$

で与えられる $\varphi(t)$ は (9.3) をみたす。ここに $\varphi(t_0)$ は $t=t_0$ に対する (9.3) の一つの解である。実際 $t_0\neq 0$ (in J) のため，$\Box(t_0)$ についての型 (1.1) の調和微分式は 0 以外に存在しない。そこで (9.4) が十分小さな $|\tau|$ に対して都合のよい収束性をもつことを示せば，項別微分によつて (9.4) が (9.3) の解なることがわかる。収束性については略する。（Nakano [10] 参照）

$H^0(\Gamma,\Omega^1(B_{-t_0}))$ の基底 $\{\varphi^{(\mu)}(t_0)\}\ \mu=1,\cdots\cdots,g-1$ から出発して，(9.4) により $\{\varphi^{(\mu)}(t)\}$ を作れば，t_0 の近傍では t について正則な $H^0(\Gamma,\Omega(B_{-t}))$ の基底の族がえられる。従つて $J'=J-(0)$ とおけば $\bigcup_{t\in J'}H(\Gamma,\Omega(B_{-t}))$ は J' 上の解析的ベクトル・バンドルをなす。（$H^0(\Gamma,\Omega^1(B_{-t}))$ が t 上のファイバーである。）

$\bigcup_{t\in J'}H^1(\Gamma,\Omega(B_t))$ は，このバンドルに双対的なバンドルとして，やはり J' 上の解析的ベクトル・バンドルをなすはずである。基底の族 $\{\varphi^\mu(t)\}$ に対して

$h_{\mu\nu}(t)=(\varphi^{(\mu)}(t),\varphi^{(\nu)}(t))$ とおき，$\psi^{(\mu)}(t)=\sum_{\nu} h_{\mu\nu}(t)\,\varphi^{(\nu)}(t)$ を $H^1(\Gamma,\Omega(B_t))$ の基底の族としてとるとよい。$\{\varphi(t)\}$ の基底のとりかえが行列 $G(t)$ によつて行われるとき，$\{\psi(t)\}$ のとりかえは ${}^tG^{-1}$ によつて行われる。

$\bigcup_{t\in J} H'(\Gamma,\Omega(B_t))=Y'$ とかくことにする。

3° アフイン・バンドルの族 $H^1(\Gamma,\Omega(B_t))$ の基底 $\{\psi^{(\mu)}(x,t)\}$ をきめると Y' の元 ψ は $\psi(x,t,s)=\sum_{\mu=1}^{q} s_\mu \psi^{(\mu)}(x,t)$ とかける。この $\psi\ (\mathrm{mod}.C^*)$ に対してアフイン・バンドル E が一つきまる。それは transition matrix では

$$A_{jk}(t)=\begin{pmatrix} b_{jk}(t) & c_{jk}(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

$$\left\{\begin{aligned} b_{jk}(t)&=\exp\left(-\int_{a_j}^{a_k} \Sigma(t_\lambda\overline{\omega}_\lambda-\overline{t}_\lambda\,\overline{\omega}_\lambda)\right) \\ c_{jk}(t)&=\int_{a_j}^{a_k}\exp\left(-\int_{a_j}^{x}\Sigma(t_\lambda\overline{\omega}_\lambda-\overline{t}_\lambda\omega_\lambda)\right)\psi(x,t,s) \end{aligned}\right. \tag{9.5}$$

で与えられる。$W'=Y'-(0-$切断面$)/C^*$ とおくと，このようにして複素多様体 W' で parametrize されたバンドルの変形族 $\mathcal{E}'\to\Gamma\times W'$ がえられた。

$(t,s)=u$ とかきあらわし，adjoint map によりこのバンドルに associate されたバンドルを考える。

G の一般の元を $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかけば，G の左不変 Maurer-Cartan 微分式は

$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} dx & dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^{-1}dx & x^{-1}dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる。$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で変形すると

$$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{-1}dx & y^{-1}dy \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} x^{-1}dx & ax^{-1}dy-bx^{-1}dx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従つて Maurer-Cartan 微分式（i.e. リー環の元の成分）を $\begin{pmatrix} x^{-1}dy \\ x^{-1}dx \end{pmatrix}$ とならべてかくことにすれば

$$ad\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従つて上の$E(u)$に対し，§５によつてこれに対応する$\Xi(u)$はtransition matrix $\begin{pmatrix} b_{jk} & -c_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる$\mathbb{C}^2$−bundleの切断面芽の層である。

この状態の下に$\tau_u\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau\lambda}\right)$ を与えるコサイクル $\left\{\begin{pmatrix} \xi_{jk} \\ \theta_{jk} \end{pmatrix}\right\}$は（４．５）および§５によつてつぎの式で与えられる。

$$(9.6)\quad \begin{cases} \xi_{jk} = \dfrac{\partial c_{jk}}{\partial \tau\lambda} - c_{jk} \cdot b_{jk}^{-1} \dfrac{\partial b_{jk}}{\partial \tau\lambda} \\[2ex] \theta_{jk} = b_{jk}^{-1} \dfrac{\partial b_{jk}}{\partial \tau\lambda} \end{cases}$$

一方０次元コチエイン$\left\{\begin{matrix} \eta_j \\ \varsigma_j \end{matrix}\right\}$のコバウンダリーは

$$(9.7)\qquad ad(A_{jk})\begin{pmatrix} \eta_k \\ \varsigma_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta_j \\ \varsigma_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{jk}\eta_k - c_{jk}\varsigma_k - \eta_j \\ \varsigma_k - \varsigma_j \end{pmatrix}$$

そこで定理７．２′，７．３′ を$\mathcal{E}' \to \Gamma \times W'$に適用する。まず０−コチエインがコサイクルである条件をみると，第一に$\varsigma_j = \varsigma_k = \varsigma$．これから$\varsigma$は定数となる。
$\varsigma = 0$なら$\{\eta_j\} \leftarrow H^0(\Gamma, \Omega(B_t))$であつて（$t \neq 0$のため）$\eta_j = 0$である。
$\varsigma \neq 0$なら全体をςでわると，$\{(\eta_j/\varsigma_j)\}$ は$H^0(\Gamma, \Omega(E(u)))$ の元を与えることになる。$E(u)$がB_t にreduce しないからこのときも$\eta_j = 0$． 結局$H^0(\Gamma, \Xi(u)) = 0$ Riemann−Rochの定理からdim$H'(\Gamma, \Sigma(u))$はuに無関係に$2g-2$となる。

そこでつぎには$\tau_u\left(\dfrac{\partial}{\partial \tau\lambda}\right) = 0$ ． $\tau_u\left(\dfrac{\partial}{\partial s\mu}\right) = 0$を各々の$u$について示せばよい。後者の方は明らかである。前者については，（９．６）で与えられる$\begin{pmatrix} \xi_{jk} \\ \theta_{jk} \end{pmatrix}$が，（９．７）の形に（正則な$\eta_j, \varsigma_j$を使つて）かけることを示せばよい。

$\theta_{jk} = \displaystyle\int_{a_j}^{a_k} \omega_\lambda$ だから，$\varsigma_j = -\displaystyle\int_{a_j}^{x} \omega_\lambda$ とおけば第二成分については

OKである。第1成分については，まず

$$(9.8)\qquad \eta_j=-\int_{a_j}^{x}\sigma_j(y)^{-1}\left\{\left(\int_{a_j}^{y}\omega_\lambda\right)\psi(y)+\frac{\partial\psi(y)}{\partial\bar{t}^{\lambda}}\right\}+\int_{a_j}^{x}\sigma_j(y)^{-1}\psi(y)\times\int_{a_j}^{x}\omega_\lambda$$

とおけば，必要な関係式

(9.9) $\qquad b_{jk}\eta_k-\eta_j=\varsigma_{jk}+c_{jk}\varsigma_k$ がみたされることはすぐにわかる。

この$\{\eta_j\}$ は正則ではないが，η_j を$\eta_j+\sigma_j^{-1}\cdot f$(fはΓ上のC^{∞}－函数)でおきかえても(9.9)はなりたつから，fを適当にえらんで

$$d''(\eta_j+\sigma_j^{-1}f)=0$$

がなりたつようにすればよい。 $d''\eta_j=-\sigma_j(x)^{-1}\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$ だから，この条件は

$$(9.10)\qquad \{d''-e(\Sigma t_\lambda\overline{\omega}_\lambda)\}f=\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$$

とかける。

以上はuをきめた上で考えるのであつた。従つて考えているtをt_0 ととつてψが(9.4)以下によつてきめられていると考えてよい。そうすると$h_{\mu\upsilon}(t)=\delta_{\mu\upsilon}+O(t-t_0)^2)$となるから(9.10) の右辺で $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{t}^{\lambda}}$ は$\left(\overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t^{\lambda}}}\right)$ でおきかえてよい。φに対し(9.4)を使うと

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t^{\lambda}}\right)_{t=t_0}=-G(t_0)\delta''(t_0)e(\overline{\omega}_\lambda)\varphi(t_0)=-\delta''(t_0)G(t_0)e(\overline{\omega}_\lambda)\varphi(t_0)$$

$\delta''(t_0)=-*\{d'-e(\Sigma\bar{t}_{0\upsilon}\omega_\upsilon)\}*$である。(この点Nakano〔10〕には符号の誤りがある。)従つて

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}^{\lambda}}\right)_{t=t_0}=\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t^{\lambda}}\right)}_{t=t_0}=\pm\sqrt{-1}\{d''-e(\Sigma t_{0\upsilon}\overline{\omega}_\upsilon)\}*\overline{G(t_0)e(\omega_\lambda)\varphi(t_0)}$$

であり，(9.10) は解fをもつことがわかる。

これによってつぎの定理が証明された。

定理9.1　$\mathcal{E}' \to \Gamma \times W'$ に対し定理7.2′，7.3′ の条件がなりたつ。従って$\mathcal{E}' \to \Gamma \times \omega'$ は唯一つのCAF構造をもつ。

4° W' のコンパクト化　$\bigcup_{t \in J} H^0(\Gamma, \Omega^1(B_{-t}))$は，$t=0$の所で特異性を示すので，$J$上のベクトル・バンドルではない。しかし$t=0$を中心とした$J$のquadratic transform $\tilde{J}$ を考えると，自然な方法で $\bigcup_{t \in J'} H^0(\Gamma, \Omega^1(B_{-t}))$が$\tilde{J}$上の$\mathbb{C}^{g-1}$ バンドルに拡張できる。双対的にY' も$\tilde{J}$上の$\mathbb{C}^{g-1}$ バンドルYに拡張でき，W' は$W=Y-$(0-切断面)$/\mathbb{C}^*$なるコンパクト化をもつ。Wをパラメーター空間とするバンドルのC^∞－変形族で$\mathcal{E}'$ の拡張であるものも直ちに作れるが，それが解析的変形族になるかどうか。筆者は知らない。これらの詳細は略する。

代数曲線のヤコビ多様体を，principally normalized であるアーベル多様体の変形族の中で考えたとき，$\tilde{J}$上のベクトル・バンドルYがどんなアーベル多様体（のquadratic transform）の上に拡張できるか，わかれば面白いかも知れない。

§10　基本群のユニタリー表現とバンドル族

この§ではNarasimhan － Seshadriによる結果〔12〕を紹介する。Γを種数gが2以上の代数曲線，　ΠをΓの基本群とする。与えられたnに対し$\Pi \to U(n)$の既約表現の全体M_1 および表現としての同値性による同値類の全体Mは自然な方法で実解析多様体となる。$M_1 \ni \rho, \rho'$ に対し，それらに対応するΓ上の$\mathbb{C}^n$－バンドル$W(\rho)$，$W(\rho')$がひとしいのは，ρとρ' とが表現として同値なときに限ることが云える。それ故，Mをパラメーター空間とするΓ上の$\mathbb{C}^q$ －バンドルの変形族$\mathcal{P}$ができる。これに対し定理7.1′，7.2′ が適用されて，Mには自然な複素構造が入り，$\mathcal{P}$には局所的にCAF 構造が入る。以上が結果の要約である。$n=1$のとき$M=J$であつて，Mの上の解析函数が即ちアーベル函数であつた。$n>1$のとき，Mはコンパクトではないが，Mをコンパクト化してその上に意味のある函数論が展開できるならば，おもしろいであろう。N－S両氏により，(Projective invariant theory に関するMumford の結果を利用して)Mがあるコンパクト化をもちそれが射影空間内のalgebraic varilty であることが示されている。しかしバンドルの変形族という意味と結びついたコンパクト化があるわけではない。

1° 記号　$\widetilde{\Gamma}$をΓの普遍被覆リーマン面とする。Γの基本群Πは，$2g$個の元$a_1, b_1, \cdots\cdots, a_g, b_g$によつて，唯一つの関係 $\prod_{i=1}^{g}(a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1})=e$ によつて生成される。即ち$\{e\}\to N\to F\xrightarrow{\eta}\Pi\to\{e\}$ (exact). ここにFは$a_1,\cdots\cdots, b_g$で生成される自由群であり，Nは上式左辺で生成されるFの正規部分群である。

$U(n)$の$2g$個の直積をΩとし，$(2i-1)$ 番目のfactor への射影をp_i，$2i$ 番目のfactor への射影をq_iとかく。$\Omega\ni u\to f(u)=\prod_{i=1}^{g} p_i(u) q_i(u)\; p_i(u)^{-1} q_i(u)^{-1}\in SU(n)$ なるfを考えると，$\mathfrak{R}=f^{-1}(e)$ は$\Pi\to U(n)$の表現の全体を与えると考えてよい。($\mathfrak{R}$の元uは表現$\rho:\rho(a_i)=p_i(u)$，$\rho(b_i)=q_i(u)$に対応する。)表現の全体に位相を入れるには，$U(n)^{\Pi}$の部分空間と考えるのが自然だが，それはΩの部分空間としての$\mathfrak{R}$の位相と同じである。

一般にΠが微分多様体Xの基本群で，$\rho:\Pi\to GL(V)$ が実ベクトル空間Vの自己同型群への表現であるとき，ρに対応するX上のC^∞－ベクトルバンドルを$D(\rho)$とかく。Xの普遍被覆空間を$\widetilde{X}$とするとき，$D(\rho)$は$\widetilde{X}\times V$を同値関係$(\widetilde{x}\gamma, v)\sim(\widetilde{x}, \rho(\gamma)v)$でわつてえられる。§8でみたように，$D(\rho)$を局所的に直積してあらわすとき，transition matrix がconstantになるようにできる。従つて$D(\rho)$－valued 微分式の加群$A(D(\rho))=\Sigma A^q(D(\rho))$に対して外微分$d$が定義され，$(A(D(\rho)), d)$はcochain complex となる。$X$が複素多様体で$V$が複素ベクトル空間のとき，$\rho$に対応する解析的ベクトルバンドルを$\mathscr{V}(\rho)$とかく。

2° 群のコホモロジーと$A(D(\rho))$のコホモロジー・ Gが一つの群，Mが左G—加群であるとき，群GのM－valued コホモロジー群$H^q(G, M)$なるものが定義できる。差当り必要なところだけあげておくと，

$$C^0(G,M)=M,\ H^0(G,M)=Z^0(G,M)=\{m\in M \mid \sigma m=m\}=M^G,$$

$$C^1(G,M)=\{f \mid f\text{は}G\to M\text{の写像}\},\ Z^1(G,M)=\{f \mid f(\sigma\tau)=\sigma f(\tau)+f(\sigma)\}$$

$$B^1(G,M)=\{f \mid f(\sigma)=\sigma m-m\},\ H^1(G,M)=Z^1(G,M)/B^1(G,M)$$

である。

これに関してつぎの事実がなりたつ。

(a) Fが$a_1,\cdots\cdots, a_k$で生成される自由群で，MがF—加群であるとき，$m_1,\cdots\cdots, m_k\in M$を任意に与えると，1－cocycle $\delta\in Z^1(F,M)$で$\delta(a_j)=m_j$ なるものが一つ，唯一つ存在する。

(b) $F \xrightarrow{\eta} \Pi$が代数曲線の基本群に関して既出の意味をもち，ρが$\Pi \to GL(V)$の表現であるとき，VはρによつてΠ−加群とみられ，$\rho \circ \eta$によつてF−加群とみられる。$Z = Z^1(F, V)$の部分群，$Z_1 = \{ f \in Z \mid f(\prod_i a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}) = 0 \}$は$Z^1(\Pi, V)$と同型である。

Proposition 10.1　Xを連結，コンパクトな微分多様体，Πをその基本群とし，V，ρ，$D(\rho)$が1°における意味をもつとする。このとき$H^1(\Pi, V) \cong H^1(A(D(\rho)), d)$である。

(証明)　$\tilde{X} \to X$のcovering map をπとする。$\pi^* D(\rho)$は$\tilde{X}$上の直積バンドルである。$D(\rho)$の定義から，$A^1(D(\rho)) \ni \varphi$に対し，$\tilde{\varphi} = \pi^* \varphi$は$\tilde{X}$上の$V$−valued 1次微分式で

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}\gamma) = \rho(\gamma)^{-1} \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \qquad (\tilde{x} \in \tilde{X}),\ \gamma \in \Pi)$$

をみたすものとなる。(逆にこのような$\tilde{\varphi}$はφを定める。)

$d\varphi = 0 \iff d\tilde{\varphi} = 0$であり，$\tilde{X}$は単一連結だから，このとき$\tilde{X}$上の函数$\psi$があつて$\tilde{\varphi} = d\psi$となる。$\omega(\tilde{x}, \gamma) = \psi(\tilde{x}\gamma^{-1}) - \rho(\gamma)\psi(\tilde{x})$とおくと，$\omega(\tilde{x}, \gamma)$はV−valuedな函数で$d\omega = 0$.従つて$\omega(\tilde{x}, \gamma)$は$\tilde{x}$に無関係に，$\gamma$だけで決まる$V$の元である。

$\omega(\gamma)$は$Z^1(\Pi, V)$の元であつて，上の対応が$H^1(A(D(\rho)), d) \to H^1(\Pi, V)$の同型対応を定める。その詳細は省略するが，上の対応がsurjectiveになるという点についてだけ要点をのべる。

$\tilde{X} \supset U \supset Y$，$\overline{U}$はコンパクト，$Y$は閉集合で$\pi(Y) = X$なる$U$ Yをとり，$\tilde{X}$上の実数値C^∞函数h'で$h'(\tilde{x}) = 0$ for $\tilde{x} \in \tilde{X} - U$，$h'(\tilde{x}) = 1$ for $\tilde{x} \in Y$，$0 \leq h' \leq 1$なる条件をみたすものをとる。　　そこで$h(\tilde{x}) = h'(\tilde{x}) / \sum_{\gamma \in \Pi} h'(\tilde{x}\gamma)$，$h^\gamma(\tilde{x}) = h(\tilde{x}\gamma)$とおく。こうすれば$\{ h^\gamma(\tilde{x}) \}_{\gamma \in \Pi}$は$\tilde{X}$上での微分可能な1の分割である。

そこで$\{\omega(\gamma)\} \in Z^1(\Pi, V)$に対して$\psi(\tilde{x}) = \sum_{\delta \in \Pi} h(\tilde{x}\delta)\omega(\delta)$とおけば，$\psi(\tilde{x}\gamma^{-1}) = \omega(\gamma) + \rho(\gamma)\psi(\tilde{x})$がなりたつて$d\psi = \tilde{\varphi}$が$A^1(D(\rho))$の閉微分式を与える。

3° ユニタリー表現とベクトル・バンドル

Proposition 10.2　Xは連結，コンパクトな複素多様体とし，Π，$\tilde{X}$，π，V，ρは1°および前のProp.と同様の意味をもつとする。ただしVは複素ベクトル空間でHermite metric をもち，ρは$\Pi\to U(V)$の表現だとする。このとき$H^0(\Pi, V)$ $H^0(X, \Omega(W(\rho)))$である。

（証明） 上のProp. の場合と同様に$H^0(X, \Omega(W(\rho)))\ni\varphi$は，$\widetilde{\varphi}=\pi^*\varphi$ なる関係によって，$\widetilde{X}$上のV－valued な正則函数$\widetilde{\varphi}$で，$\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}\gamma^{-1})=\rho(\gamma)\widetilde{\varphi}(\widetilde{x})$をみたすものと，一対一の対応をなす。

Vの基底を適当にとれば，$\widetilde{\varphi}$は$n\ (=\dim_{\mathbb{C}}V)$個の複素数値正則函数の組${}^t(\widetilde{\varphi}_1, \cdots\cdots \widetilde{\varphi}_n)$となり$\rho(\gamma)$はユニタリー行列となる。従って$\sum_j |\widetilde{\varphi}_j(\widetilde{x})|^2$ はX上の函数となる。しかもこれは多重劣調和である。Xがコンパクトだから$\sum_j |\varphi_j(\widetilde{x})|^2$は定数でなければならない。そうすれば$\widetilde{\varphi}_j$ 自身が定数でなければならない。

<u>定理10.3</u> Xは連結，コンパクトな複素多様体とする。Xの基本群Πの$U(n)$内への表現ρ_1, ρ_2があるとき

$W(\rho_1)=W(\rho_2) \Longleftrightarrow \rho_1\sim\rho_2$（表現として同値）である。

（証明）Πから$GL(n^2, \mathbb{C})$への表現Rを$n\times n$ 行列Aに対し，$R(\gamma)A=\rho_1(\gamma)A\cdot\rho_2(\gamma)^{-1}$ によって定める。$\mathrm{tr}({}^t\overline{A}, A)$が$R(\gamma)$で不変であるから，$R$はユニタリー表現である。ところで

$$W(\rho_1)=W(\rho_2) \Longleftrightarrow {}^{\exists}f : \widetilde{X}\to GL(n, \mathbb{C}) \text{ の正則写像で}$$
$$f(\widetilde{x}\gamma^{-1})=\rho_1(\gamma)f(\widetilde{x})\rho_2(\gamma)^{-1}$$

Prop.10.2 によって，このようなfはconstant matrix である。

<u>注意</u> $\rho_1=\rho_2=\rho$ でρが既約のときを考えると，この定理の論法とSchurの補題とを用いて$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega(W(ad\rho)))=1$がでる。従って$W(\rho)$はindecomposable である。逆に$\rho$が可約なら$W(\rho)$がdecomposeすることは当然である。

<u>Proposition10.4</u> Xは連結，コンパクトなケーラー多様体であるとし，π，$\widetilde{X}$，Πの意味は前同様とする。Vは実ベクトル空間，$\widetilde{V}=V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$とする。$\rho$が$\Pi\to O(V)$（$=V$の直交変換の群）の表現であるとき，$\rho$の$C$－linear な拡張は$\Pi\to U(\widetilde{V})$の表現である。このとき実ベクトル空間として

$$H^1(\Pi, V)\cong H^1(X, \Omega(W(\widetilde{\rho})))$$

（証明） Prop.10.1により，$H^1(\Pi, V) \cong H^1(A(D(\rho)), d)$ である。Xの Kähler metricと，$D(\rho)$のtransition matrixが直交変換であることを用い，$A^q(D(\rho))$に内積を入れて考えると（§Eと同様な考え）$H^1(A(D(\rho)), d)$は1次 $D(\rho)$－valued 調和微分式の空間 $\mathcal{H}^1(D(\rho))$ と同型である。調和というのは，$\Delta = d\delta + \delta d$に対してである。（transition matrixがconstantであるため，ふつうの微分式に対すると同じd，δが使える。）複素数値微分式の空間$\widetilde{A}(D(\rho)) = A(D(\rho)) \otimes \mathbf{C}$ を考えると，$\widetilde{A}^1(D(\rho))$ は型（1，0）と型（0，1）との部分空間の直和となり$\Delta = 2\square\square = d''\delta'' + \delta'' d''$（§$D$参照）のため調和微分式の空間も $\mathcal{H}(\widetilde{D}(\rho)) = \mathcal{H}^{(1,0)}(\widetilde{D}(\rho)) \otimes \mathcal{H}^{(0,1)}(\widetilde{D}(\rho))$ と直和にわかれる。$\mathcal{H}^{(0,1)}$は$H^1(X, \Omega(W(\widetilde{\rho})))$ と同型であるから，Proposition が証明された。

4° 既約表現の空間M_1　　Γはgenus $g \geqq 2$の代数曲線，Πはその基本群とする。その他今までの記号を用いる。

<u>Proposition10.5</u>　ρを$\Pi \to U(n)$ の表現とし，$U(n)$のリー環$\check{\mathfrak{u}}(n)$ を$ad\rho$によってΠ－加群とみる。

このとき

$$\dim_{\mathbf{R}} H^1(\Pi, \check{\mathfrak{u}}(n)) = 2n^2(g-1) + 2\dim_{\mathbf{R}} H^0(\Pi, \check{\mathfrak{u}}(n))$$

（証明） $W(ad\rho)$によって，$ad\rho$に対応するファイバー$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$のベクトルバンドルをあらわすと，$\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) = \check{\mathfrak{u}}(n) \otimes \mathbf{C}$ のため

$$\dim_{\mathbf{R}} H^0(\Pi, \check{\mathfrak{u}}(n)) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(\Pi, \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))),$$

$$\dim_{\mathbf{R}} H^1(\Pi, \mathfrak{u}(n)) = 2\dim_{\mathbf{C}} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho)))$$

ところで$W(ad\rho)$ に対しHirzebruch の公式（Hirzebruch [4]，§21）

$$\chi(X_k, W) = \kappa_k\left[(e^{\delta_1} + \cdots\cdots + e^{\delta_n}) \prod_{i=1}^{k} \frac{r_i}{1-e^{-r_i}}\right]$$

を適用する。$k=1$，$X_k = \Gamma$，$r_1 = -(2g-2)$（fundamental class）$\delta_1 + \cdots\cdots + \delta_n = W(ad\rho)$ の第一Chern class$=0$ から

$$\dim_{\mathbf{C}} H^0(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) - \dim_{\mathbf{C}} H^1(\Gamma, \Omega(W(ad\rho))) = -n^2(g-1)$$

これから証明すべき等式がえられる。

Proposition10.6 表現ρが既約 $\Longleftrightarrow \dim_R H^1(\Pi,\check{u}(n))=2\{n^2(g-1)+1\}$

（証明） Prop.10.5により右辺の条件は$\dim H^0(\Pi,\check{u}(n))=1$ と同値である。Schurのlemmaにより，これはρが既約なことと同値である。

$\Pi\to U(n)$の表現の全体$\mathcal{R}=f^{-1}(e)$ を考える。

$\mathcal{R}$の一点ρにおけるΩの接空間をΩ_ρ とかく。写像$f:\Omega\to SU(n)$の微分$(df)_\rho:\Omega_\rho\to s\tilde{\mu}(n)$を$D_1$ とかくと，

Proposition10.7

$\mathrm{Ker}(D_1)\cong Z^1(\Pi,\check{u}(n))$なる自然な同型対応がある。

（証明）$SU(n)$上の右不変Maurer-Cartan微分式の（一次独立な）一組をωとすれば，Ω上では$df\cdot f^{-1}=f^*\omega$ となる。そして$\mathrm{Ker}D_1=\{v\in\Omega_\rho|df\cdot f^{-1}(v)=0\}$
$v\in\Omega_\rho$はΩ上の右translation によって$\check{u}(n)$ の元の組$(A_1,B_1,\cdots\cdots A_g,B_g)$ と同一視できる。これに対し$2^\circ(a)$ のように，唯一つの元$\delta v\in Z^1(F,\check{u}(n))$があって，$\delta_v(a_i)=A_i$ ，$\delta_v(b_i)=B_i$ となる。

ところが，$df\cdot f^{-1}(v)=\delta_v(\Pi(a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}))$ なる関係式がなりたつ。なぜなら$\Phi=\Omega\times F\ni(u,r)\to u(r)\in U(n)$ なる写像を考えると，$\Phi(u,r_1r_2)=\Phi(u,r_1)\cdot\Phi(u,r_2)$． これを微分すれば$(d\Phi\cdot\Phi^{-1})_\rho(v)=\psi$（$\psi$は$F\to\check{u}(n)$の写像）がコサイクルであることがわかる。

$$d\Phi(\rho,a_1)\cdot\Phi(\rho_1,a_1)^{-1}=(d\rho_i\cdot\rho_i^{-1})_\rho(v)=A_i$$

だから$\psi(a_i)=A_i$，同様に$\psi(b_i)=B_i$ 従って$\psi=\delta_v$ である。

$\Phi(u,\Pi(a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}))=f(u)$から，$\delta_v(\Pi(a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}))=\psi(\Pi a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1})=df\cdot f^{-1}(v)$がえられる。そうすれば，$2^\circ(b)$ により$\mathrm{Ker}(D_1)=Z_1=Z^1(\Pi,\check{u}(n))$ である。

定理10.8 $\Pi\to U(n)$ の既約表現の全体M_1 はΩの部分多様体をなし，$\rho\in M_1$ におけるM_1 の接空間$M_{1\rho}$ は$Z^1(\Pi,\check{u}(n),\rho)$と自然な同型対応をもつ。

（証明） $\dim_R Z^1(\Pi,\tilde{u}(n))=\dim_C H'(\Pi,\tilde{u}(n))+(\dim_R\tilde{u}(n))-\dim_R Z^0(\Pi,\tilde{u}(n))=2n^2g-n^2+\dim H^0(\Pi,ad\rho)$

従つてρが既約のときKer(D_1)は可能な最小値をとる。(即ちfのヤコビアンの階数が最大，それは$n^2-1=\dim SU(n)$にひとしい。)従つて定理がえられる。

注意　M_1は空ではない。$g\geqq 2$のときはユニタリー行列の既約なsystem $\alpha_1, \beta_2 \cdots ; \alpha_g$, β_gを$\Pi(\alpha_i\ \beta_i\ \alpha_i^{-1}\beta_1^{-1})=e$なるようにえらぶことは可能である。$M_1$はまたコンパクトではない。

5° 既約表現の同値類の空間M　$\Omega \ni u=(x_1, y_1, \cdots\cdots, x_g, y_g)$に対し，$t \in U(n)$を$u \to tut^{-1}=(tx_1t^{-1}, \cdots ty_gt^{-1})$と作用させる。これで$U(n)$の中心によるその剰余群$U_1$が$\Omega$に作用することになる。$M_1$は$U_1$でstableであつて，($M_1 \ni u$に対して($x_1, \cdots\cdots, y_g$)が既約な行列の一系をなすことから，)$U_1$は$M$上にはfaithfullyに作用する。従つて$M=M_1/U_1$は(実解析的)多様体の溝造をもち，$p: M_1 \to M$は$U_1$−主バンドルの構造をもつ。

Proposition 10.9　$p: M_1 \to M$，$p(\rho)=m$なるとき定理10.8のように$M_{1p}=Z^1(\Pi, \tilde{u}(n))$とみれば

$$\mathrm{Ker}(dp)\rho=B^1(\pi, \tilde{u}(n), \rho)$$

$$M_m \cong H^1(\pi, \tilde{u}(n), \rho)\quad となる。$$

(証明)　$U(n) \ni t$によつて$\rho=(x_1, \cdots\cdots, y_g)$は($tx_1t^{-1}, \cdots ty_gt^{-1}$)へうつる。今$t=\exp(\lambda Y)$ ($Y \in \tilde{u}(n)$)とすると，

$$\frac{d}{d\lambda}(tx_it^{-1}x_i^{-1})\mid_{\lambda=0}=Y-x_iYx_i^{-1},$$

$$\frac{d}{d\lambda}(ty_it^{-1}y_i^{-1})\mid_{\lambda=0}=Y-y_iYy_i^{-1}$$

これはU_1の作用によるρのorbitの接ベクトルが(定理10.8のidentificationにおいて)コバウンダリーであることを示す。Ker dpはorbitの接空間に他ならぬ。

6° バンドルの変形族　$\tilde{\Gamma} \times M_1 \times GL(n, C)$において，同値関係$(\tilde{x}, \rho, g) \sim (\tilde{x}r, \rho, p(r)^{-1}g)$を考え，これによる商空間を$\mathfrak{p}_1$とする。自然な射影$\mathfrak{p}_1 \to \Gamma \times M_1$なるによつて$\mathfrak{p}_1$は$M_1$をパラメーター空間として$\Gamma$の$GL(n, C)$−主バンドルの族をなす。そして$M_1 \ni \rho$に対し　$_1$の$\Gamma \times \rho$上のrestriction $\mathfrak{p}_1 \mid \Gamma \times \rho$は$\rho$に対応する主バンドル

$P(\rho)$に他ならない。

$\tilde{\Gamma}\times M_1\times GL(n,\mathbb{C})$には$U(n)\ni t$の作用$(\tilde{x},\rho,g)\longrightarrow(\tilde{x},t\rho t^{-1},tg)$が定義され，これは上の同値関係と両立する。従つて$U(n)$は$\mathfrak{P}_1\to\Gamma\times M_1$に作用し，それによる商空間としてバンドル$\mathfrak{P}\to\Gamma\times M$がえられる。$m\in M$に対し$\mathfrak{P}|\Gamma\times m$は表現の同値類$m$に対応する主バンドルであり，定理10．3により，$m$が異なれば解析的バンドルとしても異なる。

<u>Proposition10.10</u>　バンドルの変形族$\mathfrak{P}_1\to\Gamma\times M_1$に対応する

$\tau_\rho: M_{1\rho}\to H^1(\Gamma,\Omega(W(ad\rho)))$は

$$M_{1\rho}\xrightarrow{\delta}Z^1(\Pi,\check{u}(n),\rho)\xrightarrow{\eta}H^1(\Pi,\check{u}(n),ad(\rho))\xrightarrow{\kappa}H^1(\Gamma,\Omega(W(ad\rho)))$$

の合成によつてえられる。ここにδはProp．10．7，定理10．8にいう同型，ηは$Z^1\to H^1$の自然なsurjection，　κはProp．10．4にいう同型対応である。

（証明）　Γの開被覆$\{U_j\}$に関し，$P(\rho)$がtransition matrix$\{g_{jk}\}$で与えられるとする。このg_{jk}は§8に示したように$g_{jk}=\rho(\gamma_{jk})(\gamma_{jk}\in\Pi)$としてきめられる。$M_{1\rho}\in v$に対し，$\tau_\rho(v)$は1－cocycle$(vg_{jk})\cdot g_{jk}^{-1}$で与えられ，一方写像$\delta$は$\delta(v)(\gamma)=d\Phi(\rho,\gamma)\Phi(\rho,\gamma)^{-1}(v)$で与えられた。従つて$\delta(v)(\gamma_{jk})=(vg_{jk})\cdot g_{jk}^{-1}$である。こうしてきまるコホモロジー類を問題にしているのであるから，Prop．がなりたつ。

変形族$\mathfrak{P}\ \Gamma\times M$における（無限小変形写像）$\tau_m$を考えるには，$M\ni m$の上にくる$M_1$の点$\rho$を考える。

$$\begin{tikzcd}
Z^1(\Pi,\check{u}(n),\rho) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, equal] & H'(\Pi,\check{u}(n),\rho) \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, equal] & H^1(\Gamma,\Omega(W(ad\rho))) \\
M_{1,\rho} \arrow[r, "dp"] & M_m \arrow[ur, dashed, "\tau_m"'] &
\end{tikzcd}$$

なるcommutative diagramがなりたち，τ_mはR－同型になる。mの上にくる二点$\rho_1,\rho_2\in M_1$をとると，$\rho_2=t\rho_1t^{-1}$．これに対応して$W(ad\rho_1)$と$W(ad\rho_2)$とが同型であり，$H^1(\Gamma,\Omega(W(ad\rho_i)))(i=1,2)$の間に$\mathbb{C}$－同型がある。これによつて両者を同一視するとき，上のτ_mはρのとり方に無関係に定まつた写像となり，これが$\mathfrak{P}\longrightarrow\Gamma\times M$の$\tau_m$を与えている。

これでわかるとおり，変形像$\mathfrak{P}\to\Gamma\times M$に定理7．1′，7．2′が適用できる。
$H^0(\Gamma,\Omega(W(ad\rho)))\cong\mathbb{C}$のため，定理7．3′は使えない。

<u>定理10.11</u>　Mには複素解析多様体の構造が入り，それに関し$\mathfrak{h} \to \Gamma \times M$は局所的には CAF 構造をもつ。このような$M$の複素構造は唯一つである。

$M_1 \ni \rho \to \det(\rho) : \Pi \to \mathbb{C}^*$の表現$\det(\rho)(\gamma) = \det(\rho(\gamma))$を考えると，これは$M$から$\Gamma$のヤコビ多様体$J$への写像をひきおこす。$M \to J$は解析的なバンドルで，写像$\mu$：$J \ni t \to nt \in J$によるinduced bundle $\mu^*(M)$は直積$M_0 \times J$となる。M_0またはそのコンパクト化の性質がわかるとおもしろい。

附　　　　　録

§A De Rham の定理

Xを連結な微分可能多様体とする。Xの開集合Vにおけるp階 skew symmetric covariant tensor field を考える。それは局所座標x^1, …, x^n に関し成分$\varphi_{i_1 \cdots i_p}(x)$ をもつが，このとき表式

$$\varphi = \sum_{i<\cdots<i_p} \varphi_{i \cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \qquad (\wedge \text{は交代積})$$

は，局所座標のとり方に無関係な意味をもつ。このφを，Vにおけるp次の（C^∞）外微分式という。

Xの接バンドルをT，その dual をT^*とするとき，p次C^∞外微分式とは，$\overset{p}{\wedge} T^*$の(C^∞)cross section のことだといつてもよい。

$A^p(V)$ によつてVにおけるp次C^∞外微分式のなすR－ベクトル空間をあらわすと，

外積$\wedge$，$A^p(V) \times A^q(V) \to A^{p+q}(V)$

外微分　d:　　　$A^p(V) \to A^{p+1}(V)$

なる演算が定義できて，

(A, 0)　　$\varphi^p \wedge \psi^q = (-1)^{pq} \psi^q \wedge \varphi^p$

0次の微分式即ち函数fに対して

(A, 1)　　$df = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$

(A, 2)　　$d(df) = 0$

(A, 3)　　$d(\varphi^p \wedge \psi = d\varphi^p \wedge \psi + (-1)^p \varphi^p \wedge d\psi$

(A, 4)　　$d(d\varphi) = 0$

がなりたつ。((1)～(3) はdを一意的にきめる)

そこで　$A(X) = \sum_{q=0}^{n} A^q(X)$　　($n = \dim X$) に外微分dを組合せて考えると，cochain complex になり，コホモロジー群

$$H^q(A(X), d) = d^{-1}(0) \frown A^q(X) \Big/ dA^{q-1}(X)$$

がえられる。これをq次のde Rham群とよぼう。($d\varphi=0$ならばφはclosed であるという。$\varphi=d\phi$ならばφはexact であるという)

定理A．1　$H^q(A(X), d) \cong H^q(X, \mathbb{R})$

右辺は実係数でのXのq次元コホモロジー群である。

外積によって $H^*(A(X), d)=\sum_q H^q(A(X), d)$に環の構造が入る。一方$H^*(X, \mathbb{R})=\sum_q H^q(X, \mathbb{R})$もカップ積に関し環である。これに関して

定理A．2　$H^*(A(X), d) \cong H^*(X, \mathbb{R})$　(環として同型)

証明には微分式芽の層A^q を考えるとき，

$$0 \to \mathbb{R} \to A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \to \cdots\cdots\cdots\cdots$$

がconstant sheaf $\mathbb{R}$ の fine resolutionであることを使えばよい。上の列がexact であることは，Poincaré の lemma (の一つの形) である。

簡単のためXはコンパクトな可附号多様体だとして，この定理をいいかえる。

Xの実係数q次元ホモロジー群 $H_q(X, \mathbb{R})$ は有限次元実ベクトル空間であり，(その次元数 $b_p=X$ のp次元Betti 数) $H^q(X, \mathbb{R})$ は H_q上の実数値線型函数の空間に他ならない。定理A．1でいう同型対応は，closed な微分式 φ^pに対し，$H_q(X, R)$上の函数

$$H_q(X, \mathbb{R}) \ni z \to \int_\zeta \varphi \in \mathbb{R}$$

を対応させてえられている(ζはホモロジー類zを代表する一つのサイクルである。右辺が，φ(mod exact) の類と，ζ(mod boundary) の類とだけできまることは，Stokesの定理

$$\int_{\partial c}\phi=\int_c d\phi$$

からわかる)

$H_q(X, \mathbb{R})$の一組の基底を(幾何学的意味の上から)整係数サイクルのきめる類からえらんで$z_1, \cdots z_b$ とする。

$\int_{\Sigma c_j z_j}\varphi$ をサイクル $\Sigma c_j z_j$ 上におけるφの周期とよぶことにすると，定理A．1からつぎの(a)，(b) がえられる。

(a) 任意に与えられた実数値$\alpha_1 \cdots \alpha_b$を$z_1, \cdots, z_b$の上での周期とする閉微分式φが存在する。

(b)　閉微分式φの，$z_1, \cdots z_b$ の上での周期がすべて0ならば，φはexact である。

Xが連結可附号なため，$H^n(X, R) \cong R$ である。そして$H^*(X, R)$における積は，

$$H^q(X, R) \times H^{n-q}(X, R) \to H^n(X, R) \cong R$$

なるdual pairing を与える。従って$H^q(X, R)$は$H^{n-q}(X, R)$ 上の線型函数の空間とみられ，同型対応

$$\theta : H^q(X, R) \to H_{n-q}(X, R)$$

がえられる。$H^*(X, R) = \sum_q H^q(X, R)$が環の構造をもつため，その$\theta$による像として$H_*(X, R) = \sum_q H_q(X, R)$も環の構造が与えられる。$H_p(X, R) \times H_q(X, R) \ni (z, \zeta) \to z \circ \zeta \in H_{p+q-n}(X, R)$　また$H^n(X, R) \to R$ なる上記同型対応に対応する写像$H_0(X, R) \to R$ を，Kronecker Index といい，KI であらわす。

そうすれば定理A．2は

(c)　$\int_r \omega = \mathrm{KI}(r \circ \theta(\omega))$

(c')　$\int_r \omega \wedge \psi = \mathrm{KI}(r \circ \theta(\omega) \circ \theta(\psi)) = \int_{r \circ \theta(\omega)} \psi$

などのような公式を与える。

§B Dolbeault の定理

Xを複素解析多様体とする。このときは解析的局所座標$(z^1, \cdots, z^m)$に関して，p次外微分式を

$$\varphi = \sum_{r+s=p} \sum_{\substack{\alpha_1 < \cdots < \alpha_r \\ \beta_1 < \cdots < \beta_s}} \varphi_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_p} dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_r} \wedge d\bar{z}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{\beta_s}$$

とあらわし，係数も複素数値函数を考えるのが自然である。(これは今まで考えた$A^p(V)$に係数拡大 $\otimes C$を行い，basisをとりかえて書き表わしたにすぎない) 解析的座標の間の変換しか考えないから，上式で(r, s)の与えられた値に対する項の和が，一つの微分式をなす。従ってp次微分式は，型(r, s) $(r+s=p)$ の微分式の和に一意的にあらわされる。即ち$A^p(V) = \sum_{r+s=p} A^{r,s}(V)$。

外微分dは$d = \sum_i dx^i \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ ($\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ はφの各係数を$\frac{\partial}{\partial x^i}$ する意) とかけるが，

これも

$$d' = \sum_{\alpha} dz^{\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \quad d'' = \sum_{\alpha} d\bar{z}^{\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha}}$$

と二つにわかれる。そして

$$d'^{2} = 0, \quad d''^{2} = 0, \quad d'd'' + d''d' = 0$$

d'' は微分式の加群，層に対し $A^{r,s}(V) \to A^{r,s+1}(V)$，$A^{r,s} \to A^{r,s+1}$と作用する。これに関してPoincaréのlemmaの複素形がなりたつ。

Lemma $A^{r,s} \xrightarrow{d''} A^{r,s+1} \xrightarrow{d''} A^{r,s+2}$ は exact である。

従つてΩ^{r}で正則なr次微分式（型（r，0）で係数が正則函数）の芽の層をあらわすとき，

$$0 \to \Omega^{r} \to A^{r,0} \xrightarrow{d''} A^{r,1} \xrightarrow{d''} A^{r,2} \to \cdots$$

が，Ω^{r}の fine resolution を与えて，次のDolbeaultの定理がえられる。

定理B．1　$H^{q}(\sum_{s} A^{r,s}(X),\ d'') \cong H^{q}(X,\ \Omega^{r})$．

X上に解析的なベクトル・バンドルFが与えられたとき，F-valued 微分式に対してもこの定理が拡張できる。X上の解析的ベクトル・バンドルFは，局所的に直積の形で与えればつぎのようにあらわされる。即ち，Xの開被覆$\{U_j\}$ と $U_j \cap U_k$ から $GL(q,\ \mathbb{C})$ への正則な写像 g_{jk} とがあつて，各のU_j 上では$F \cong U_j \times \mathbb{C}^{q}$，$x \in U_j \cap U_k$ のとき $(x,\ \xi_j) \in U_j \times \mathbb{C}^{q}$ と $(x,\ \xi_k) \in U_k \times \mathbb{C}^{r}$ とは，

$$\xi_j = g_{jk}(x) \cdot \xi_k$$

のとき，そのときに限りFの同一点をあらわす。（当然，$U_j \cap U_k \cap U_l$では$g_{jl} = g_{jk} \cdot g_{kl}$）。

そうすると，型（r，s）のF-valued 微分式とはU_j における（r，s）一微分式q個の組$\varphi_j = {}^{t}(\varphi_{j1},\ \ldots,\ \varphi_{jq})$ であつて，$U_j \cap U_k$ では$\varphi_j(x) = g_{jk}(x) \cdot \varphi_k$をみたすものということになる。このような微分式の$\mathbb{C}$－ベクトル空間を$A^{r,s}(F,\ X)$とすると，$d''$ は$A^{r,s}(F,\ X) \to A^{r,s+1}(F,\ X)$ の微分作用素となる。即ち

$$A^{r,s}(F,\ X) \ni \varphi = \{\varphi_j\} \to d''\varphi = \{d''\varphi_j\} \in A^{r,s+1}(F,\ X).$$

Dolbeault の定理の拡張として

定理B．2　$H^q(\sum_s A^{r,s}(F, X), d'') \cong H^q(X, \Omega^r(F))$.

ここに$\Omega(F)$はFの正則な切断面の芽の層をあらわす。

§C　調和微分式

Xをコンパクトなn次元可附号多様体として，これにC^∞級のRiemann metric

$$ds^2 = \Sigma g_{ij}(dx^i dx^j)$$

を入れる。$x^1, \cdots, x^n$は，考える座標近傍Uでの局所座標で，考えるXの符号づけにおいて，この順で正の座標系をなすものとする。

Uで（必らずしもclosedでない）1次微分式$\omega_1, \cdots, \omega_n$を

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n}(\omega_j, \omega_j)$$

$$dv = \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n \quad (\text{体積要素})$$

となるようにとることができる。p次微分式φがこのωに関して

$$\varphi = \sum_{i_1 \cdots i_p}\varphi_{i_1\cdots i_p}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}$$

と書きあらわされるとき

$$*\varphi = \sum_{j_1<\cdots<j_{n-p}} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1, 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n\\ i_1\cdots i_p j_1\cdots j_{n-p}\end{pmatrix}\varphi_{i_1\cdots i_p}\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{jp}$$

は，$\{\omega_j\}$のとり方に無関係に定まつた微分式であり，$*$は$A^p(X)$，A^pを$A^{n-p}(X)$，A^{n-p}にうつす線型写像である。そこで$\varphi, \psi\in A^p(X)$に対して

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi\wedge*\psi$$

によつてその内積を定めると，これは正定値，対称な内積である。この内積に関する作用素dのadjointをδとする。即ち$\varphi\in A^{p-1}(X)$，$\psi\in A^p(X)$に対し，δは次の関係で定義される。

$$(d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi)$$

さらにLaplace–Beltramiの作用素$\triangle$を，

$$\triangle = d\delta + \delta d$$

によつて定義する。これらに対し，つぎの関係がなりたつ。

(C，1)　$$**\varphi = (-1)^{p(n-p)}\varphi. \quad (\varphi\in A^p)$$

(C, 2)　　$\delta\varphi = (-1)^{n(p-1)+1} * d * \varphi$.　　$(\varphi \in A^p)$

(C, 3)　　$\triangle d = d\triangle, \quad \triangle\delta = \delta\triangle$

(C, 4)　　$(\triangle\varphi, \psi) = (\varphi, \triangle\psi)$

$\triangle$は楕円型微分作用素である。このことから，多くの著しい性質が導かれる。

$L^p(X)$を，内積(φ, ψ)に関する$A^p(X)$の完備化とする。即ち$L^p(X)$はX上可測で2乗積分可能なp次微分式の作るHilbert space である。このとき，

<u>定理C．1</u>　$L^p(X)$における$\triangle A^p(X)$の直交補空間を$H^p(X)$とすれば，$H^p(X)$の元φはC^∞微分式であつて，$\triangle\varphi = 0$をみたす。

<u>定義</u>　$\triangle\varphi = 0$ をみたす微分式を調和微分式という。

<u>Remark</u>　$\triangle\varphi = 0 \Longleftrightarrow d\varphi = 0$ かつ$\delta\varphi = 0$である。

<u>定理C．2</u>　$H^p(X)$は有限次元ベクトル空間である。

$L^p(X)$から$H^p(X)$への正射影作用素HはC^∞級の核をもつ積分作用素で与えられる。

<u>定理C．3</u>　$K = \triangle A^p(X)$の閉包　とおくと，KからKへの連続線型作用素Gがあつて，$\triangle G = G\triangle =$ identity。また，GはC^∞微分式をC^∞微分式にうつす。

<u>定義</u>　$H^p(X)$の上では$G = 0$と定めることによつて，この定理のGを，$L^p(X) \to L^p(X)$の連続線型作用素に拡張する。これをもGであらわし，Green の作用素という。

<u>定理C．4</u>　H，G，はd，δ，$\triangle$と可換である。

これらの定理の結果，$A^p(X)$の任意の微分式φは

$$\begin{aligned}\varphi &= H\varphi + \triangle G\varphi \\ &= H\varphi + d\delta G\varphi + G\delta d\varphi.\end{aligned}$$

と分解される。即ちHはchain complex $(A(X), d)$におけるホモトピー作用素であつて，de Rham 群の元（コホモロジー類）はその類に属する，一意的に定まつた調和微分式で代表される。

<u>§D　複素多様体における調和微分式</u>

Xが複素n次元のコンパクト（連結）な複素多様体で，metric が Hermite 型の場合を考える。即ち

(D. 1) $$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} - dz^{\alpha} d\bar{z}_{\beta} = \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_{\alpha} \cdot \bar{\omega}_{\alpha} \quad (\bar{g}_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\beta\bar{\alpha}})$$

この場合には複素数値微分式を考えるのが自然である。これに対し，$*$ は$\mathbb{C}$－線型な写像としして延長し，内積はHermite 内積

$$(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \wedge *^{-}$$

でおきかえて考える。

d は実微分式を実微分式にうつす作用素で，その$\mathbb{C}$－線型な延長について考えているのだから，

$$d = -* d *$$

は，新らしい内積に関してもd の adjoint となる。従つて前項における結果はみななりたつ。

d が$d = d' + d''$ と分解された（§B）のに対応してδ は$\delta = \delta' + \delta''$ と分解される。δ'，δ'' はそれぞれd'，d'' の adjoint で，

$$\delta' = -* d'' *, \quad \delta'' = -* d' *$$

で与えられる。

Metric（D. 1）に対して

(D. 2) $$\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{\alpha} \omega_{\alpha} \wedge \bar{\omega}_{\alpha}$$

なる微分式を考えるとこれはX全体で定義された実の微分式である。そこで作用素

$L : A^p(X) \to A^{p+2}(X)$ を $L\varphi = \Omega \wedge \varphi$

によつて定義する。Lの adjoint をΛとする。

<u>定義</u>：$\Lambda_{\varphi} = 0$ なるときφはprimitive であるという。

ΛとLとのcommutator $[\Lambda, L]$ は，$A^p(X)$ 上では$(n-p)\times$identity となる。これをもとにして $[\Lambda, L^r]$ を計算し，それを用いて，

<u>定理D. 1</u>　$\varphi \in A^p(X)$ がprimitive であるためには，

$$L^q \varphi = 0, \qquad q = \max(n-p+1, 0)$$

が必要十分である。

定理D．2　φがprimitive で，(r，s)型ならば

$$*L^q\varphi=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}(\sqrt{-1})^{r-s}\frac{q\,!}{(n-p-q)\,!}L^{n-p-q}\varphi$$

である。ここに$p=r+s+2q$

注意：Λは$A^{r,s}(X)$を$A^{r-1,s-1}(X)$にうつす。従つて一つの微分式がprimitiveならば，それを型(r，s)の部分にわけたとき，各部分がprimitive である。

定理D．3　p次のprimitive な微分式全体のなす空間を$E^p(X)$とかけば，$A^q(X)$は

(D．3)　$$A^q(X)=\sum_{r=0}^{[q/2]}L^r\cdot E^{q-2r}(X)$$

と直和に分解される。

定義　Hermitean metric(D．1)がKählerであるとは，(D．2)できまるΩがclosed であること，即ち$d\,\Omega=0$なることである。

定理D．4　Kähler metric の場合には，つぎの関係がなりたつ。

(D．4)　$\Lambda d'-d'\Lambda=\sqrt{-1}\,\delta''$，$\Lambda d''-d''\Lambda=-\sqrt{-1}\,\delta'$

(D．5)　$\triangle L=L\triangle$，$\triangle\Lambda=\Lambda\triangle$

(D．6)　$d'\delta''+\delta''d'=0$，$d''\delta'+\delta'd''=0$

(D．7)　$\triangle=2(d'\delta'+\delta'd')=2(d''\delta''+\delta''d'')$

これから次のことがわかる。

(a)　Hはd，d'，d''に対して同時にホモトピー作用素である。

(b)　$A^p(X)=\sum_{r+s=p}A^{r,s}(X)$に対応して，調和微分式の空間も$H^p(X)=\sum_{r+0=p}H^{r,s}(X)$と分解される。

(c)　分解(D．3)に対応して，$H^q(X)=\sum_r L^r\cdot HE^{q-2r}(X)$なる分解がなりたつ。

$H^{r,s}(X)\cong H^s(X,\ \Omega^r)$　(Dolbeault の定理)であるから，この空間の次元を$h^{r,s}$とおけば，(φとともに$\overline{\varphi}$が調和微分式だから)$h^{r,s}=h^{s,r}$.

$b_p=\sum_{r+s=p}h^{r,s}$のため，コンパクトなKahler 多様体においては，奇数次元の

Betti 数は偶数である。

Kähler 多様体の最も重要な例として，射影空間内の代数的多様体がある。$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の斉次座標を$(\zeta_0,\ \cdots\cdots,\ \zeta_N)$とすると，$\zeta_j \neq 0$ なる部分では

$$z_1 = \zeta_0/\zeta_j,\ \cdots,\ z_j = \zeta_{j-1}/\zeta_j,\ z_{j+1} = \zeta_{j+1}/\zeta_j,\cdots,z_N = \zeta_N/\zeta_j$$

が，その解析的な局所座標を与える。

$\psi_j = \log(1+\sum_{\alpha=1}^{N}|z_\alpha|^2)$，$g_{\alpha\bar\beta} = \dfrac{\partial^2\psi_j}{\partial z^\alpha \partial \bar z_\beta}$ とおくと，$ds^2 = \dfrac{1}{2\pi}\Sigma g_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha d\bar z^\beta$ は(jのとり方に無関係になつて)$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$上にKähler metric をきめる。$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$のn次元解析的部分多様体Xは，それからひきおこされたKähler metric をもつ。

このmetric においては $\theta(\Omega) = Y$ である。ここにθは附録§Aにおけるθであり，Yは$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$の超平面によるXの切断面がきめる，X上の$2n-2$次元ホモロジー類である。

§E 複素ベクトル・バンドルにおける調和微分式

コンパクトな複素多様体X上に，$\mathbb{C}^q$ をファイバーとする複素解析的なベクトル・バンドルFが与えられているとき，§Bのように$A^{r,s}(X,\ F)$ を考える。X上にHermitean metric(D．1)を入れ，さらに$A^{r,s}(X,\ F)$にもつぎのように内積を導入する。U_jでのC^∞函数を成分とする正定値Hermite 行列h_j で，$U_j \cap U_k$ では

$$(\text{E}.1)\qquad {}^t g_{jk} h_j \bar g_{jk} = h_k$$

をみたすものをとる。(このような$\{h_j\}$ は存在する。Nakano〔11〕) そしてφ，ψ $A^{r,s}(F,\ X)$ $\varphi = \{\varphi_j\}$，$\psi = \{\psi_j\}$ に対し

$$(\text{E}.2)\qquad (\varphi,\ \psi) = \int_X \sum_{\alpha,\beta} h_{j\alpha\beta}\varphi_j^\alpha \wedge * \overline{\psi_j{}^\beta}$$

と定める。ここにφ_j^αはφ_j の成分を，$h_{j\alpha\beta}$ はh_j の成分をあらわす。(E．1)によりintegrand はjによらずに決つていて，(E．2)は正定値Hermite内積をあらわす。

(E．2)に関するd'' のadjoint を ϑ とかき，$\Box = d''\vartheta + \vartheta d''$ とおく。$\Box$に対しても調和微分式に関する定理がなりたつ。(Baily〔2〕)

定理E．1　内積（E．2）に関する$A^{r,s}(F,\ X)$の完備化$L^{r,s}(F,\ X)$内に有限次元部分空間$H^{r,s}(F,\ X)$があり，$H^{r,s}(F,X)\ni\varphi$ならφはC^∞で$\Box\varphi=0$（即ちφは調和微分式である。）$L^{r,s}\rightarrow H^{r,s}$の射影作用素$H$と，$L^{r,s}\rightarrow L^{r,s}$の連続作用素$G$とがあつて，

$$\begin{cases} d''G=Gd'',\ \vartheta G=G\vartheta,\quad HG=GH=0 \\ H+\Box G=\text{identity} \\ H,\ G\text{ は }A^{r,s}(F,\ X)\text{ を }A^{r,s}(F,\ X)\text{ 内にうつす} \end{cases}$$

定理E．2　$H^q(X,\ \Omega^r(F))\cong H^q(\sum_s A^{r,s}(F,X),\ d'')\cong H^{r,s}(F,X)$

Fのファイバー上の複素数値一次函数の全体はX上の解析的ベクトル・バンドルF^*（Fに双対的なバンドル）をなす。F^*はtransition matrix $\{{}^t g_{jk}{}^{-1}\}$で定義される。Fの"metric" $\{h_j\}$に対し$\{{}^t h_j{}^{-1}\}$はF^*のmetricを定める。対応

$$A^{r,s}(F,\ X)\ni\varphi=\{\varphi_j\}\Leftrightarrow\varphi^+=\{\varphi_j{}^+\}$$

$$\varphi_j{}^+=h_j*\overline{\varphi_j}$$

は，$A^{r,s}(F,\ X)$と$A^{n-r,n-s}(F^*,\ X)$との間のanti-$\mathbb{C}$-linearな同型対応である。しかもこの対応によつて調和微分式は調和微分式にうつる。

定理E．3　$H^{r,s}(F,\ X)$と$H^{n-r,n-s}(F^*,\ X)$とは，（本質的には）内積（E．2）で与えられるpairingによつて双対的なベクトル空間である。

§F　複素円環体上の有理型函数とテータ函数

n次元複素ベクトル空間$\mathbb{C}^n$と，$\mathbb{C}^n$のdiscreteな部分群Dでrank $2n$なるものとが与えられたとき，$\mathbb{T}=\mathbb{C}^n/D$は複素円環体とよばれる。$\mathbb{T}$上に有理型函数$f$があるとき，これを$\mathbb{C}^n$上の函数と考えれば，$f$は$n$変数の（有理型）$2n$重周期函数即ちアーベル函数である。$n\geqq 1$のときはこのような函数は即ち楕円函数であつて，任意のDに対して十分多く（$\mathbb{T}$即ち楕円曲線を射影空間にimbedするほど多く）存在するが，$n=2$のときは事情がかわつてくる。

$\mathbb{T}$上に有理型函数fが与えられると，$\mathbb{T}$の適当な（単純）開被覆$\{U_j\}$に関して，U_j上では$f=\psi_j/\varphi_j$（φ_j，ψ_jはU_jで正則，各点で共通因子をもたない）とあらわすこ

とができる。

$g_{jk}=\varphi_j/\varphi_k$ は $U_j\frown U_k$ で正則で決して0にならない函数である。

$$d\log g_{jk}+d\log g_{kl}+d\log g_{lj}=0$$

であるから，U_j における型（1，0）のC^∞微分式ζ_j があつて

$$d\log g_{jk}=\zeta_k-\zeta_j$$

とかける。$d\zeta_j=d\zeta_k=\xi$ は，T全体での大域的微分式で型（2，0）と型（1，1）の項から成り，$d\xi=0$

TにはHermitean metric $ds^2=\sum_\alpha dz^\alpha dz^{-\alpha}$（$(z)$は$C^n$の座標）を入れる。これはKähler metric である。これに対しては調和微分式は dz^α, $d\bar{z}^\beta$ （α, $\beta=1,\cdots,n$）の外積の，定係数1次結合となる。そこで調和微分式の理論（定理C・4と§D（a，b））によって

$$\xi=H\xi+dh=\Sigma\, a_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge dz^\beta+\Sigma\, b_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta+dh$$

（hはT上の微分式）とかける。ζ_j を ζ_j-h でおきかえれば

$$\begin{cases} d\log g_{jk}=\zeta_k-\zeta_j\ , \\ d\zeta_j=d\zeta_k=\xi=\Sigma\, a_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge dz^\beta+\Sigma\, b_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta \end{cases}$$

$\pi: C^n\to T$ によるU_j の逆像$\pi^{-1}(U_j)$ の連結成分を$U_{j\lambda}$（$\lambda=1,2,\cdots$）とかく。（$U_{j\lambda}\cong U_j$ と考えてよい）

$$\eta=\Sigma\, a_{\alpha\beta}z^\alpha dz^\beta-\Sigma\, b_{\alpha\beta}z^{-\beta}dz^\alpha$$

とおくと，ηはC^n 上の微分式で$d\eta=\pi^*\xi$. 従つて$U_{j\lambda}$ では $\pi^*\zeta_j-\eta=\xi_{i\lambda}$ はclosed である。$\xi_{j\lambda}$ が型（1，0）であることを使うと，$\xi_{j\lambda}$ は正則なことがわかる。U_j 内に定点a_j をとり，$U_{j\lambda}$ 内におけるその逆像を$a_{j\lambda}$ とする。$\phi_{j\lambda}(z)=\exp(\int_{a_{j\lambda}}^z\xi_{j\lambda})$ とおけば $\phi_{j\lambda}$ は$U_{j\lambda}$ で0にならない正則函数で$U_{j\lambda}\frown U_{k\mu}$ では

$$\log g_{jk}=\log\phi_{k\mu}-\log\phi_{j\lambda}+C_{j\lambda,k\mu} \qquad (C_{j\lambda,k\mu}\text{は定数})$$

である。$\{C_{j\lambda,k\mu}\}$ を mod. $2\pi\sqrt{-1}$ で考えると，被覆 $\{U_{j\lambda}\}$ に関する $\mathbb{C}$ (mod. $2\pi\sqrt{-1}$) −valued 1−cocycle となるが，$\mathbb{C}^n$ のコホモロジーは trivial だから，この cocycle は coboundary である。従つて定数 $d_{j\lambda} \neq 0$ があつて，$\phi'_{j\lambda} = d_{j\lambda}\phi_{j\lambda}$ とおけば

$$\varphi_j/\varphi_k = \phi'_{k\mu}/\phi'_{j\lambda}$$

即ち $\Theta_1 = \varphi_j \cdot \phi'_{j\lambda} = \varphi_k \cdot \phi'_{k\mu}$ は

$\mathbb{C}^n$ 全体での正則函数である。$\xi_{j\lambda}$ の形をみれば

$$\Theta_1(z+d) = \Theta_1(z) \cdot \exp(L_d(z)) \qquad (d \in D)$$

$L_d(z)$ は d によつてきまる z の一次式

であることがわかる。このような性質をもつ $\mathbb{C}^n$ 上の函数をテーター函数という。$\Theta_2 = f \cdot \Theta_1$ もテーター函数で，Θ_2 に対応する $L_d(z)$ は Θ_1 に対するものとひとしい。

$\exp(L_d(z))$ は $\mathbb{C}^n \times D \to \mathbb{C}^*$ の函数とみれば holomorphic な factor (§3) であり，テーター函数はこの factor に対応する複素直線バンドルの正則な cross section をあらわす。

一般に複素多様体 X 上に複素直線バンドル B があり，B の正則な cross sections $\varphi^{(0)}, \cdots, \varphi^{(m)}$ 〔被覆 $\{U_j\}$ に関して $\varphi^{(\alpha)} = \{\varphi_j^{\alpha}\}$〕が与えられれば，

$$U_j \ni x \to \Phi(x) = (\varphi_j^{(0)}(x) : \cdots : \varphi_j^{(m)}(x)) \in \mathbb{P}^m$$

によつて，X から $\mathbb{P}^m$ への写像 Φ がきまる。B が“十分多くの” cross section をもてば Φ は $X \to \mathbb{P}^m$ の biregular imbedding となる。

実際に $L_d(z)$ の形をしらべてテーター函数の存在するための条件（D に課せられる条件）をきめるのは，ここではできない。結果だけをあげる。（Weil〔16〕は elegant であるが，ここにあげる形のためには Siegel〔14〕又は Conforto〔3〕をみる方が早道である。）

D の一組の生成元の成分をならべて $n \times 2n$ 行列 ω を作る。

定理F．1　有理数を成分とする$2n\times 2n$行列Pで，つぎの条件をみたすものを考える。

（a）　${}^{t}P=-P$

（b）　$\omega P {}^{t}\omega=0$

（c）　$\sqrt{-1}\,\omega P {}^{t}\bar{\omega}$ は正定値Hermite 行列

ωに対しこのようなPが存在するとき，そのときに限り，適当なfactor $\exp(L_d(z))$が存在して，n個の変数$z^1 \cdots\cdots z^n$ に実質的にdepend するようなテーター函数が存在する。

定理F．2　前定理の条件がみたされるとき適当なfactor があつて，($\exp(3L_d(z))$でよい)対応するテーター函数によつて$\mathfrak{T}$は射影空間内に双正則にimbed される。

参　考　文　献

〔1〕 秋月康夫： 調和積分論，上下．岩波書店（1955）

〔2〕 W. L. Baily: The decomposition theorem for V–manifolds, Amer. J. Math., vol. 78 (1956), pp. 862 ～ 888.

〔3〕 F. Conforto: Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie Springer Verlag (1956).

〔4〕 F. Hirgebruch: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math., Springer Verlag (1956).

〔5〕 岩沢健吉： 代数函数論．岩波書店，(1952).

〔6〕 K. Kodaira–D. C. Spencer: On deformations of complex analytic Structuses, I, II. Annals Math., vol. 67 (1958), pp. 328 ～ 466.

〔7〕 ______ : 仝上，III. Ibid., vol. 71 (1960), pp. 43 ～ 76.

〔8〕 ______ : Existence of complex structures on a differentiable family of deformations of compact complex manifolds. Ibid., vol. 70, (1959), pp. 145 ～ 166.

〔9〕 K. Kodaira–L. Nirenberg–D. C. Spencer: On the existence of deformations of complex analytic structures. Ibid., vol. 68, (1958), pp. 450 ～ 459.

〔10〕 S. Nakano: Parametrization of a family of bundles, Mem. College Sci., Kyoto Univ., Ser A. vol. 33, Math. (1961), pp. 353 ～ 366.

〔11〕 ______ : On complex analytic vector bundles, J. Math.

Soc. Japan, vol. 7 (1955), pp. 1 ~ 12.

[12] M. S. Narasimhan–C. S. Seshadri: Holomorphic vector bundles on a compact Rieman surface, Math. Annalen, Bd. 155 (1964), pp. 69 ~ 80.

[13] A. Newlander–L. Nirenberg: Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math. vol. 65 (1957), pp. 391 ~ 404.

[14] C. L. Siegel: Analytic functions of several complex variables, Mimeographed note, the Institute for Advanced Study, Princeton (1948).

[15] G. de Rham: Variétés differentiables, Act. Sci. Ind., Hermann (1955).

[16] A. Weil: Introduction a l'étude des variétés Kähleriennes, Hermann.(1958).