数理解析研究所講究録
5巻 1965年 83-90

W^* ー代数束と C^* ー代数束の物理的応用

京都大学数理解析研究所　　荒　木　不二洋

§1.　場の量子論の W^*代数による公理化

場の量子論で W^* 代数がどのように使えるかということを説明するのが目的である。

まずその前に W^* 代数を導入する背景となる場の量子論の一番基本的な枠，すなわち量子論と相対論の仮定について一言ふれておく必要がある。

量子論の数学的な道具立てはよくしられたように，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ であって，$\mathfrak{H}$ の中のの単位ベクトルで物理的状態を表し，$\mathfrak{H}$ の上の作用素で物理量を表す。

次に相対論の仮定については，時空（Minkowski 空間）Mに内積

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{i=1}^{3} x^i y^i, \quad x \in M, \quad y \in M$$

を定義し，この内積から導かれる時空の二点 x，y 間の距離 $(x-y, x-y)$ を不変にするような変換の作る群G（非斉次ローレンツ群またはポアンカレ群 $\mathcal{P}$，通常単位元に連結した成分だけに限った $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ を考える）に関して物理系が“不変”であることを要請する。量子論の枠内では，この仮定は $\mathfrak{H}$ の中で G の被ふく群 $\widetilde{G}$ の連続なユニタリ表現 $U(\widetilde{g})$，$\widetilde{g} \in \widetilde{G}$を考えることに帰着する。ここで $U(\widetilde{g})$ の物理的な意味は，g によつて物理量や状態の位置方向等が変化するが，それに対応する $\mathfrak{H}$ の作用素やベクトルの変換が $U(\widetilde{g})$ によるユニタリ変換で表されるということである。

ユニタリー作用素 $U(\widetilde{g})$ のうち translation $x \longrightarrow x + a$ に対応するものは特別の物理的意味があるので特に $T(a)$ と書くことにする。$T(a)$ は互に可換で，同時にスペクトル分解ができて，

$$T(a) = \int \exp\, i(p, a)\, dE(p) = e^{i(P, a)}$$

のように書ける。ここで自己共軛作用素

$$P^{\mu} = \int p^{\mu} \ dE(p)$$

はエネルギー（0成分）および運動量（空間成分）という物理的意味を持つ。他の U (g) との関係から，P^{μ} のスペクトルはローレンツ変換で不変でなければならないが，通常次の性質を要請する：

(i) $P^{\mu}=0$ で点スペクトルを持ち，その固有空間は一次元である。従つて，

$$P\Omega = 0 \qquad (U(g)\,\Omega = \Omega)$$

をみたす単位ベクトル Ω が c 数係数を除いて一意的に定まり，これを真空と呼ぶ。

(ii) 真空のエネルギーが最低である。従つて，$\Omega^{\perp}$ では P^{μ} は点スペクトルを持たず，そのスペクトルは

$$\overline{V}_{+} \equiv \{\ p^{\mu}\ ;\ \ p^{0} \geqslant 0\ ;\ \ (p,p) \geqslant 0\ \}$$

に取られる。

(iii) 場合によつては，$\Omega^{\perp}$ で P^{μ} のスペクトルが

$$\overline{V}_{m} \equiv \{\ p^{\mu}\ ;\ p^{0} \geqslant 0\ ,\ \ (p,p) \geqslant m^{2}\ \}\ , \qquad m > 0$$

に限られるという条件をつけることもある。

上記 (i)〜(iii) または (i)〜(ii) はスペクトル条件と呼ばれる。

以上に説明した道具立ては，$\mathfrak{H}$ と U(g)，$g \in \tilde{G}$ であるが，これだけでは物理的記述に不充分である。例えば粒子の散乱を記述することができない。

そこで物理量とそれが観測される時空領域との対応に着目する。例えば，この部屋 E にある操置をある時間 $[\tau_1, \tau_2]$ の間働かして測定できる物理量は時空領域 $[\tau_1, \tau_2] \times E$ に属すると呼ぶ。すると，各時空領域 $B \subset M$ (bounded domain に制限する。) に対応して，Bに属する物理量（局所観測量と呼ぶ）全体の集合，あるいはそれに対応した $\mathfrak{H}$ 上の作用素の集合が考えられる。これを O (B) と書く。この O (B) を含む最小のW^*代数 R (B) や C^*代数 C (B) を考えて，O (B) に対するいろいろの物理的要請を R (B) や C (B) の性質にやきなおすと場の量子論のW^*代数や C^*代数による公理化が得られる。次にW^*代数 R (B) に対して，今まで考えられている公理を列挙する。

一般的な公理

(1) Isotony : $B_1 \supset B_2 \Rightarrow R(B_1) \supset R(B_2)$

(2) Covariance : $U(\tilde{g})\, R(B)\, U(\tilde{g})^{-1} = R(gB)$

以下ではgが$x \rightarrow x + a$という translationの場合だけ使うのでこれを特に$T(a)$と書く。

$$T(a)\, R(B)\, T(a)^{-1} = R(B+a)$$

$$B + a = \{ x + a \;;\; x \in B \}$$

(3) Locality $B_1' \supset B_2 \Rightarrow R(B_1)' \supset R(B_2)$

$$B_1' \equiv \{ y \;;\; x \in B_1 \Rightarrow (y - x,\; y - x) < 0 \}$$

B_1'はB_1の causal adjointと呼ばれる。この公理の物理的意味は次の通りである。$(x-y, x-y)<0$の場合xとyとは空間的であるという。この場合適当なローレンツ変換でxとyとは同時刻になる。従って，xとyとの間に作用の伝達があり得ないという物理的要請（相対論的因果律）をおく。これを言いなおして，もし二つの時空領域が互に空間的（i.e. $B_1' \supset B_2$）ならば，二つの領域の局所観測量は同時観測可能であり，従って対応する作用素が可換であるとしたものが，上記公理3である。

上記三つの公理は物理的な意味がはっきりしたものである。

特定の場合に成立すべき公理

(α) Additivity : $R(B_1) \vee R(B_2) = R(B_1 \cup B_2)$

$$(R_1 \vee R_2 \equiv (R_1 \cup R_2)'')$$

(1) はこの条件に含まれる。

(β) Duality : $R(B)' = \underline{R}(B')$ if $B'' = B$

ただし任意のSに対し，$\underline{R}(S) \equiv \bigvee_{B_1 \subset S} R(S)$ で join は S に含まれるすべての bounded domain B_1 についてとる。

(γ) Cyclicity of Ω. $\overline{R(M)\,\Omega} = \mathfrak{H}$, $R(M) = \bigvee_{B} R(B)$

ここにΩは真空を表す。

§2. 局所観測量の作るW^*代数の性質

上記の公理から導かれる数学的性質のうちW^*代数という立場から重要なもののみあげる。証明はすべて省略する。まず(α)，(γ)とスペクトル条件から；$R(M) = \mathcal{B}(\mathfrak{H})$（i.e. $R(M)' = \{ C\mathbf{1} \}$）がでる。

次に，基本的な性質として

$$\overline{R(B)\,\Omega} = \overline{R(M)\,\Omega} \qquad (= \mathcal{H} \text{ by } (\gamma))$$

がある。これはスペクトル条件，(2) および (α) から導かれるもので Reeh Schlieder の定理といわれる。これから，任意の bounded domain B に対し Ω が R(B) の cyclic vector でもあり separating vector でもあることがわかる。（後者には (3)を使う。）

これを使って R(B) が infinite type であることが，Kadison によつて示された。S がある方向の translation で不変で S' が interiorをもてば（例えば，$S=\{x;|x^0|<x^1\}$）$\underline{R}(S)$ が type I の factor ではあり得ないことが示される。そのほか type については $\underline{R}(B)$ が type Ⅲ の factor であることが予想されているが，これは例については示されたけれども，一般の場合，物理的な要請から従う性質かどうかまだはつきりしていない。

これに関して次のような問題が解けると都合がよい。今 R_1，R_2 が factor，$R_1 \neq R_2$，$R_2 \subset R_1$ であり，Ω が R_1 および R_2 の cyclic and separating vector で，T が Ω を唯一の point spectrumとするユニタリー作用素で，$TR_1T^{-1}=R_2$ をみたすものとする。この時，R_1 および R_2 が type Ⅰ であり得るか。また type Ⅱ であり得るか。（type Ⅰ の部分については，ヒルベルト空間のテンソル積，$H=H_1 \otimes H_2$ でトレース型作用素 ρ が，H_1 についてだけ trace をとることにより ρから得られる H_2のトレース型作用素 $\rho_1 \equiv tr_1\,\rho$とユニタリー同値になり得るかということに帰着できる。）

Reeh Schlieder と別の系統の定理としてボルヒヤースの定理がある。これは

$$R(B) = R(\hat{B})$$

の形の定理で，例えば B が時間軸上の線分の適当な形の近傍の時，$\hat{B}$ として B''がとれる。（B'' は $P_1\,P_2$ を頂点とする double light cone を含む。）これの証明にはやはりスペクトル条件，(2)および (α) を仮定し，多変数関数論の正則包構成の手法を用いる。実はこれが，(β) を考える一つの基盤になつた。

(β) の物理的意味は次のようである。今 B として時間軸上の二点 P_1 P_2 を頂点とする double cone ;

$$\{P\ ;\ (P-P_1,\ P-P_1)\geqq 0,\quad (P_2-P,\ P_2-P)\geqq 0,$$
$$(P_2-P,\ P-P_1)\geqq 0\ \}$$

を考える。今 $P_1+P_2/2$ を通って時間軸に垂直な平面を σ とし，σ 上で時間軸からの距離が $|P_1-P_2|/2$ をこえない点の作る球を S とすると，R（B）は S の中での局所観測量を含み，$\underline{R}(B')$ は σ 上 S の外での局所観測量を含む。通常 S のような平面上の局所観測量を全部合わせると，それだけで物理系の異る状態を見分けることができる（因果律）と考えるので，R（B）と $\underline{R}(B')$ の join は $\mathfrak{h}$ の有界線形作用素全体 $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ を生成すると考える。また Locality により R（B）と $\underline{R}(B')$ は commute するので，結局 R（B）と $\underline{R}(B')$ は factorization を作ることが推察される。勿論，この議論は物理的にも S の境界で問題が生じ，数学的にも factorization からすぐ（β）とはならないが，例題でも（β）が確かめられる場合があるので，（β）という公理を考えることが有意義である。

（β）と（α）から，$B''=B$ のような bounded domain B およびそのような B の causal adjoint B' 全体の family を仮に $\mathcal{F}$ とおくと，$B\rightarrow R(B)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathfrak{h}$ 上のW^*代数全体の作る束の中への束論的な同型対応である。

この同型対応を特に先の σ のような平面に限つた場合は特に興味がある。すなわち，σ の任意の subset $\underset{\sim}{B}$ に対し，

$$R(\underset{\sim}{B})\equiv \underline{R}(\underset{\sim}{B''})$$

を対応させる。ただし empty set に対しては，$\{\lambda 1\}$ を対応させる。この $R(\underset{\sim}{B})$ に対して

$$R(\underset{\sim}{B})=\bigvee_{\alpha} R(\underset{\sim}{B}_\alpha)\qquad \text{if}\ B=B_\alpha$$

$$R(\underset{\sim}{B}^c)=R(\underset{\sim}{B})'$$

$$R(M)=\mathcal{B}(\mathfrak{h})$$

という性質が要請される。すなわち R が σ の subset の作る Boolean algebra から $\mathfrak{h}$ 上のW^*代数全体の作る束への準同型対応であることを公理に採用するわけである。

このようなW^*代数の作る Boolean latlice の構造が解析できると大変役に立つと思思われる。

type I factor の complete Boolean algebra については analysis

が容易であると思われる。また complete でない場合には latlice completion をして non type I W^* 代数が得られるが，そのような W^* 代数の分類が興味ある問題である。

§ 3. C* 代数と統計力学的状態

時空の有限部分だけでの観測では無限遠方に起つていることはわからない。そこで R (B) を観測しているだけでは空間全体の総電荷も多分わからないし，気体が空間につまつているか，それとも無限遠では真空になつているかもわからない。もちろん，Bを大きくしていけば，今考えているBのはんいではわかるけれども，常にBよりも外でどうなつているかがきまらない。そこで，すべての bounded domain B に対する R (B) の全体を代数的にとらえて，物理的な状態はその上の positive linear functional であると考えてやると，このようにして定義した状態は，有限個の粒子の状態も，それと同種の粒子が無限個空間に満ちているガスの状態も，またもつと複雑な状態もすべて含んでいると考えられる。

このようにして，R (B) 全体をヒルベルト空間 $\mathfrak{h}$ から切り離して考えると都合がよいと思われるので，R (B) (B : bounded domain) 全体の uniform closure $\mathfrak{A}$ を考え，これを C^* algebra of quasilocal observable と呼ぶ。$\mathfrak{A}$ の種々の表現が物理系の種々の状態を表すと解釈する。

この定義で，数学的には，R (B) のかわりに $\mathfrak{A}(B) \subset R(B)$ ，$\mathfrak{A}(B)'' = R(B)$ のような適当な C^* 代数 $\mathfrak{A}(B)$ を考え，$\bigcup_{B} \mathfrak{A}(B)$ の uniform closure として $\mathfrak{A}$ を定義した方が便利かもしれない。

$\mathfrak{A}$ の基本的な性質としては，R (B) が factor なら $\mathfrak{A}$ が simple であることが Misra によつて示されている。また物理的には $\mathfrak{A}$ の既約表現が例えばきまつた総電荷を持つ有限個粒子の状態全体，とかきまつた密度の温度 0 の状態とか，いろいろあると考えられる。

このような考え方は，非相対論的なガスでも適用できる。この場合は時間一定の平面 σ 上で前に述べた公理をみたす R (B)(または $\mathfrak{A}$ (B)) 全体を考えるわけであるが，この場合，R (B) はすべて type I の factor としてよさそうである。そうすると，type I factor の作る Boolean algebra の表現の問題となる。（正準交換関係の表現もこのように formulate することもできる。）

この C^* 代数を使う方法の統計力学への応用はまだ研究されていないので，これ以上立入つ

た話はできないが，上にのべたような物理との対応は，物理的直観を C^* 代数の研究に利用する可能性を与えると思われる。

その一つの例として表現の weak equivalence についての Fell の定理は Haag と Kastler により，物理的な意味づけがなされた。（実際 Haag は Fell の論文を読む前から Fell の結果を物理的に予想していた。）

また真空の uniqueness や存在等について，C^* 代数的な approach が望ましく，この方面の研究も進められている。（文献参照）

文　　　献

W*代数による場の量子論の公理については適当な文献がない。筆者の Zürich での lecture note を本にして Benjamin から出す予定でそれに詳しく書くつもりだが，さしあたつては下にあげる Haag と Kastler の論文を参照。

Reeh Schlieder の定理は

(1) H. Reeh and S. Schlieder, Nuovo Cimento 22, 1051 ff. (1961).

W*代数の枠での証明は

(2) H. Araki, J. Math. Phys. 5, 1 ff (1964).

の§9 Lemma 7 にある。Kadison の論文は

(3) R. V. Kadison, J. Math. Phys. 4, 1511 ff (1963).

自由場の場合の type については上記 (2) および

(4) H. Araki, Progr. Theor. Phys. 32, 956 ff (1964).

ボルヒヤースの定理の証明については

(5) H. J. Borchers, Nuovo Cimento 19, 787 ff (1961).
(6) H. Araki, Helv. Phys. Acta 36, 132 ff (1963).

Haag と Kastler の仕事は

(7) R. Haag and D. Kastler, J. Math. Phys. 5, 848 ff (1964).

Misra の仕事は

(8) Misra, Helv. Phys. Acta 38 189 ff (1965).

真空の uniqueness に関しては

(9) H. Araki, Progr. Theor. Phys. 32 844 ff (1964).
(10) S. Doplicher, Comm. Math. Phys. 1, 1 ff (1965).

参照のこと。

自由場の例については文献 (2) および

(11) H. Araki, J. Math. Phys. 4, 1343 ff (1963).
(12) D. Kastler, Comm. Math. Phys. 1, 14 ff (1965).