数理解析研究所講究録
5巻 1965年 1-18

C^*—algebraのテンソル積とその表現

東北大学理学部　竹崎正道

緒言

多粒子系の量子力学に於て，Hilbert space のテンソル積やそれにともなう作用素環のテンソル積がしばしばあらわれて来るようである。これは物理学上の問題としてばかりでなく，純粋数学の問題としても取り上げることが要請されているように思われる。例えば，locally compact groupの直積の表現論を展開しようとすれば，そこではgroup C^*—algebra のテンソル積を取りあげざるを得ない。

作用素環のテンソル積研究は，作用素環の研究出発と同時に J. von Neumann 及びその協力者 F. J. Murray により1936年に始められている〔16〕。Hilbert space H 上の factor を M, その commutant を M'，H上の bounded operator全体の作る algebra を B(H) とした時，Hが有限次元ならば良く知られているように $B(H) = M \otimes M'$ となる。F. J. Murray と J. von Neumann はこの事実が無限次元の時にも成立つかという問題を提起し，これが成立つこととMがI型になることは同値なことを示した。そして，彼等は factor の multiplicity theory との関連からもつぱら一方がI型 factor である場合のテンソル積を取り上げた。J. von Neumann は作用素環と量子力学との学びつきに注目して，場の理論に対する数学的裏づけという立場から，Hilbert space の無限直積を取り上げ，その土台をすえている〔19〕。第二次大戦前は，作用素環の研究は殆ど J. von Neumann と F. J. Murray 二人の独壇場の観があつた。彼等の研究が一段落した後，L. M. Gelfand や M. A. Naimark等ソビエト学派による normed algebra の研究の進展と共に，第二次大戦後群の表現論との関係で作用素環の研究が多くの数学者により取り上げられた。特に，C^*—algebra の理論は space—free に展開されるようになり，J. von Neumann 等の取り上げた作用素環は W^*—algebra と呼ばれて（後に，J. Dixmier により von Neumann algebra と命名された）大域的な理論が展開された。このような状況を背景に，1950年代に入つて R. Schatten 等の Banach space のテンソル積研究〔24〕が一段落すると共に，鶴丸，御園生等により作用素環のテンソル積が研究され始めた。von Neumann algebra のテンソル積

の方が具体的構造の image が得やすいことなどもあつて，若干おくれて取り上げられたにもかかわらず先に研究が進展して J. Dixmier の同型対応の分解などに見られる様に，特に Multiplicity theory への応用の面で幾多の成果をあげ，また新しい代数型の構成にも力を発揮した。C^*－algebra のテンソル積は鶴丸により最初に取り上げられ，それが spacefree な概念として構成されるか否か，又当時一段落した Hanach space のテンソル積研究の中で現れて来た cross－norm の導入の多様性といつたところに大きな関心が向けられ，特に cross－norm をどう処理するかに研究の焦点があつた。1961年になつて，J. Glimm の画期的な研究〔5〕により separable C^*－algebraの理論が von Neumann algebraのそれから独立した研究分野として確立されて以来，C^*－algebraのテンソル積をもう一度表現論的立場からとらえると共に，その cross－normについても，もつと広い立場から眺めようとする動きが，A. Wulfsohn, A. Guichardet, 竹崎等の研究の中に表れて来ている。その一つは，1957年の G. W. Mackey の研究〔12〕に端を発した，表現論を dual space の上に建設するという指導理念の下に，テンソル積の表現論的構造を解明しようとするものである。他の一つは，鶴丸等の提起した α－normが唯一つの妥当な cross－norm であろうかというところから研究を進めようとするものである。

例えば次の様なことは直ちに問題となるところである。C^*－algebra A_1, A_2 の代数的テンソル積$A_1 \odot A_2$ 上には，それによる completion が C^*－algebraとなるものは果して鶴丸の導入した α－norm のみであろうか？ その他にあるとすれば α－norm との関係はどうなつているであろうか？ その様な norm β による completion を A_β とすれば，A_β の表現と A_1 A_2 の表現はどういう関係にあるだろうか？ 即ち，A_β の表現は A_1, A_2 の表現にどの様に分解されるだろうか？ A_1, A_2 の表現 π_1, π_2 の型とそのテンソル積 $\pi_1 \otimes \pi_2$ の型との関係はどうか？ A_β の dual space $\widehat{A_\beta}$ は A_1, A_2 の dual space , $\widehat{A_2}$によりどの様に記述されるのか？ 特に $\widehat{A_\beta} = \widehat{A_1} \times \widehat{A_2}$ とはならないのか？等々.....

本講演では，上の様な点について，鶴丸，A. Guichardet, A. Wulfsohn, 竹崎等によりこれまで既に発表された結果と若干の未発表のものとをまとめて次の様な内容でお話しします。

§ 1.　C^*−algebraのテンソル積の定義

C^*−algebra A_1, A_2 の代数的テンソル積を $A_1 \odot A_2$ とすると，$A_1 \odot A_2$ は自然な仕方で複素数体上の algebraになる。この algebra に於て ＊−operation を各 $x = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \otimes x_{2,i} \in A_1 \odot A_2$ に対して $x^* = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i}^* \otimes x_{2,i}^*$ と定義すれば，$A_1 \odot A_2$ は ＊−algebraになる。
R. Schatten の著書〔24〕でも明らかなように，$A_1 \odot A_2$ に対する cross−norm の考え方は unique ではない。そこで $A_1 \odot A_2$ の norm として，それによる completion が C^*−algebra になる様なものを我々は取り上げる。そのために，その normに対して

$$\|xy\| \leqq \|x\|\,\|y\| \qquad x, y \in A_1 \odot A_2$$
$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \qquad x \in A_1 \odot A_2$$
$$\|x_1 \otimes x_2\| = \|x_1\|\,\|x_2\| \qquad x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2$$

を満すことを要請し，その様な norm を $A_1 \odot A_2$ 上の compatible norm と呼ぶ。$A_1 \odot A_2$ 上の compatible norm は Banach space としてのテンソル積とは大分様子が違うが，この場合も後で述べる如く unique ではない。$A_1 \odot A_2$ に compatible norm を与えて，その completion として A_1, A_2 のテンソル積を定義しようというのである。
一般に，C^*−algebra A の state 全体を $\mathfrak{S}(A)$, pure state 全体を $\mathfrak{P}(A)$ と表することにする。各 $\varphi_1 \in \mathfrak{S}(A)$ ，$\varphi_2 \in \mathfrak{S}(A)$ に対して $A_1 \odot A_2$ 上の linear functional $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ を

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 (x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_1 (x_{1,i}) \; \varphi_2 (x_{2,i}) \quad ,$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \otimes x_{2,i} \; (A_1 \odot A_2)$$

と定義すれば，$\varphi_1 \otimes \varphi_2$ は $A_1 \odot A_2$ 上の positive linear functional になる。そして，$x \in A_1 \odot A_2$ の α－norm を

$$\| x \|_{\alpha} = \sup \left\{ \frac{\varphi_1 \otimes \varphi_2 (y^* x^* x y)^{\frac{1}{2}}}{\varphi_1 \otimes \varphi_2 (y^* y)^{1/2}} \; ; \; (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathfrak{S}(A_1) \times \mathfrak{S}(A_2), y \in A_1 \odot A_2 \right\}$$

とおくと，

定理 1. $\|\cdot\|_{\alpha}$ は $A_1 \odot A_2$ 上の compatible norm である。

この α－norm による completion を $A_1 \hat{\otimes}_{\alpha} A_2$ と表し，A_1，A_2 のテンソル積という。

これで C^*－algebra A_1，A_2 のテンソル積が一応定義出来たが，C^*－algebra を Hirbert space 上の operator algebra と見做した時に，そのテンソル積がどうなるかということも当然考えておかなければならない。一般に C^*－algebra A から Hilbert space H 上の bounded operator 全体の algebra $B(H)$ への $*$－homomorphism を A の H 上への表現という。

π_1, π_2 をそれぞれ C^*－algebra A_1, A_2 の Hilbert space H_1, H_2 上への表現とする。今 $H = H_1 \otimes H_2$ を H_1，H_2 の Hilbert space としてのテンソル積として，その上への $A_1 \odot A_2$ の表現 π を

$$\pi \left(\sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \otimes x_{2,i} \right) \sum_{j=1}^{m} \xi_{1,j} \otimes \xi_{2,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \pi_1 (x_{1,i}) \xi_{1,j} \otimes \pi_2 (x_{2,i}) \xi_{2,j}$$

により定義すると

定理 2. π は $A_1 \odot A_2$ 上で α－norm に関して連続である。

従つて，π は $A_1 \hat{\otimes}_{\alpha} A_2$ の $H_1 \otimes H_2$ 上への表現として unique に拡張される。これを $\pi_1 \otimes \pi_2$ で表わすと

定理 3. π_1，π_2 がそれぞれ faithful ならば $\pi_1 \otimes \pi_2$ も又 faithful

である。

従つて，A_1 ，A_2 のテンソル積 $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ は A_1 ，A_2 をそれぞれ Hilbert space 上の operator algebra として表現しておいて，その Hilbert space のテンソル積にともなう operator algebra のテンソル積と見做すことも可能である。更に，A_1 ，A_2 の表現 π_1 ，π_2 と $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ の表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ との簡単な関係を挙げると，

定理 4. 次の 1° ，2° は同値である。

1° ，π_1 ，π_2 は共に既約である。

2° ，$\pi_1 \otimes \pi_2$ は既約である。

また，表現と state の関係について

定理 5. $\varphi_1 \in \mathfrak{S}(A_1)$ ，$\varphi_2 \in \mathfrak{S}(A_2)$ による A_1 ，A_2 の cyclic な表現を π_1 ，π_2 とすると，$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathfrak{S}(A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2)$ で且 $\pi_1 \otimes \pi_2$ は $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ による cyclic な表現である。

従つて，上を併せて

系 各 $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathfrak{S}(A_1) \times \mathfrak{S}(A_2)$ に対して，次の 1°，2° は同値である。

1°， $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2)$

2° $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{P}(A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2)$。

引用文献 ： 〔24〕，〔33〕，〔34〕，〔38〕

§2. α－norm と λ－norm

前節で C^*－algebra のテンソル積が定義されたが，更にこれと R. Schatten 等により研究された Banach space と見做してのテンソル積との関係を調べる。議論の無用の繁雑をさけるために，ここで取り扱う C^*－algebra は凡て unit を有するものとする。この仮定の下で，C^*－algebra A_1，A_2 は $x_1 \in A_1$ 及び $x_2 \in A_2$ と $x_1 \otimes 1$，$1 \otimes x_2 \in A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ をそれぞれ identify して $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ の sub－algebra と見做し得る。$\varphi \in (A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2)^*$ が $\varphi_1 \in A_1^*$，$\varphi_2 \in A_2^*$ により $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ と表わされることと

$$\varphi(x_1 x_2) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \qquad x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2$$

は同値なことに注意すれば

定理 6. mapping : $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{P}(A_1) \times \mathcal{P}(A_2) \to \varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{P}(A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2)$ は into homeomorphism である。更に，これが onto になることと A_1，A_2 の一方が可換なことは同値である。

C^*-algebra の norm の minimality などの性質から

R. Schatten の cross-norm との関連では，γ-norm とのそれよりも λ-norm との関係の方が注目され，当初は λ-norm と α-norm は一致するのではないかという予想もあつたが，これは否定的に次の形で解決された。[*]

定理 7. C^*-algebra A_1，A_2 のテンソル積 $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ の α-norm が λ-norm と一致することと A_1，A_2 の一方が可換なこととは同値である。

引用文献 ： 〔24〕，〔28〕，〔33〕，〔34〕，〔38〕

註 (*) Banach space E_1, E_2 の代数的テンソル積 $E_1 \odot E_2$ の上の λ-norm を各 $x = \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \otimes x_{2,i} \in E_1 \odot E_2$ に対して

$$\|x\|_\lambda = \sup\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_{1,i})\varphi_2(x_{2,i}) \right| ; \quad \varphi_1 \in E_1^*,\ \varphi_2 \in E_2^* \quad \|\varphi_1\|, \|\varphi_2\| \leq 1 \right\}$$

と与えると，λ-norm は $E_1 \odot E_2$ 上の cross-norm の中で $\varphi_1 \in E_1^*$，$\varphi_2 \in E_2^*$ に対し $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ が連続になる様なものの中で最小になる。この norm はまた $E_1 \odot E_2$ を E_1^* から E_2 への bounded operator 全体の空間 $\mathcal{L}(E_1^*, E_2)$ の中に imbed した時の operator norm でもある。

§ 3. Compatible norm

C^*-algebra A_1，A_2 に対して $A_1 \odot A_2$ の compatible norm β による completion も又 A_1，A_2 のテンソル積と考えられるから，これを $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ で表わす。α-norm 以外の compatible norm は一般に与え方は決らないが，或る意味で特性的な compatible norm として次の ν-norm が導入される。各 $x \in A_1 \odot A_2$ に対して

$\|x\|_\nu = \sup\{\|\pi(x)\| : \pi$ は $A_1 \odot A_2$ の表現で $\|\pi(x_1 \otimes x_2)\| \leqq \|x_1\| \cdot \|x_2\|\}$
とおくと，ν-norm は compatible norm である。これによる completion $A_1 \hat{\otimes}_\nu A_2$ は involutive Banach algebra $A_1 \hat{\otimes}_\gamma A_2$ の enveloping C^*-algebra に他ならない。この ν-norm と α-norm の compatible norm の中における位置は次の様なものである。

定理 8. 1° α-norm は最小の compatible norm である。
2° ν-norm は最大の compatible norm である。

この結果に於て，compatible norm と λ-norm との関係は仮定されないことに注意すれば

系 $A_1 \odot A_2$ の compatible norm β は $\beta \geqq \lambda$ である。
従つて，各 $(\varphi_1, \varphi_2) \in A_1^* \otimes A_2^*$ に対し $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ は β-norm に関し連続に $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ まで拡張される。

次に，$\nu > \alpha$ となる例としては，二ケの生成元をもつ自由群の group C^*-algebra を A_1，A_2 とすれば $A_1 \odot A_2$ がある。従つて，如何なる条件の下で $\nu = \alpha$ となるかという問題を生ずるが，これについては次の様な部分的解答しか得られていない。

定理 9. A_1，A_2 の一方が type I C^*-algebra の inductive limit ならば $A_1 \odot A_2$ 上では $\alpha = \nu$ である。

type I C^*-algebra の inductive limit は必ずしも type I ではないから，定理9は $\alpha = \nu$ という条件は $\alpha = \lambda$ という条件よりも複雑であることを示している。

注意 $\nu' = \alpha$ である。従つて，$\nu > \alpha$ の場合は，ν は R. Schatten の意味で non-reflexive cros-norm である。

引用文献 : 〔9〕，〔26〕，〔30〕.

§4. 表現のテンソル積

C^*-algebra A_1，A_2 の表現 π_1，π_2 に対して，$A_1 \odot A_2$ の表現 $\pi_1 \otimes \pi_2$ を作ると，定理8 1° の直接の結論として，$\pi_1 \otimes \pi_2$ は任意の compatible norm β に対して連続になる。その連続性により $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ にまで拡張したものを改めて $\pi_1 \otimes \pi_2$ と表すことことにする。一般に，C^*-algebra A の

表現 π の型を $\pi(A)$ の生成する von Neumann algebra の型として定義する。C^*－algebra A_1 ，A_2 の表現 π_1 ，π_2 の型と $\pi_1 \otimes \pi_2$ の型の間の関係については von Neumann algebra のテンソル積の理論の応用として次が得られる。

定理 10. C^*－algebra A_1 ，A_2 と $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ に於て，π_1 ，π_2 を A_1 ，A_2 の表現とすると

1°　π_1 ，π_2 が共にI型である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ がI型である。

2°　π_1，π_2 が共に有限型である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ が有限型である。

3°　π_1 ，π_2 の一方がII型で他方がI型又はII型である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ がII型である。

4°　π_1 ，π_2 の一方がIII型である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ がIII型である。

5°　π_1 ，π_2 が共に factor 表現である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ が factor 表現である。

6°　π_1 ，π_2 が共に既約である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ が既約である。

C^*－algebra A の Hilbert space H 上の既約表現を π とした時，H上の compact operator 全体を G(H) とすると，(i) $\pi(A) > C(H)$ 又は (ii) $\pi(A) \wedge C(H) = \{0\}$ である。そして，π に対して (i) が成立つか否かということは π の性質に重大なかかわりをもつ。例えば (i) の場合は π と同じ kernel をもつ様な既約表現は凡て π と unitary 同値である。それで (i) の場合に π を normal な表現と言つて，特に $\pi(A) = C(H)$ の場合は compact であるという。これ等の性質に関しては次の様な自然な対応が成立つ。

定理 11. 1° π_1 ，π_2 が共に compact な既約表現である。$\rightleftharpoons$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ が compact な既約表現である。

2° π_1 ，π_2 が共に normal な既約表現である。$(\rightleftharpoons)$ $\pi_1 \otimes \pi_2$ が normal な既約表現である。逆は $\pi_1(A_1)$ ，$\pi_2(A_2)$ の一方が separable ならば成立つ。

C^*－algebra に於ては von Neumann algebra の場合と違つて algebra が type I であるか否かが決定的な分れ道になる。それで当然，C^*－algebra A_1 ，A_2 の型と $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ の型についてもその点が重要な問題となるが，これは定理10を応用すれば次の形に解決される。

系　次の 1°，2° は同値である。

1°　A_1 ，A_2 は共にI型である。

2°　$A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ はI型である。

次に，$A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の表現 π を与えてこれをテンソル積に分解することを問題にする。A_1 ，A_2 が unit を持つ場合には，A_1 ，A_2 はそれぞれ $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の subalgebra と見做すことが出来るから，$A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の表現 π の A_1 ，A_2 への restriction π^1 ，π^2 を自然に考えることが出来る。又 A_1 ，A_2 が unit をもたない場合には A_1 ，A_2 を $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の subalgebra とは見做し得ないが，次の補題により困難を避けることが出来る。

補題． A_1 ，A_2 の approximate unit を $\{e_{1,s}\}$，$\{e_{2,t}\}$ とする。$A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の表現 π に対して，π の表間空間上への A_1 ，A_2 の表現 π^1 ，π^2 が次の条件を満すように unique に存在する。

1° 各 $x_1 \in A_1$ に対して

$$\pi^1(x_1) = \mathrm{s-}\lim_t \pi(x_1 \otimes e_{2,t})$$

2° 各 $x_2 \in A_2$ に対して

$$\pi^2(x_2) = \mathrm{s-}\lim \pi(e_{1,s} \otimes x_2)$$

3° 各 $x_1 \in A_1$，$x_2 \in A_2$ に対して

$$\pi(x_1 \otimes x_2) = \pi^1(x_1)\ \pi^2(x_2) = \pi^2(x_2)\ \pi^1(x_1).$$

この表現 π^1 ，π^2 を π の A_1 ，A_2 への restriction と呼ぶ。そこで，π の π^1 ，π^2 への分解を考える訳であるが，$A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の表現を考えるときは，分解の方が重要である。しかし，π を与えて分解する process は次の様な部分的解決しか与えられてない。

定理 12. $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ の factor 表現 π は次の場合に，π^1 ，π^2 と quasi-equivalent な π_1 ，π_2 により $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ と表わされる。

1° π が有限型である。

2° π^1 ，π^2 の一方が I 型である。

3° π が compact な既約表現である。

上の 1° は次の形に一般化される。なお 3° が π を normal として成立するかどうかが問題である。

定理 12. $1^{\circ\prime}$ π が semi-finite で $\pi(A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2)$ の weak closure の semi-finite trace の definition ideal を m としたとき，$0 \neq \pi(x_1 \otimes x_2) \in \mathrm{m}$ となるような $x_1 \in A_1$ ，$x_2 \in A_2'$ が存在する。

定理 12. を応用すれば

系 1. A_1, A_2 の一方が I 型ならば, $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ の既約表現 π は A_1, A_2 の既約表現 π_1, π_2 により $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ と表わされる。

系 2. 次の 1°, 2° は同値である。

1° A_1, A_2 が共に CCR−algebra である。

2° $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ が CCR−algebra である。

系 3. separable C^*−algebra A_1, A_2 に対して, 次の 1°, 2° は同値である。

1° A_1, A_2 は共に GCR である。

2° $A_1 \hat{\otimes}_\beta A_2$ は GCR である。

定理 13. A_1, A_2 の一方が separable NGCR ならば $A_1 \hat{\otimes}_\alpha A_2$ も又 NGCR である。A_1, A_2 が共に separable ならば, 逆が成立つ。

問題. 定理13. は一般の compatible norm β に対して成立つか? 又 ν−norm についてはどうか?

引用文献 : 〔1〕, 〔2〕, 〔5〕, 〔7〕, 〔11〕, 〔13〕, 〔14〕, 〔16〕, 〔17〕, 〔18〕, 〔22〕, 〔23〕, 〔38〕.

§5. Dual space と quasi−dual space

一般に, separable C^*−algebra A に対して, 次のような概念を導入する。
$n=1,2,\ldots\infty$ に対して, Hn を n 次元 Hilbert space とし, $H_n \otimes H_m$ と H_{nm} を identify して考える。H_n 上の bounded operator の全体を $\mathcal{B}_n$ とし, これに strong operator topology を考えておく。$\mathrm{Rep}_n(A)$ を A の H_n 上への表現全体とし, これを A から $\mathcal{B}_n$ への mapping の空間と考えて simple convergence topology 及びそれから生成される Borel structure を考える。$\mathrm{Rep}_n(A)$ の disjoint union として Rep(A) を定義する。
Rep(A) の subset Fac(A), Irr(A), Fac I(A), Fac f(A) 等をそれぞれ factor 表現の全体, 既約表現の全体, I型 factor 表現の全体, finite factor 表現全体とし, $\mathrm{Fac}_n(A)$, $\mathrm{Irr}_n(A)$ 等も自然に定義する。Rep(A) の unitary equivalence relation を $\simeq$, quasi−equivalence relation を $\approx$ で表して, それ等による quotient space Rep(A)/"$\simeq$",

Rep(A)/"≈" をそれぞれAの dual space 及び quasi-dual space と呼び，$\widetilde{A}$ ，$\widetilde{A}$ と表す。$\widehat{A}_x$ ，$\widetilde{A}_f$ 等も自然に定義する。

以下，A_1 ，A_2 を separable C^*−algebra とし，$A_\beta = A_1 \widehat{\otimes}_\beta A_2$ とする。ここで $\widehat{A}_1 \times \widehat{A}$ と $\widehat{A}_\beta$ および $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2$ と $\widetilde{A}_\beta$ の間の関係について調べることにする。

定理10−5′により，mapping

Π : $(\pi_1, \pi_2) \in \mathrm{Fac}(A_1) \times \mathrm{Fac}(A_2) \longrightarrow \pi_1 \otimes \pi_2 \in \mathrm{Fac}(A_\beta)$ が定義されるが，これは one−to−one continuous である。

$\mathrm{Fac}(A_i)$ $(i=1,2)$ 及び $\mathrm{Fac}(A_\beta)$ は共に standard Borel space だから，Π は <u>into</u> Borel isomorphism である。更に，$\pi_1 \simeq \pi_1'$ ，$\pi_2 \simeq \pi_2'$ ならば $\pi_1 \otimes \pi_2 \simeq \pi_1' \otimes \pi_2'$ なることに注意すれば，定理4により，Π は $\widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2$ から $\widehat{A}_\beta$ への one−to−one Borel mapping $\widehat{\Pi}$ を induce することが判る。

また，$\pi \in \mathrm{Fac}(A_\beta)$ の A_1 ，A_2 への restriction を π^1 ，π^2 とすると，mapping

Π' : $\pi \in \mathrm{Fac}(A_\beta) \to (\pi^1, \pi^2)$ $\mathrm{Fac}(A_1) \times \mathrm{Fac}(A_2)$ も one−to−one Borel mapping なることが証明される。このことと $\Pi(\mathrm{Irr}(A_\beta)) \ni \pi \Leftrightarrow (\pi^1, \pi^2) \in \mathrm{Fac\,I}(A_1) \times \mathrm{Fac\,I}(A_2)$ なることに着目して，J. Dixmier の〔3〕を使えば，dual space に関して次が得られる。

定理 14. $\widehat{\Pi}$: $\widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2 \to \widehat{A}_\beta$ は <u>into</u> Borel isomorphism である。更に，A_1 ，A_2 の一方が type I C^*−algebra ならば $\widehat{\Pi}$ は <u>onto</u> isomorphism になる。また，$\widehat{A}_1$ ，$\widehat{A}_2$ 上の standard Borel measure $\widehat{\mu}_1$ ，$\widehat{\mu}_2$ に対して，$\widehat{A}_\beta$ 上の Borel measure $\widehat{\mu}$ を $\widehat{\mu} = \widehat{\Pi}(\widehat{\mu}_1 \times \widehat{\mu}_2)$ とおくと

$$\int_{\widehat{A}_\beta}^{\otimes} \widehat{\pi}\, d\widehat{\mu}(\widehat{\pi}) = \int_{A_1}^{\otimes} \widehat{\pi}_1\, d\widehat{\mu}_1(\widehat{\pi}_1) \otimes \int_{A_2}^{\otimes} \widehat{\pi}_2\, d\widehat{\mu}_2(\widehat{\pi}_2)$$

となる。但し，上の積分と等式の意味は表現の unitary equivalence class の意味に於てである。

更に，$\int_{\widehat{A}_\beta}^{\otimes} \widehat{\pi}\, d\widehat{\mu}(\widehat{\pi})$ が central decomposition であることと，

$\int_{\hat{A}_1}^{\otimes} \hat{\pi}_i \, d\hat{\mu}_i (\hat{\pi}_i)$ $(i = 1, 2)$ が共に central decomposition であることとは同値である。

同様のことを quasi-dual space について考えると，前と同様に Πは $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ から $\tilde{A}_\beta$ への <u>into</u> Borel mapping $\tilde{\Pi}$ を induce する。$\tilde{\Pi}$ が Π と同様に Borel isomorphism になるかは未だ判らない。しかし，これは次に見る通り殆ど Borel isomorphism に近い性質をもつている。

定理 15. $\tilde{\Pi}(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2)$ は $\tilde{A}_\beta$ の Borel subset である。$\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ 上の任意の standard Borel measure $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ に対して，$\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ の standard Borel subset $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ が $\mu_1(\tilde{A}_1 - \tilde{E}_2) = \mu_2(\tilde{A}_1 - \tilde{E}_1) = 0$ で $\tilde{\Pi}$ の $\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2$ への restriction は Borel isomorphism になるように存在する。

$\tilde{\mu} = \tilde{\Pi}(\tilde{\mu}_1 \times \tilde{\mu}_2)$ とおくと

$$\int_{\tilde{A}_\beta}^{\otimes} \tilde{\pi} \, d\tilde{\mu}(\tilde{\pi}) = \int_{\tilde{A}_1}^{\otimes} \tilde{\pi}_1 \, d\tilde{\mu}_1(\tilde{\pi}) \otimes \int_{\tilde{A}_2}^{\otimes} \tilde{\pi}_2 \, d\tilde{\mu}_2(\tilde{\pi}_2)$$

で，且左辺が central decomposition であることと，右辺の二項が共に central decomposition になることとは同等である。更に，A_1 , A_2 の一方が type I ならば $\tilde{\Pi}$ は <u>onto</u> Borel isomorphism になる。

π , $\pi' \in \mathrm{Fac}(A_\beta)$ が $\pi \approx \pi'$ ならば，$\pi^1 \approx \pi'^1$, $\pi^2 \approx \pi'^2$ は明らかだから，Π' は $\tilde{A}_\beta$ から $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ への Borel mapping $\tilde{\Pi}'$ を induceする。この $\tilde{\Pi}'$ と $\tilde{\Pi}$ の関係は，一般には簡単ではないが，定理 9 の 1° より次が導かれる。

定理 16. $\tilde{\Pi}$ と $\tilde{\Pi}'$ は $\tilde{A}_{1,f} \times \tilde{A}_{2,f}$ と $\tilde{A}_{\beta,f}$ の間の <u>onto</u> Borel isomorpism で互に inverse mapping である。

尚，一般に C^*－algebra A に対して，$\tilde{A}_f$ は standard Borel space である。

以上を綜合すれば，$\hat{A}_1 \times \hat{A}_2$ 及び $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ は殆ど $\hat{A}_\beta$ と $\tilde{A}_\beta$ の subspace と考えられる訳である。しかし，それぞれの場合に両者が一致するか否かは A_β の表現論的構造を決める上で重大な意味を持つが，これは次に見る如く，GCR－algebra でない C^*－algebra はこの場合にも病理的な行動を示す。即ち $\beta = \nu$ とした時には

定理 17. 次の $1^\circ \sim 3^\circ$ は同値である。

1° A_1 , A_2 の一方がGCRである。

2° $\widehat{\Pi}$ は $\widehat{A}_1 \times \widehat{A}_2$ から $\widehat{A}_\beta$ への onto Barel isomorphism である。

3° $\widetilde{\Pi}$ は $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2$ から $\widetilde{A}_\beta$ への onto Barel isomophism である。

この場合は $\alpha = \nu$ である。

問題 : 定理17 は α-norm に対して成立つか?

引用文献 : 〔3〕, 〔7〕, 〔8〕, 〔9〕, 〔12〕, 〔30〕, 〔38〕, 〔39〕.

§6. Ideal のテンソル積

A_i , B_i を C^*-algebra,, π_i を A_i から B_i への into homomorphism とする $(i=1, 2)$。 mapping

$$\pi_1 \otimes \pi_2 \ : \ A_1 \odot A_2 \longrightarrow B_1 \odot B_2$$

は $\beta = \alpha$, ν に関して連続だから, homomorphism

$$\pi \ : \ A_1 \widehat{\otimes}_\beta A \longrightarrow B_1 \widehat{\otimes}_\beta B_2$$

に自然に拡張される。 π_1 , π_2 , π の kernel をそれぞれ I_1 , I_2 , I_β とすると,

定理 18. 1° $\beta = \alpha$ のとき, π_1 , π_2 が into isomorphism ならばも又 into isomorphism である。即ち, $I_1 = I_2 = \{0\}$ ならば $I_\alpha = \{0\}$ である。

2° $\beta = \nu$ のとき, π_1 と π_2 が共に onto homomorphism ならば π も又 onto homomorphism で且その kernel I_ν は

$$I_\nu = I_1 \widehat{\otimes}_\nu A_2 + I_2 \widehat{\otimes}_\nu A_1$$

と表わされる。

上の結果で, 1° は α-norm が localization property とも言うべき性質をもつていることを示している。 ν-norm がこのような性質をもつかどうかは未だ判らな

い。

また，simple algebra については，定理8 − 1° を応用して次を得る。

定理 19. 次の 1°，2° は同値である。

1° A_1，A_2 が共に simple である。

2° $A_1 \widehat{\otimes}_\alpha A_2$ が simple である。

引用文献 ：〔9〕，〔30〕，〔34〕，〔39〕.

§ 7. Locally compact group の直積と group C^*− algebra

一般に，locally compact group G の group C^*−algebra $C^*(G)$ を次の様に定義する。G の Haar measure に関する $L^1(G)$ は通常の convolution と involution により Banach ∗−algebra になる。この algebra の表現と G の unitary 表現とは自然な対応により1対1に対応する。

各 $x \in L^1(G)$ に対して，その norm を

$$\|x\| = \sup\{\|\pi(x)\| \ ; \ \pi \text{ は } L^1(G) \text{ の表現}\}$$

とおくと，それによる $L^1(G)$ の completion $C^*(G)$ は C^*−algebra になるので，これを G の group C^*−algebra という。$C^*(G)$ の表現と $L^1(G)$ の表現は自然な対応で1対1に対応し，G の unitary 表現とも1対1に対応する故，G の unitary 表現，$L^1(G)$ の表現及び $C^*(G)$ の表現は凡て identify して考えることが出来る。

今 G_1，G_2 をそれぞれ locally compact group とし，$G = G_1 \times G_2$ をその直積とする。G_1, G_2, G の group C^*−algebra をそれぞれ A_1，A_2，A とおいたときの A_1，A_2 と A の関係を問題とする。

良く知られている様に，$L^1(G)$ と $L^1(G_1) \widehat{\otimes}_\gamma L^1(G_2)$ は自然な対応により isometric isomorph である。その対応による identification を拡張すれば，$A_1 \odot A_2$ は A の subalgebra と見做し得る。また $L^1(G)$ が A で dense で且 $L^1(G_1) \odot L^1(G_2) \subset A_1 \odot A_2$ により，$A_1 \odot A_2$ は A の dense subalgebra である。

$L^1(G_1) \widehat{\otimes}_\gamma L^1(G_2)$ は norm を別にして $A_1 \widehat{\otimes}_\gamma A_2$ に含まれるから，A は

$A_1 \hat{\otimes}_\gamma A_2$ の enveloping C^*−algebra に他ならない。

即ち $A = A_1 \hat{\otimes}_\nu A_2$ である。従つて，

定理 20. Locally compact group G_1 , G_2 の直積 $G = G_1 \times G_2$ の group C^*−algebra $C^*(G)$ は

$$C^*(G) = C^*(G_1) \hat{\otimes}_\nu C^*(G_2) .$$

と表わされる。

従つて，定理17 を G の (quasi−) dual space に応用すれば

系． 定理20 の記号の下で，G_1 , G_2 が separable ならば，次の $1^\circ \sim 3^\circ$ は同値である。

1° G_1 , G_2 の一方がI型 group である。

2° $\hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$

3° $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$.

つまり，I型でない group については (quasi−) dual space に関して最も基本的ともいうべき関係 $(G_1 \times G_2)^{\wedge} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ (又は，$(G_1 \times G_2)^{\sim} = \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$) が破壊されてしまう訳で，product group $G_1 \times G_2$ の表現論的構造を解析する上で重大な困難があると言わなければならない。

group C^*−algebra のテンソル積の場合は $\alpha = \nu$ の充分条件が次の形で与えられる。

定理 21. G_1 , G_2 のそれぞれの上で，constant function 1 が compact support をもつ positive definite function により凡ての compact set 上で一様近似可能ならば

$$C^*(G) = C^*(G_1) \hat{\otimes}_\alpha C^*(G_2)$$

である。

引用文献 ： 〔7〕，〔9〕，〔30〕.

REFERENCE

1. J. Dixmier; Les algebres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Paris, (1957) .
2. J. Dixmier; Les C^*–algèbres et leurs représentations, Paris, (1964) .
3. J. Dixmier; Dual et quasi–dual d'une algèbre de Banach involutive, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962) , 278 – 283.
4. J. M. G. Fell; The dual spaces of C^*–algebras, Thans. Amer. Math. Soc., 94 (1960) , 365 – 403.
5. J. Glimm; Type I C^*–algebras, Ann. Math., 73 (1961) , 572 – 612.
6. A. Grothendieck; Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., no. 16.
7. A. Guichardet, Caracterès et représentations de produits tensoriels de C^*–algèbres, Ann. Ecole Norm. Sup., 81 (1964) , 189 – 206.
8. A. Guichardet; Caractères des algèbres de Banach involutiv Ann. Inst. Fourier, 13 (1963) , 1 – 81.
9. A. Guichardet; Sur les produits tensoriels de C^*–algèbres, The author's manuscript.
10. N. Jacobson; A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 31 (1945) , 333 – 338.
11. I. Kaplansky; The structure of certain operator algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951) , 219 – 255.

12. G. W. Mackey; Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 134–165.

13. Y. Misonou; On the direct product of W^*–algebras, Tohoku Math. J., 6 (1954), 189–204.

14. Y. Misonou; Generalized approximately finite W^*–algebras, Tôhoku Math. J., 7 (1955), 192–205.

15. Y. Misonou; On divisors of factors, Tôhoku Math. J., 8 (1956), 63–69.

16. F. J. Murray and J. von Neumann; Rings of operators, Ann. Math., 37 (1946), 116–229.

17. F. J. Murray and J. von Neumann; Rings of operators IV, Ann. Math., 44 (1943), 716–808.

18. M. Nakamura; On the direct product of finite factors, Tôhoku Math. J., 6 (1954), 205–207.

19. J. von Neumann; On infinite direct products, Compositio Math., 6 (1939), 1–77.

20. T. Saito; On incomplete infinite direct product of W^*–algebras, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 165–171.

21. T. Saito; The direct and crossed product of rings operators, Tôhoku Math. J., 11 (1959), 299–304.

22. S. Sakai; On topological properties of W^*–algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 439–444.

23. S. Sakai; The theory of W^*–algebras, Lecture note of Yale Univ., (1962).

24. R. Schatten; Theory of cross–spaces, Princeton (1950).

25. Z. Takeda; On the representations of operator algebras, II, Tôhoku Math. J., 6 (1954), 212–219.

26. Z. Takeda; Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J., 7 (1955), 67–86.

27. M. Takesaki; On the direct product of W^*-factors, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 116–119.

28. M. Takesaki; A note on the cross-norm of the direct product of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep., 10 (1958), 137–140.

29. M. Takesaki; A note on the direct product of operator algebras, Kodai Math. Sem. Rep., 11 (1959), 178–181.

30. M. Takesaki; On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 16 (1964), 111–122.

31. J. Tomiyama; On the product projection of norm one in the direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J., 11 (1959), 305–313.

32. J. Tomiyama; Tensor product of commutative Banach algebras Tôhoku Math. J., 12 (1960), 147–154.

33. T. Turumaru; On the direct-product of operator algebras Tôhoku Math. J., 4 (1952), 242–251.

34. T. Turumaru; On the direct-product of operator algebras II, Tôhoku Math. J., 5 (1953), 1–7.

35. T. Turumaru; On the direct-product of operator algebras III, Tohoku Math. J., 6 (1954), 208–211.

36. T. Turumaru; On the direct-product of operator algebras IV, Tohoku Math. J., 8 (1956), 281–285.

37. H. Umegaki; Positive definite function and direct product Hilbert space, Tôhoku Math. J., 7 (1955), 206–211.

38. A. Wulfsohn; Produit tensoriel de C^*-algèbres, Bull. Sci Math., 87 (1963), 13–27.

39. A. Wulfsohn; Le produit tensoriel de certaines C^*-algèbres, C. R. Acad. Sc., 258 (1964), 6052–6054.