

## Faddeev の方法について

京都大学数理解析研究所

静 田 靖  
望 月 清

### § 1 Introduction

### § 2 問題の決定

### § 3 Faddeev equation と resolvent の評価

### § 4 wave operator と scattering operator

### § 1 Introduction

よく知られているように散乱の量子論では二体問題は既に完全に解かれていて、厳密な数学的理論が存在しているが、多体問題の方は数学的に本質的な困難があつて、それを乗り越える方法が全く見出されないという状態が永い間続いていた。しかし1963年に到つてFaddeevが三体問題の厳密な数学的取扱いに成功し、このような多体問題の暗黒時代にも、漸く終止符がうたれることになつた。Faddeevの論文はSteklov研究所の紀要に発表されたが、120頁におよぶほう大なものである。ここでは彼の方法と主な結果とを簡単に紹介することにしよう。

三体問題を解くためには先ずHamiltonianのresolventを得なければならない。そこで二体問題のときと同じようにresolvent equation (あるいはLippmann-Schwinger equationと言つてもよい)を書いてみると今度は完全連続でない積分核が現われてFredholmの積分方程式の理論が使えないと言う事情が起る。Faddeevは三体問題に附随した二体問題がすべて解けていることを利用して新しい未知量を導入して上の方程式を連立方程式の形に書き直すと同時に、この新しい方程式系に現われる積分核はすべて完全連続であつてFredholmの理論が適用されることを示したのである。(今後これをFaddeev equationと呼ぼう。)我々は§2で問題を数学的な形で設定したのち、§3でFaddeev equationが導き出される過程を見ることにしよう。(積分核の完全連続

性の証明は原論文にゆずる。)このようにして得られた resolvent を用いて Faddeev は wave operator や scattering operator を構成することに成功した。これらの事情は長くまた煩雑な計算の後にはじめて証明されるのであるが、そこでは昔 Friedrichs が擾動論に関する論文の中で示した方法が極めて有効に利用されていることを注意しておく必要があると思われる。三体の散乱理論の最終的な結果を § 4 で定理として述べることにする。

## § 2 問題の設定

二体問題および三体問題の Hamiltonian を configuration space で書くと

$$H_2 \psi(x_1, x_2) = \left\{ -\frac{1}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2} \nabla_2^2 - v_{12}(x_1 - x_2) \right\} \psi(x_1, x_2);$$

$$H_3 \psi(x_1, x_2, x_3) = \left\{ -\frac{1}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2} \nabla_2^2 - \frac{1}{2m_3} \nabla_3^2 + \hat{v}_{23}(x_2 - x_3) \right. \\ \left. + \hat{v}_{31}(x_3 - x_1) + \hat{v}_{12}(x_1 - x_2) \right\} \psi(x_1, x_2, x_3)$$

である。 $\hat{v}_{12}, \hat{v}_{23}, \hat{v}_{31}$  はそれぞれ粒子 1-2, 2-3, 3-1 間の相互作用を記述する potential で、外力の場はないと仮定している。Hamiltonian  $H_2, H_3$  はそれぞれ Hilbert 空間  $L^2(E_6), L^2(E_9)$  の作用素と考えるのであるが、直接このままの形で扱うより、むしろ Fourier 変換して問題を考えた方がよい。すなわち momentum space で Hamiltonian が与えられていると考えるのである。Fourier 変換された作用素をやはり  $H_2, H_3$  と書くことにすれば

$$H_2 f(k_1, k_2) = \left\{ \frac{1}{2m_1} k_1^2 + \frac{1}{2m_2} k_2^2 \right\} f(k_1, k_2) + V_{12} f(k_1, k_2);$$

$$H_3 f(k_1, k_2, k_3) = \left\{ \frac{1}{2m_1} k_1^2 + \frac{1}{2m_2} k_2^2 + \frac{1}{2m_3} k_3^2 \right\} f(k_1, k_2, k_3) \\ + (V_{23} + V_{32} + V_{12}) f(k_1, k_2, k_3).$$

例えば  $V_{12}$  は

$$V_{12} f(k_1, k_2) = \int \hat{v}_{12} \left( \frac{k_1 - k_2 - k'_1 + k'_2}{2} \right) \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) \\ \times dk'_1 dk'_2.$$

ここで先ず重心の運動に関係した部分を分離して問題を少し簡単にする。二体問題の場合は

$$K = k_1 + k_2 \quad k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}$$

を新しい変数に用いると、

$$H_2 f(K, k) = \frac{1}{2M} K^2 f(K, k) + h f(K, k)$$

となつて  $h$  は  $L^2(E_3)$  の作用素

$$\begin{aligned} h f(k) &= \frac{1}{2m} k^2 f(k) + \int v(k-k') f(k') dk' \\ &= (h_0 + v) f(k) \end{aligned}$$

である。ただし

$$M = m_1 + m_2; \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

二体問題の Hamiltonian  $H_2$  を調べるのが、 $h$  を調べることに帰着されたわけである。

同様のことを三体問題に対しても行う。

新しく導入される変数は

$$K = k_1 + k_2 + k_3;$$

$$k_{23} = \frac{m_3 k_2 - m_2 k_3}{m_2 + m_3}; \quad p_1 = \frac{m_1 (k_2 + k_3) - (m_2 + m_3) k_1}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$k_{31} = \frac{m_1 k_3 - m_3 k_1}{m_3 + m_1}; \quad p_2 = \frac{m_2 (k_3 + k_1) - (m_3 + m_1) k_2}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$k_{12} = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2}; \quad p_3 = \frac{m_3 (k_1 + k_2) - (m_1 + m_2) k_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

一時独立な変数として、 $K$  の他に  $k_{23}$  と  $p_1$ 、 $k_{32}$  と  $p_2$  あるいは  $k_{12}$  と  $p_3$  のいずれの組合わせを選んでもよい。そのとき

$$H_3 f(K, k, p) = \frac{1}{2M} K^2 f(K, k, p) + H f(K, k, p)$$

となる。ここで  $H$  は  $L^2(E_6)$  の作用素であつて、

$$H = H_0 + V_{23} + V_{31} + V_{12}.$$

この作用素  $H$  を解析することが我々の問題である。  $H_0$  は函数  $H_0(k, p)$  を乗ずる乗法作用素であつて

$$\begin{aligned} H_0(k, p) &= \frac{1}{2m_{23}} k_{23}^2 + \frac{1}{2n_1} p_1^2 = \frac{1}{2m_{31}} k_{31}^2 + \frac{1}{2n_2} p_2^2 \\ &= \frac{1}{2m_{12}} k_{12}^2 + \frac{1}{2n_3} p_3^2 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} m_{23} &= \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}; & n_1 &= \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ m_{31} &= \frac{m_3 m_1}{m_3 + m_1}; & n_2 &= \frac{m_2 (m_3 + m_1)}{m_1 + m_2 + m_3}; \\ m_{12} &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; & n_3 &= \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned}$$

$V_{23}$  は積分作用素であつて、その積分核は

$$U_{23}(k, p; k', p') = v_{23}(k_{23} - k'_{23}) \delta(p_1 - p'_1)$$

すなわち

$$V_{23} f(k, p) = \int v_{23}(k_{23} - k'_{23}) f(k'_{23}, p) dk'_{23}$$

$V_{31}, V_{12}$  も同様である。積分核  $U_{23}, U_{31}, U_{12}$  などがいずれも  $\delta$  函数を含んでいることに注目すれば、三体問題の困難さが理解されるであろう。

Faddeev が  $v(k), v_{23}(k), v_{31}(k), v_{12}(k)$  などの potential に対して課した条件は次のようなものである。

$$(A_{\theta_0}) \quad |v(k)| \leq C(1 + |k|)^{-1 - \theta_0} \quad (\theta_0 > 0)$$

$$(B_{\mu_0}) \quad |v(k) - v(k+h)| \leq C(1 + |k|)^{-1 - \theta_0} |h|^{\mu_0},$$

$$(|h| \leq 1, \mu_0 > 1).$$

また自明な条件

$$(R) \quad v(-k) = \overline{v(k)}$$

は当然満されているものとする。条件  $(A_{\theta_0})$  の下で  $(\theta_0 > \frac{1}{2})$ 。作用素  $h$  および  $H$  は二乗可積分な函数の全体がつくる Hilbert 空間の自己共役作用素であることが示される。 $h$  の

定義域は

$$\int (1+k^2)^2 |f(k)|^2 dk < +\infty$$

をみたす  $f(k)$  の全体, また  $H$  の定義域は

$$\int (1+k^2+p^2)^2 |f(k,p)|^2 dk dp < +\infty$$

をみたす  $f(k,p)$  の全体である。

§1 で述べたように二体問題は既に完全に解かれている。すなわち  $\hbar$  の resolvent の性質を調べてそれから wave operator および scattering operator を構成することが出来る。(いわゆる stationary method)。またそれらが time-dependent theory で定義された wave operator や scattering operator と一致することを証明することも出来る。我々の問題は三体問題に対して同様なことを行うことである。

さて Faddeev が最初に行つたことは,  $H$  の resolvent を作つて, その評価を得ることであつた。実際これは困難な仕事であつてこれまでは誰も手を着けなかつたのである。ここで彼が用いた trick は見事なものであると云うことが出来る。このような trick が何故有効なのかと云う点については荒木氏が物理的背景を説明されているので参照して頂きたい。

### §3 Faddeev equation と resolvent の評価

この section では  $H$  の resolvent  $R(z) = (H - zE)^{-1}$  が構成される手順を見ることが出来る。

先ず始めに二体問題の場合に  $\hbar$  の resolvent を作る方法を振り返つてみることにする。 $r_0 = (\hbar_0 - z e)^{-1}$ ,  $r(z) = (\hbar - z e)^{-1}$  に対して

$$(3.1) \quad r(z) = r_0(z) - r_0(z) v r(z) = r_0(z) - r(z) v r_0(z)$$

なる resolvent equation が成り立つ。 $r_0(z)$  はよく知られているからこれから  $r(z)$  を求めればよい。 $t(z)$  を

$$(3.2) \quad t(z) = v - v r(z) v$$

と定義しよう。すると (3.1) より  $t(z)$  は

$$(3.3) \quad t(z) = v - v r_0(z) t(z) = v - t(z) r_0(z) v$$

をみたす。この方程式を解いて  $t(z)$  を求めることが出来れば resolvent  $r(z)$  を

$$(3.4) \quad r(z) = r_0(z) - r_0(z) t(z) r_0(z)$$

として得ることが出来る。実際 (3.3) 式を積分方程式の形に書いてみると積分核はある Banach 空間で完全連続な積分作用素を定義していることが分かる。1 を固有値に持つような  $z$  の値は  $h$  の固有値に一致することが示されるのでこの積分方程式は Fredholm-Riesz-Schauder の理論を用いて解ける。すなわち  $t(z)$  は積分作用素であつて、その積分核  $t(k, k'; z)$  は次の評価を持つ。

$$(3.5) \quad |t(k, k'; z)| \leq \text{const} (1 + |k - k'|)^{-1-\theta}, \quad \theta < \theta_0;$$

$$(3.6) \quad |t(k, k'; z) - t(k + \Delta k, k' + \Delta k'; z + \Delta z)| \\ \leq \text{const} (1 + |k - k'|)^{-1-\theta} (|\Delta k|^r + |\Delta k'|^r + |\Delta z|^r), \quad r < r_0$$

ここに  $\text{const}$  は  $z$  を  $h$  の固有値の最短距離にのみ関係する定数である。

このように二体問題が容易に解けるのは  $v r_0(z)$  が完全連続であることが大きな理由になっている。云いかえれば potential による摂動は resolvent に対する完全連続な摂動であつたのである。三体問題の時は  $V R_0(z) = V(H_0 - z E)^{-1}$  は完全連続な作用素ではない。

Faddeev が三体問題の resolvent  $R(z)$  を構成した手順は次のようなものである。

$$(3.7) \quad T(z) = v - V R_0(z) T(z)$$

を直接解くことに出来ないので、新しい作用素  $M_{\alpha\beta}$  を未知量として導入する。

$$(3.8) \quad M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} V_\alpha - V_\alpha R_0(z) V_\beta, \quad \alpha, \beta = 23, 31, 12$$

すると容易に分かるように  $T(z)$  は

$$(3.9) \quad T(z) = \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}(z)$$

となる。ここで  $M_{\alpha\beta}(z)$  がみたすべき方程式を考えよう。(3.7) から直ちに

$$(3.10) \quad M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma} M_{\alpha\gamma}(z).$$

これを書き変えれば

$$(3.11) \quad [E + V_\alpha R_0(z)] M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} v_\alpha - V_\alpha R_0(z) \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\alpha\gamma}(z)$$

を得る。さて  $T_\alpha(z)$  を

$$(3.12) \quad T_\alpha(z) = V_\alpha - V_\alpha R_0(z) T_\alpha(z) = V_\alpha - T_\alpha(z) R_0(z) V_\alpha, \\ \alpha = 23, 31, 12.$$

をみたす作用素としよう。実際二体問題は既に解けているのだから、 $T_\alpha(z)$ を求めることが出来て

$$(3.13) \quad T_\alpha(z) f(k, p) = \int t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}) f(k'_\alpha, p_\alpha) dk'_\alpha.$$

積分核  $t_\alpha(k_\alpha, k'_\alpha; z - \frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha})$  は (3.5), (3.6) のような評価を持っている。この作用素  $T_\alpha(z)$  ( $\alpha=23, 31, 12$ ) を用いると (3.11) は次のように書くことが出来る。

$$(3.14) \quad M_{\alpha\beta}(z) = \delta_{\alpha\beta} T_\alpha(z) - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\tau=\alpha} M_{\alpha\tau}(z).$$

この方程式を連立積分方程式と見なしたときに Faddeev equation と呼ぶことにしよう。Faddeev equation (3.14) に現われる積分核はすべてある Banach 空間の完全連続作用素になることが示される。従つて Fredholm-Riesz-Schauder が適用されて (実はこの云い方は少々荒つばいのであるが)、 $M_{\alpha\beta}(z)$  ( $\alpha, \beta=23, 31, 12$ ) が得られる。上の変形を逆にたどると  $T(z)$  は (3.9) から定まり、resolvent  $R(z)$  は

$$(3.15) \quad R(z) = R_0(z) - R_0(z) T(z) R_0(z)$$

として求められる。実際 Faddeev equation を解くにはもう少し変形しておいた方がよい。

$$(3.16) \quad W_{\alpha\beta}(z) = M_{\alpha\beta}(z) - \delta_{\alpha\beta} T_\alpha(z)$$

とおくと、(3.14) は

$$(3.17) \quad W_{\alpha\beta}(z) = W_{\alpha\beta}^{(0)}(z) - T_\alpha(z) R_0(z) \sum_{\tau=\alpha} W_{\tau\beta}(z).$$

ここに

$$(3.18) \quad W_{\alpha\alpha}^{(0)}(z) = 0, \quad W_{\alpha\beta}^{(0)}(z) = -T_\alpha(z) R_0(z) T_\beta(z)$$

である。実はこれでもまだ free term の性質がよくないので何回か iteration をほどこしてもつと性質のよいものに (Banach 空間に入るように) 変えてやる必要がある。やり方は明らかであろう。結局積分作用素  $W_{\alpha\beta}(z)$  の積分核  $W_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)$  は次の評価を持つことが示される。

$$(3.19) \quad |W_{\alpha\beta}(k, p; k', p'; z)| \leq \text{const } N(k, p; \theta) (1 + p_\beta^2)^{-1},$$

$$(3.20) \quad \mathcal{N}(k, p; \theta) = \sum_{\alpha \neq \beta} (1 + |p_\alpha|)^{-1-\theta} (1 + |p_\beta|)^{-1-\theta}, \quad \theta < \theta_0.$$

ここに const はやはり  $z$  が実軸上の固有値でない点に近づいても変化しない。証明は本質的には二体問題のときと同様な方法によっている。resolvent  $R(z) \xi W_{\alpha\beta}(z)$  を用いて書きあらわすと、

$$(3.21) \quad R(z) = R_0(z) + \sum_{\alpha} (R_{\alpha}(z) - R_0(z)) - R_0(z) \sum_{\alpha, \beta} W_{\alpha\beta}(z) R_0(z)$$

となる。ここに  $R_{\alpha}(z)$  は

$$(3.22) \quad R_{\alpha}(z) = R_0(z) - R_0(z) T_{\alpha}(z) R_0(z)$$

である。

$H$  の固有値に対しては次のことが分っている。簡単のために各々の potential に対応する二体問題はそれぞれ 1 個ずつ負の固有値  $-k_{\alpha}^2$  ( $\alpha = 23, 31, 12$ ) を持っているとしよう。(次の section はこの仮定の下に述べる。) そのとき  $H$  の固有値は有界で高々  $-k_{\alpha}^2$  を集積点とする可算個の点よりなる。

#### §.4 wave operator と scattering operator

resolvent の評価が得られたからあとはいわゆる stationary method に訴えて wave operator および scattering operator を構成することが出来る。

$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_{\alpha}$  ( $\alpha = 23, 31, 12$ ) をそれぞれ二変数  $k, p$  および一変数  $p_{\alpha}$  に関する二乗可積分な函数の作る Hilbert 空間としよう。それぞれの Hilbert 空間に属する函数を区別するために、 $f_0(k, p) \in \mathcal{H}_0, f_{\alpha}(p_{\alpha}) \in \mathcal{H}_{\alpha}$  ( $\alpha = 23, 31, 12$ ) のように書くことにする。また内積を  $(\cdot, \cdot)_0, (\cdot, \cdot)_{\alpha}$  と書く。

$\hat{\mathcal{H}}$  を次の如く定義する。

$$(4.1) \quad \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{23} \oplus \mathcal{H}_{31} \oplus \mathcal{H}_{12}.$$

次に  $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_{\alpha}$  の作用素  $\tilde{H}_0$  および  $\tilde{H}_{\alpha}$  を考える。これらはいずれも乗法作用素であつて、

$$(4.2) \quad \tilde{H}_0 f_0(k, p) = \left( \frac{k^2}{2m} + \frac{p^2}{2m} \right) f_0(k, p),$$

$$(4.3) \quad \tilde{H}_{\alpha} f_{\alpha}(p_{\alpha}) = \left( -k_{\alpha}^2 + \frac{p_{\alpha}^2}{2n_{\alpha}} \right) f_{\alpha}(p_{\alpha}), \quad (\alpha = 23, 31, 12)$$



で定義される。ここで  $k_\alpha$  は § 3 の最後に述べた通りである。

$\hat{H}$  を

$$(4.4) \quad \hat{H} = \tilde{H}_0 \oplus \tilde{H}_{23} \oplus \tilde{H}_{31} \oplus \tilde{H}_{12}.$$

と定義しよう。この  $\hat{H}$  が  $H$  と比較すべき作用素である。

$H$  の spectrum を離散部分と連続部分に分けるとそれに対応して Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  は  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \oplus \mathcal{H}_d$  と分解される。 $H$  もまた  $H = H_c \oplus H_d$  と分解される。このとき  $\mathcal{H}_0$  から  $\mathcal{H}$  の中への作用素  $U_0^{(\pm)}$  と  $\mathcal{H}_\alpha$  から  $\mathcal{H}$  の中への作用素  $U_\alpha^{(\pm)}$  ( $\alpha = 23, 31, 12$ ) が存在して次の性質をみたす。

1° 任意の  $f \in \mathcal{H}$  は次のように一意的にあらわすことが出来る。

$$(4.5) \quad f = f_d + U_0^{(\pm)} f_0^{(\pm)} + U_{23}^{(\pm)} f_{23}^{(\pm)} + U_{31}^{(\pm)} f_{31}^{(\pm)} + U_{12}^{(\pm)} f_{12}^{(\pm)}.$$

ここに

$$f_d \in \mathcal{H}_d, \quad f_0^{(\pm)} \in \mathcal{H}_0, \quad f_\alpha^{(\pm)} \in \mathcal{H}_\alpha.$$

2° 実軸上で定義された勝手な有界可測函数  $\varphi(x)$  に対して

$$(4.6) \quad \varphi(H) f = \varphi(p_d H) f_d + U_0^{(\pm)} \varphi(\tilde{H}_0) f_0^{(\pm)} + \sum_\alpha U_\alpha^{(\pm)} \varphi(\tilde{H}_\alpha) f_\alpha^{(\pm)}.$$

が成り立つ。ここに  $p_d$  は  $\mathcal{H}_d$  への projection である。

3°  $f_0^{(\pm)}$  および  $f_\alpha^{(\pm)}$  は次のように与えられる。

$$(4.7) \quad f_0^{(\pm)} = U^{(\pm)*} f, \quad f_\alpha^{(\pm)} = U_\alpha^{(\pm)} f.$$

4° Parseval の等式が成り立つ。

$$(4.8) \quad \|f\|^2 = \|f_d\|^2 + \|f_0^{(\pm)}\|_0^2 + \sum_\alpha \|f_\alpha^{(\pm)}\|_\alpha^2$$

$\hat{\mathcal{H}}$  から  $\mathcal{H}$  の中への作用素  $U^{(\pm)}$  を

$$(4.9) \quad U^{(\pm)} \hat{f} = U_0^{(\pm)} f_0 + \sum_\alpha U_\alpha^{(\pm)} f_\alpha$$

によつて定義すれば上の 1° ~ 4° は次のように述べる事が出来る。

定理  $U^* U = \hat{E}, \quad U U^* = E - P_d, \quad H U = U H.$

ここに  $\hat{E}$  および  $E$  はそれぞれ  $\hat{\mathcal{H}}$  および  $\mathcal{H}$  の単位作用素であつて  $H$  の連続部分  $H_c$  と  $\hat{H}$  の unitary 同値性はこの定理の一つの系である。

$U$ はその作り方からwave operator であるからscattering operator  $S$ は

$$(4.10) \quad S = U^{(+)*} \cdot U^{(-)}$$

で与えられる。 $S_{\alpha\beta}$ を

$$(4.11) \quad S_{\alpha\beta} = U_{\alpha}^{(+)*} U_{\beta}^{(-)} \quad (\alpha, \beta = 0, 23, 31, 12)$$

と定義すれば

$$(4.12) \quad S = \sum_{\alpha\beta} \oplus S_{\alpha\beta} .$$

scattering operator  $S$ は $\hat{H}$ の任意の函数と可換である。

$U^{(\pm)}$ および $S$ はtime-dependent theory で定義されるものと一致することが示されるのでSchrödinger equation の解の $t \rightarrow \pm\infty$ における漸近的な振舞いは完全に決定されたことになる。

上の定理の証明は相当長い計算を必要とするのでここでは全然触れることが出来なかつたが、興味を持たれた方は原論文を見て頂きたい。

L. D. Faddeev, Mathematical Problems of the Quantum Theory of Scattering for a Three-Particle System (Publications of the Steklov Mathematical Institute Leningrad, 1963, No. 69).